Fachdidaktische Rückmeldung zu den zentralen Prüfungen am Ende der Klasse 10 (ZP10) im Fach Mathematik

Prüfungsjahrgang 2017

QUA-LiS NRW Arbeitsbereich 5

Qualitäts- und UnterstützungsAgentur – Landesinstitut für Schule

Autoren: Natascha Besuch, Dr. Joachim Roß

Herausgegeben von der
Qualitäts- und UnterstützungsAgentur –
Landesinstitut für Schule
des Landes Nordrhein-Westfalen (QUA-LiS NRW)
Paradieser Weg 64, 59494 Soest
März 2018

Sehr geehrte Kollegin,
sehr geehrter Kollege,

der Hauptschulabschluss am Ende der Klasse 10 sowie der mittlere Schulabschluss (MSA) werden in NRW in einem Vergabeverfahren mit zentralen Klausuren in den Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik vergeben. In dieser dritten fachdidaktischen Rückmeldung zu den Prüfungen werden erneut Bearbeitungsergebnisse der Schülerinnen und Schüler zu ausgewählten Teilaufgaben der Prüfungsklausuren für den Hauptschulabschluss nach Klasse 10 und den mittleren Schulabschluss analysiert und kommentiert.[1]

Der Schwerpunkt liegt dabei auf Prüfungsaufgaben des letzten Jahres,

- deren Lösungshäufigkeit unerwartet hoch oder unerwartet niedrig ist und
- deren Lösung Kompetenzen erfordert, die für den weiteren schulischen Bildungsweg, eine berufliche Ausbildung oder für die gesellschaftliche Teilhabe von hoher Relevanz sind.

Das Grundverständnis von Variablen und Termen wählen wir in diesem Jahr erneut zu unserem Schwerpunktthema. Die nicht zufriedenstellenden Ergebnisse der letzten Jahre und die Analyse der aktuellen Prüfungsarbeiten weisen auf einen deutlichen Handlungsbedarf hin und stehen zudem der Relevanz dieses Themas im Leben eines mathematisch mündigen Bürgers entgegen. Insbesondere in den ersten Jahren wurde an den Prüfungen häufig die sogenannte „Textlastigkeit“ kritisiert und zugleich eingefordert, einen höheren Anteil an mathematisch relevanten Fertigkeiten in den Prüfungen abzufragen. Dass aber das Verstehen mathematischer Zusammenhänge und Konzepte mit der Sprachentwicklung Hand in Hand geht, ist inzwischen hinlänglich bekannt. Umso spannender ist es, sowohl Aufgaben zu Fertigkeiten im Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen, als auch Aufgaben zum Verständnis eben jener grundlegenden Konzepte genauer zu betrachten.

Grundlage der Analyse bilden die von den Schulen rückgemeldeten Daten zu den Prüfungsergebnissen. Ausführliche Informationen hierzu finden Sie im Anhang. Die rückgemeldeten Daten sowie die Einsicht in die Schülerbearbeitungen bieten eine sehr gute Möglichkeit, die Prüfungsergebnisse auszuwerten: Welche Aufgaben konnten die Schülerinnen und Schüler gut lösen? Wo hatten sie Schwierigkeiten? Wie können die Aufgaben in zukünftigen Prüfungsjahren weiter verbessert werden? Welche Erkenntnisse und Anregungen für den Unterricht lassen sich daraus ableiten?

Wir möchten bei dieser Gelegenheit allen Lehrerinnen und Lehrern, die seit Einführung der zentralen Prüfungen mit der Ergebnisrückmeldung befasst waren, ganz herzlich für ihre Bereitschaft danken, diese Aufgabe trotz der damit verbundenen Mühen zu übernehmen. Der mit diesen Rückmeldungen in der ohnehin turbulenten Zeit am Schuljahresende verbundene Aufwand ist uns durchaus bewusst.

Natascha Besuch und Joachim Roß

Wir freuen uns über Ihre Hinweise und Fragen. Bitte schreiben Sie an

pruefungen10@qua-lis.nrw.de.

[1] Für das Fach Mathematik wurde im Oktober 2013 ein ausführlicher Evaluationsbericht zu den zentralen Prüfungen veröffentlicht, in dem auf der Grundlage ausgewerteter Prüfungsergebnisse und Schülerlösungen Hinweise und Anregungen für den Unterricht abgeleitet wurden. „Analysen und Hinweise zur Bearbeitung ausgewählter Aufgaben der Zentralen Prüfungen 10 Mathematik auf der Grundlage der Ergebnisrückmeldung 2010 – 2012“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung 2013)
Im geschützten Bereich zum Herunterladen: https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/zp10/

Inhaltsverzeichnis

1. Ergebnisse der diesjährigen Prüfungen im Fach Mathematik im Überblick

Die empirische Auswertung der zurückgemeldeten Ergebnisse für die diesjährigen Prüfungen weist keine auffälligen Unterschiede zu den Ergebnissen der vergangenen Jahre aus. Die mittleren Prüfungsnoten variieren etwa um eine halbe Notenstufe gegenüber dem langjährigen Mittelwert. Wie in den Vorjahren zeigt sich auch in diesem Jahr, dass die von den Schulen vergebenen Vornoten in der deutlichen Mehrheit der Fälle mit der Abschlussnote übereinstimmen. Weicht die Abschlussnote von der Vornote ab, so in der Regel um eine Notenstufe. Abweichungen der Abschlussnote um mehr als eine Notenstufe betreffen weniger als 1 Promille der Fälle. Die zentralen Prüfungen haben daher einen moderaten Einfluss auf die Noten und dem Erreichen der gewünschten Abschlüsse.

1.1 Hauptschulabschluss (2017)

In diesem Jahr entsprechen die Mittelwerte der Prüfungsnoten im HSA (Hauptschulen und Gesamtschulen) dem Durchschnittswert der vergangenen Jahre. Gegenüber 2016 weicht die mittlere Prüfungsnote aber um eine halbe Notenstufe nach unten ab (2017: 3,85; 2016: 3,31), gegenüber 2015 (4,10) jedoch um eine Viertel Notenstufe nach oben.[2]

Anhand eingereichter Bearbeitungen und den zugehörigen Daten der Bewertung überraschen auf der Ebene einzelner Aufgaben nur Ergebnisse weniger Teilaufgaben. Dennoch bleibt auch wie im Vorjahr festzustellen, dass eine minimale Erhöhung der heuristischen Schwierigkeit einer Teilaufgabe zu einer auffallend hohen Anzahl von Bearbeitungen ohne Punkte führt; minimal leichter eingeschätzte Aufgaben werden weiterhin deutlich besser gelöst. Die Schülerbearbeitungen legen nahe, dass z. T. nur basale Vorstellungen zu mathematischen Konzepten existieren, die nicht ausreichend ausgeprägt sind, um damit auch zusammenhängende Aufgaben erfolgreich zu bearbeiten.

Grund- bzw. Standardaufgaben aus dem ersten Prüfungsteil erfassen in direkt zugänglichen, teilweise innermathematischen Zusammenhängen Basiskompetenzen, d. h. die Aufgaben haben eine besondere Bedeutung sowohl aus mathematischer als auch aus gesellschaftlicher Sicht. Dennoch werden die diesen Aufgaben zugeordneten Punkte insgesamt nur zur Hälfte ausgeschöpft – dies ist ein nicht zufriedenstellendes Ergebnis. Auffallend ist dabei, dass insbesondere Inhaltsbereiche der Mathematik, die in den Jahrgangsstufen 9 und 10 nicht als neuer Schwerpunkt vorkommen, weniger gut ausfallen. Jedoch bauen auch neue Inhalte der letzten beiden Jahrgänge auf Grundvorstellungen aus vergangenen Schuljahren auf, so dass zu erwarten ist, dass die langfristig angelegte Kompetenzentwicklung nicht erfolgreich sein wird.

Der zweite Prüfungsteil beginnt mit einer Aufgabe zum Volumen von geometrischen Körpern – ein Thema, das in der Jahrgangsstufe 9 oder 10 in den Schulen verankert ist – und die in dem

[2] Die Ergebnisse der schriftlichen Prüfung im Fach Mathematik unterliegen von Jahr zu Jahr etwas größeren Schwankungen als die mittleren Prüfungsnoten anderer Fächer. Im Allgemeinen werden Abweichungen der mittleren Prüfungsnoten von einer halben Ziffernnote zwischen zwei Prüfungsjahrgängen als statistisch nicht auffällig interpretiert. Aus Gründen der Geheimhaltung ist eine Pilotierung nicht möglich und damit ist die Schwierigkeit der Aufgaben trotz der Verfahrensschritte zur Qualitätssicherung nicht genauer vorhersagbar. Selbst mit Pilotierung ist aber nicht zu erwarten, dass die Zuverlässigkeit der Einschätzung der Anforderungshöhe a priori wesentlich erhöht werden kann (vgl. z.B. Ergebnisse aus Lernstand 8 in den Jahren 2015 bis 2017).

Erfassen der Interpretation eines linearen Zusammenhangs, dem Abbrennen einer Kerze, mündet. Die gesamte Aufgabe wurde gut gelöst, insgesamt sogar im Durchschnitt besser als die Aufgaben des Prüfungsteils 1. Auch hier kann beobachtet werden, dass etwas komplexere Aufgaben, die z. B. ein Rückwärtsarbeiten erfordern oder bei denen ein Lösungsweg nicht aus einem Schritt besteht, deutlich schlechter bewerkstelligt werden, als dies zu erwarten ist. Ebenso erfassen mehr als vier von fünf Schülerinnen und Schülern das Grundkonzept der linearen Funktion auf der Ebene der tabellarischen Fortsetzung eines Zusammenhangs, der Darstellungswechsel gelingt ebenfalls weitestgehend, die einfach zugängliche Interpretation gelingt jedoch nur noch den Leistungsstärkeren.

1.2 Mittlerer Schulabschluss (2017)

In den Prüfungen auf der Anforderungsebene des mittleren Schulabschlusses liegen die Prüfungsnoten im mittleren befriedigenden Bereich (2017: 3,3, 2016: 3,6). Die im ersten Prüfungsteil gestellten kontextfreien Aufgaben oder Aufgaben mit geringem Kontextanteil werden von den Schülerinnen und Schülern in der Regel zufriedenstellend bewältigt, im Mittel wurden ca. 60 % der Punkte erreicht. Besonders hervorzuheben ist aus unserer Sicht, dass in fast allen Teilaufgaben des ersten Prüfungsteils die Ausschöpfungsquote mehr als 70 % beträgt. Die Schülerinnen und Schüler können in der Regel Zahlen in unterschiedlichen Darstellungen vergleichen, direkt zugängliche Berechnungen an ebenen Figuren vornehmen, Informationen aus Diagrammen einschätzen und im Rahmen der Tabellenkalkulation richtige Formeln zuordnen und Abhängigkeiten aufzeigen.

Die Ausschöpfungsquoten der Aufgaben aus dem zweiten Prüfungsteil sind im Mittel etwas geringer. Grundsätzlich ist dies auch zu erwarten, da die Aufgaben im zweiten Prüfungsteil meist Bezüge zu einem Sachkontext aufweisen und nicht nur darum komplexer sind, sondern erst in diesem Prüfungsteil auch Aufgaben mit einem höheren kognitiven (mathematischen) Anspruch vertreten sind. Es gelingt den Prüflingen wiederholt gut, einfache stochastische Aufgaben zu lösen, wobei der Übergang auf zweistufige Zufallsexperimente trotz vorgegebenen Baumdiagramms weniger gut gelingt. Das Erfassen unterschiedlicher Wachstumsarten (linear, quadratisch oder exponentiell) gelingt ebenfalls, jedoch fällt es den Schülerinnen und Schülern deutlich schwerer, diese auch zu begründen. Volumina einfacher Körper können von mehr als 90 % vollständig berechnet werden (Aufgabe II.1a), das gedankliche Operieren mit einem Körper fällt aber sehr schwer (Aufgabe II.3e).

Ebenso wie im vergangenen Prüfungsjahr gelingt der Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen nicht zufriedenstellend. Aufgaben, die ein Operieren mit Termen und Gleichungen erfordern, weisen viele Mängel auf: Die Übersetzung der Situationsmodelle in Terme oder Gleichungen gelingt häufig nicht. Ferner ist auffällig, dass grundlegende Fertigkeiten im formalen Operieren mit Termen und Gleichungen, hier dem Lösen eines Gleichungssystems (MSA Aufgabe I.4a), nicht ausreichend ausgeprägt sind. Ebenso gelingt es den Schülerinnen und Schülern nicht zu begründen, warum das (einfache) lineare Gleichungssystem aus Aufgabe I.4b eine leere Lösungsmenge hat.

2. Ergebnisse im Fokus

2.1 Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen (HSA und MSA)

Die Auswertung der Stichprobe der vorliegenden Schülerbearbeitungen weist auf beiden Abschlussniveaus auf unzureichende Fertigkeiten im Umgang mit Termen, Gleichungen und Gleichungssystemen hin. Gleichwohl zählt der Umgang mit einfachen Termen und Variablen zu den wesentlichen mathematischen Kompetenzen und ist in vielen Berufen eine notwendige Voraussetzung, um Zusammenhänge mathematisch zu erfassen.

Das Vereinfachen von Termen durch Termumformungen gelingt auf dem Anforderungsniveau des HSA nur wenigen Schülerinnen und Schülern. Die Ausschöpfungsquote HSA Aufgabe I.4 ist kleiner als 20 %.

HSA 2017 – Aufgabe 4 (Prüfungsteil 1)

Löse die Klammern auf. Fasse anschließend zusammen.

$$3 \cdot (2x + 5y) + (-5x)$$

Eine Analyse der Bearbeitungen zeigt, dass viele Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten mit der Termumformung haben. Bereits das Ausmultiplizieren der ersten Zahlklammer gelingt vielfach nicht. Am häufigsten sind Fehler im Umgang mit den Klammern zu beobachten: häufig wird der Faktor 3 ausschließlich auf den ersten Summanden in der Klammer bezogen oder die Klammern werden vollständig ignoriert: So wird von einigen Prüflingen zunächst $2x + (-5x)$ zusammengefasst.

Vermutlich bedingt durch den in den Jahrgangsstufen 9 und 10 dominierenden Umgang mit Gleichungen wird der Term aus der Aufgabenstellung häufig als Gleichung aufgefasst, wodurch Variablen durch Umformungen (z. B. „$| \; + 5x$“) wegfallen.

Positiv ist festzuhalten, dass dieselben Schülerinnen und Schüler eine geeignete Vorstellung von Zahlen und ein Verständnis des Zahlraumes haben, wie die Ergebnisse der Aufgaben 1 und 2 aus dem ersten Prüfungsteil zeigen. Der Umgang mit der Zahlenmauser und damit mit einer strukturell vorgegebenen Rechenreihenfolge gelingt auf der Ebene konkreter Zahlen vier von fünf Schülerinnen und Schülern, auch denen, die bei der Termumformung aufgegeben haben. Das Eintragen rationaler Zahlen in unterschiedlicher Darstellung gelingt etwa vier von zehn Schülerinnen und Schülern vollständig.

Blickt man auf die Ergebnisse auf dem Anforderungsniveau des MSA, so ist erstaunlich, dass die Ausschöpfungsquote der Aufgabe 4a im ersten Prüfungsteil (Lösen eines linearen Gleichungssystems) lediglich ein Drittel beträgt. Sicherlich sind einige der Fehler auch der Prüfungssituation geschuldet, so dass Rechenfehler und Übertragungsfehler vermehrt passieren. Dennoch erkennt man aus den Schülerbearbeitungen, dass das Problem deutlich grundlegender ist. Ähnlich wie in den Prüfungen auf dem Niveau des HSA gelingen die Umformungen häufig nicht, zum einen werden die beiden Variablen x und y zusammengefasst, zum anderen bleibt die grundlegende Idee, dass eine Operation immer auf beide Seiten einer Gleichung wirken muss, unbeachtet.

In vielen Fällen werden die beiden Gleichungen nicht als lineares Gleichungs*system* erfasst: In zahlreichen Lösungsansätzen versuchen Schülerinnen und Schüler jede Gleichung separat zu lösen und wenden dabei fehlerhafte bzw. nicht zielführende Lösungstechniken an: z. B.

„verschwinden“ eine oder beide Variablen einer Gleichung durch „Umformen“. Die beobachteten Ansätze belegen, dass Techniken des Umformens von Gleichungen nicht verstanden wurden.

MSA 2017 – Aufgabe 4 (Prüfungsteil 1)

a) Löse das lineare Gleichungssystem

$$I \quad 2x + y = 14$$
$$II \quad 3x - 2y = 7$$

b) Begründe, warum das folgende lineare Gleichungssystem keine Lösung hat.

$$I \quad y = 4x + 8$$
$$II \quad y = 4x + 5$$

Dass viele Schülerinnen und Schüler nicht in der Lage sind, bei der argumentativen Auseinandersetzung mit einem linearen Gleichungssystem einen Darstellungswechsel vorzunehmen, zeigt sich in den Begründungen zur oben abgebildeten Aufgabe I.4b. Nur wenige begründen die leere Menge des linearen Gleichungssystems mit der Anschauung der beiden Gleichungen als Parallelen im Koordinatensystem. Diese Interpretation des linearen Gleichungssystems als zwei Geraden im Koordinatensystem führt in nahezu allen analysierten Schülerbearbeitungen zur vollständig richtigen Begründung und damit zum Lösen der Aufgabe (vgl. Abbildung 1).

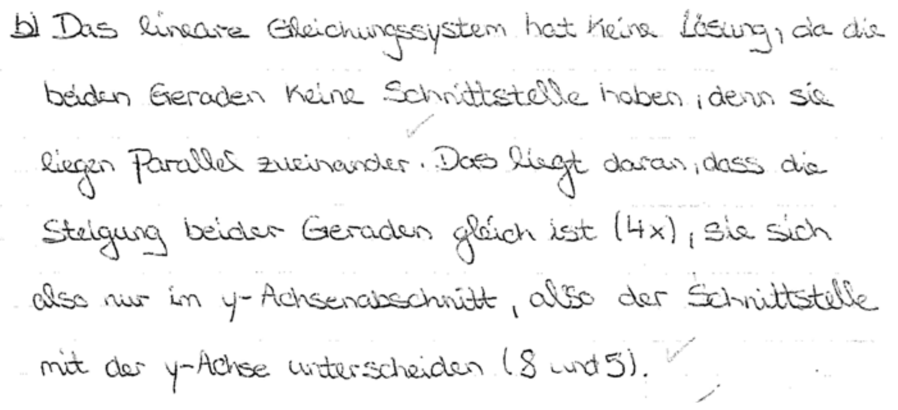

b) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung, da die beiden Geraden keine Schnittstelle haben, denn sie liegen Parallel zueinander. Das liegt daran, dass die Steigung beider Geraden gleich ist (4x), sie sich also nur im y-Achsenabschnitt, also der Schnittstelle mit der y-Achse unterscheiden (8 und 5).

Abbildung 1: Schülerlösung mit einer Interpretation des linearen Gleichungssystems als zwei Funktionsgraphen

Diejenigen, die einen anderen Begründungsversuch unternehmen, wählen in der Regel den Weg des symbolisch formalen Operierens mit den beiden Gleichungen – meist dem Gleichsetzen der beiden Terme auf der rechten Seite der Gleichungen und Subtraktion von $4x$. Wurde dieser Weg gewählt, ist auffällig, dass ein sehr großer Anteil der Lösungen unvollständig bleibt. Die notierte Lösung endet häufig mit einer falschen Aussage (z. B. „$8 = 5$“), ohne dass diese interpretiert wird. Viele Lehrkräfte geben an dieser Stelle die volle Punktzahl, obwohl der mathematische Schluss erst mit der Bewertung der Gleichung vollständig erfolgt.

MSA 2017 – Aufgabe 2 (Prüfungsteil 2)

Anna und Hussam stellen jeweils einen richtigen Term auf, mit dem sie die Anzahl der grauen Quadrate in Figur n berechnen können:

Anna: $n^2 - (n-1)^2$ Hussam: $2 \cdot n - 1$

d) Zeige durch Termumformungen, dass die beiden Terme von Anna und Hussam gleichwertig sind.

e) Beschreibe für einen der beiden Terme, wie damit die Anzahl der grauen Quadrate berechnet wird.

Durch Termumformungen soll in der Aufgabe II.2d (MSA) nachgewiesen werden, dass zwei Terme gleichwertig sind. Die Ausschöpfungsquote von lediglich 20 % zeigt, wie schwer es den Schülerinnen und Schülern fällt, einen quadratischen Term z.B. durch Anwenden der ersten binomischen Formel oder aber durch das Rückführen auf die Multiplikation zweier Klammerausdrücke zu vereinfachen:

$$n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1$$

Den Zusammenhang zwischen einem der Terme und der (nicht dargestellten) Entwicklung der Figuren (Aufgabe II.2e, MSA) können nur wenige Schülerinnen und Schüler herstellen.

Ausbildungsberufe und Studiengänge mathematikaffiner Fächer fordern einen flexiblen Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik. Über die drei Grunderfahrungen nach Heinrich Winter wird die gesellschaftliche Relevanz der Mathematik deutlich. Das Erfassen von Zusammenhängen durch Funktionen, das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen und das Erstellen geeigneter Darstellungen sind wesentliche mathematische Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler am Ende der Jahrgangsstufe 10 erworben haben sollen. Sicherlich sind die Konzepte von Variable, Term und Gleichung an sich bereits schon komplex und aufgrund der hohen Abstraktion kognitiv anspruchsvoll, dennoch muss der Mathematikunterricht es leisten, Grundvorstellungen aufzubauen und die Schülerinnen und Schüler zu befähigen, Variablen, Terme und Gleichungen in Anwendungssituationen flexibel zu nutzen. Dazu gehört, auch gemäß den Kernlehrplänen des Landes, grundlegende Termumformungen mit Variablen sicher und ohne Hilfsmittel zu beherrschen.

2.2 Konsequenzen für den Unterricht

Tragfähige Konzepte von Variablen und Termen aufbauen

Zum einen ist es von besonderer Bedeutung bereits in den unteren Jahrgangsstufen, ausgehend von in der Grundschule erworbenen Kompetenzen, auf ein vorbereitendes Konzept von Variablen und Termen hinzuarbeiten. Dabei müssen die unterschiedlichen Vorstellungen von Variablen

- als unbestimmte (allgemeine) Zahl
- als Veränderliche und
- als Unbekannte

ebenso wie die Vorstellungen von Termen

- als Rechenaufforderung
- als Beschreibungsmittel

auf unterschiedlichen Zugangs- und Abstraktionsstufen und mit unterschiedlichen Inhalten thematisiert, genutzt und eben auch rückblickend eingeordnet werden. Eine Übersicht über die unterschiedlichen Aspekte von Variable, Term und Gleichung (Blomberg 2016)[3] finden Sie auf den Seiten www.schulentwicklung.nrw.de. Dort sind zu jedem Aspekt und für mehrere Jahrgangsstufen Beispiele aufgeführt, die im Sinne eines spiralförmigen Lernens und darauf ausgerichteten Unterrichts das Variablen- und Termkonzept illustrieren.[4] Es geht dabei um ein vertieftes Verständnis von Termen und Variablen, nicht um träges Wissen, das durch Auswendiglernen von mathematischen Techniken erworben wurde. Zu einem vertieften Verständnis gehört u. a., dass Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Bedeutungen von Termen und Variablen zumindest auf einem alltags- bzw. unterrichtssprachlichen Niveau benennen können. Wesentlich ist, dass die Schülerinnen und Schüler mithilfe des Variablenkonzepts in der Lage sind mathematisch zu operieren: Man kann für eine Variable Werte einsetzen, mit ihnen rechnen und sie zum Beschreiben nutzen (Malle 1993). In dem Themenheft „Algebra – Strukturen erkennen und nutzen“ (Barzel und Holzäpfel 2017) wird ein guter Überblick über Vorstellungen und störende Vorstellungen gegeben und Wege aufgezeigt, diese zu erkennen und im Unterricht auf eine solide Grundlage zurückzuführen.

Eine nicht tragfähige Vorstellung besteht z. B. darin, dass Variablennamen mit den Anfangsbuchstaben als Gegenstände interpretiert werden. So könnte in der Vorstellung eines Schülers z. B. $5e$ für fünf Elefanten stehen. Dadurch können Schwierigkeiten entstehen, wenn ein Term wie $5e \cdot 4b$ interpretiert oder ein Term in Zusammenhängen aufgestellt werden soll. Günther Malle beschreibt in seinem Buch die klassische Fehlvorstellung in Interviews bei Akademikern und führt diese auf den damaligen Unterricht mit seinem Fokus auf das Umformen von Termen zurück (Malle 1993, S. 2). Der Schluss mag heutzutage etwas zu kurz geraten erscheinen, doch seine Forderung nach einem am Verstehen orientierten Mathematikunterricht, der die Schülerinnen und Schüler zum (abstrakten) Handeln mit Termen befähigt, hat Bestand.

Darstellungswechsel zum Aufbau von Grundvorstellungen

Rudolf vom Hofe weist auf die Bedeutung des Darstellungswechsels zwischen der formalen Schreibweise (z.B. Term oder Gleichung), der Beschreibung mit Worten (bezogen auf den außermathematischen Sachzusammenhang oder innermathematisch, d. h. losgelöst vom Anwendungskontext) und einer grafischen Darstellung (z. B. Funktionsgraph im Koordinatensystem) für den Aufbau einer tragfähigen Grundvorstellung als Brücke zwischen den individuellen Vorstellungen und einer konsolidierten Mathematik hin (vom Hofe 1992).

Eine besondere Rolle spielt dabei der Diskurs im Unterricht. Aus dem Unterricht heraus müssen Sprechanlässe geschaffen und durch die Lehrkraft bzw. zunehmend auch durch Mitschülerinnen und Mitschüler muss eine Kultur einer angemessenen Sprache geschaffen werden. Bei der Beschreibung von Zusammenhängen sollte mit der Lerngruppe um Worte und deren genaue Bedeutung gerungen werden, um Missverständnisse zu vermeiden und um ein Gefühl für präzise Aussagen zu erreichen. Gelungene Formulierungen sind hervorzuheben und beim Erlernen haben sich sprachliche Hilfsgerüste als besonders wirksam erwiesen. Wie das im Unterricht erreicht werden kann, wurde in einem Projekt im Rahmen des Vorhabens SINUS.NRW untersucht und unterrichtspraktisch erprobt. Der entsprechende Beitrag über einen sprachsensiblen

3 https://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/material/view/5051
4 ergänzend zum Thema Gleichungen: Barzel & Holzäpfel (2011)

Mathematikunterricht (Isselbächer-Giese, Witzmann und Königs vor. 2018)[5] erscheint in Kürze in der Publikationsreihe der Qualitäts- und UntersützungsAgentur – Landesinstitut für Schule – NRW (Impulse für einen verstehensorientierten Unterricht vor. 2018). Der Beitrag verweist auf mehrere Videos, die z. B. für fachschaftsinterne Fortbildungen genutzt werden können und im Netz zum Download verfügbar sind.[6]

Oben wurde bereits auf die Bedeutung von Darstellungswechseln zur Lösung von Fragen im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen hingewiesen. Die Vorstellung linearer Gleichungen und Gleichungssyteme als Geraden im Koordinatensystem bilden ein tragfähiges und erweiterbares Konzept (z. B. erweiterbar auf die dritte Dimension: Lage von Geraden im Raum), welches aber eng mit den formalen und sprachlichen Ebenen verknüpft werden muss. Lineare Gleichungssysteme sind bis zum Ende der Sekundarstufe I in der Regel auf zwei Unbekannte beschränkt. Daher gibt es grafisch anschaulich bei einem linearen Gleichungssystem lediglich drei unterschiedliche Situationen (Abbildung 2):

- die beiden Geraden schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt,
- die beiden Geraden sind (echt) parallel zueinander oder
- die beiden Geraden sind deckungsgleich.

Diese drei Situationen kann man sich an einem einfachen Anwendungskontext einprägsam vergegenwärtigen, der zu einer Konsolidierung des Zusammenhangs zwischen linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten und der Lagebeziehung von zwei Geraden im zweidimensionalen Raum beitragen kann.

Familie Meier macht Urlaub. Gemeinsam beginnt sie um 10:00 Uhr mit einer 15 km langen Wanderung. Pro Stunde legt sie durchschnittlich 3 km Strecke zurück.

a) Ordne den folgenden Situationen jeweils eine Abbildung (Zeit-Weg-Diagramm) zu und begründe deine Entscheidung.

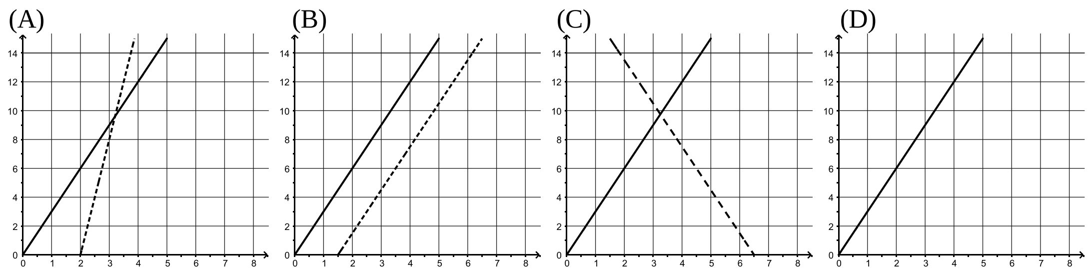
1. Herr und Frau Meier gehen gemeinsam.

2. Um 12:00 Uhr beginnt Herr Sommer mit seinem Lauftraining auf dem gleichen Weg.

3. Familie Berger startet auf dem Weg um 11:30 Uhr und geht ebenfalls 3 km pro Stunde.

b) Stelle geeignete Fragen, die du mit mithilfe der Abbildungen beantworten kannst.

c) Stelle zu jeder Abbildung ein Gleichungssystem auf und löse dieses. Was fällt dir auf? Beschreibe den Zusammenhang und begründe diesen.



d) Einer der Abbildungen kann keine der Situationen zugeordnet werden. Begründe warum nicht!

e) Finde eine geeignete Situation zu diesem Graphen, der mit der Geschichte zusammenhängt.

---

5 http://www.sinus.nrw.de/sinus/front_content.php?idcat=2890
6 http://www.sinus.nrw.de/sinus/front_content.php?idcat=4352

Abbildung 2: Anschauliche Vorstellung zu linearen Gleichungssystemen

Verständiger Umgang mit der Formelsammlung

Im Zusammenhang mit einem verständigen Umgang mit Termen und Variablen kann auch eine verständige Nutzung einer Formelsammlung durchaus beitragen. In einer vom Landesinstitut überarbeiteten Fassung der im Netz bereitgestellten Formelsammlung[7] wurde darauf Wert gelegt, Sprache, Abbildungen und formale Schreibweise stärker miteinander zu vernetzen.

In der überarbeiteten Version (vgl. Abbildung 3) wird der Zylinder, ebenso wie alle anderen Körper, erneut durch ein Schrägbild und zusätzlich durch das Netz des Körpers veranschaulicht. Die in der Zeichnung verwendeten Formelzeichen werden so in Bezug zu den Fachbegriffen gesetzt, dass deren Bedeutung auch in anderen Sachzusammenhängen zugänglich wird (z. B. *Grundfläche:* $G = \pi \cdot r^2$). Körperhöhen werden durchgehend mit h_K gekennzeichnet, um das häufig beobachtete Verwechseln unterschiedlicher Höhen z. B. im Dreiecksprisma zu verringern. Erfahrungen aus dem Unterricht weisen darauf hin, dass der Einsatz von Indizes durchaus auch von den leistungsschwächeren Lernenden erfolgreich angewendet wird.

Zylinder

Grundfläche (Kreis):	$G = \pi \cdot r^2$
Höhe des Körpers:	h_K
Umfang der Grundfläche:	$u = 2 \cdot \pi \cdot r$
Volumen:	$V = G \cdot h_K$
Mantelfläche:	$M = u \cdot h_K$
Oberfläche:	$O = 2 \cdot G + M$

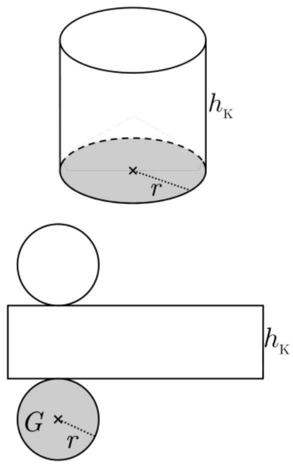


Abbildung 3: Ausschnitt aus der neuen Formelsammlung

Außer beim Würfel und Quader werden bei allen Körpern jeweils die Volumen-, die Mantelflächen- und die Oberflächenformeln angegeben. Die für die Berechnung von Volumen, Mantel- und Oberfläche von Körpern relevanten Strukturen werden den Schülerinnen und Schülern transparent gemacht, indem die auf das Wesentliche reduzierten Formeln diese Strukturen explizit ausweisen und in einen Zusammenhang mit der grafischen Darstellung sowie den Fachbegriffen stellen.

Am Beispiel der Oberfläche ist zu erkennen, dass bei allen Prismen die Oberfläche als Summe aus der doppelten Grundfläche und der Mantelfläche berechnet wird: $O = 2 \cdot G + M$. Die Schülerinnen und Schüler müssen allerdings die jeweilige Grundfläche des Körpers identifizieren und ggf. der Formelsammlung die entsprechende Formel aus dem Bereich „Ebene Figuren“ entnehmen.

---

[7] https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/zentrale-pruefungen-10/faecher/fach.php?fach=41, für die ZP10 zugelassen ab dem Jahr 2019

Das bei der Volumenberechnung stets wiederkehrende Prinzip der Berechnung aus Grundfläche und Höhe lässt sich aus dem gut nachvollziehbaren Beispiel des Prismas auf andere Körper mit einfacher Volumenformel $V = G \cdot h_{\mathrm{K}}$ ableiten: Lediglich die Grundflächen unterscheiden sich in ihrer Form. Der jeweilige Flächeninhalt der Grundfläche muss mithilfe der Formeln im Bereich „Ebene Figuren“ bestimmt werden.

Durch diese verständnisfördernde Darstellungsweise unterstützt die neue Formelsammlung auch das Erschließen von Zusammenhängen im Lernprozess. Daraus soll sich eine Vertrautheit und Sicherheit im Umgang mit der Formelsammlung auch in Prüfungssituationen ergeben. Die Anregungen zur Überarbeitung der Formelsammlung sind im Rahmen des Vorhabens SINUS.NRW „Alltag in Grundkursen? – Kompetenzerwerb im Fach Mathematik für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler“ entstanden. In der abschließenden Veröffentlichung (Bresinsky, et al. vor. 2018) sind im Abschnitt *Hilfsmittel Formelsammlung*[8] viele Anregungen zum verständnisorientierten Umgang mit der Formelsammlung zusammengefasst.

[8] https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idcat=2891

3. Anhang: Datengrundlage

Die Beobachtungen stützen sich auf folgende Daten, die in jedem Jahr für die beiden Abschlussniveaus (HSA, MSA) erhoben werden:

3.1 Stichprobe 1

Ca. 30 Schulen der am Prüfungsverfahren beteiligten Schulformen werden gebeten, die für jede Teilaufgabe vergebenen Rohpunkte für jeweils eine Lerngruppe zurückzumelden. Die 30 Schulen werden so ausgewählt, dass sie weitgehend repräsentativ für die Schulen der jeweiligen Schulform im Land Nordrhein-Westfalen sind. Die Gesamtheit der Schülerinnen und Schüler, für die diese Daten vorliegen, wird im Bericht als *Stichprobe 1* bezeichnet. Im Bericht wird schulformübergreifend nach den beiden Abschlüssen differenziert:

- Hauptschulabschluss nach Klasse 10 (HSA): Hauptschulen Klasse 10 Typ A, Gesamtschule Grundkurs
- Mittlerer Schulabschluss (MSA): Hauptschulen Klasse 10 Typ B, Gesamtschule Erweiterungskurs, Realschule

Ausschöpfungsquote (Definition)

Aus der Stichprobe 1 lässt sich für jede Teilaufgabe u. a. die sogenannte *Ausschöpfungsquote* berechnen.

Die Ausschöpfungsquote ist der prozentuale Anteil an der maximal erreichbaren Punktzahl, den Schülerinnen und Schüler in der Klausur im Mittel erzielt haben. Eine Ausschöpfungsquote von 50 % bedeutet also, dass Schülerinnen und Schüler im Mittel die Hälfte der erreichbaren Punkte erzielt haben.

3.2 Stichprobe 2

Um tiefer gehende Erkenntnisse zu gewinnen, werden die Schulen über die Dateneingabe hinaus gebeten, anonymisiert jeweils drei Klausuren (eine im oberen, eine im mittleren und eine im unteren Leistungsspektrum) zu kopieren und der Qualitäts- und UnterstützungsAgentur – Landesinstitut für Schule (QUA-LiS) zur Verfügung zu stellen. Die Gesamtheit der Schülerinnen und Schüler, deren Klausur vorliegt, wird im Bericht als *Stichprobe 2* bezeichnet. Über die Repräsentativität dieser Stichprobe kann nichts ausgesagt werden, da die Auswahl den Schulen obliegt. Dennoch lassen sich aus den Prüfungsarbeiten bei vorsichtiger Deutung der Befunde Erkenntnisse gewinnen, die von allgemeiner Bedeutung sind.

4. Literaturverzeichnis

Barzel, Bärbel, und Lars Holzäpfel. „Algebra - Strukturen erkennen und nutzen." *mathematik lehren*, 2017.

Blomberg, Judith. *Aufbau eines nachhaltigen Term- und Variablenkonzepts - Ergänzungen zum schulinternen Lehrplan G8.* QUA-LiS.NRW. 20. Januar 2016. https://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/material/view/5051 (Zugriff am 9. März 2018).

Bresinsky, Dirk, Jeanette Fuhrmann, Johannes Gerdiken, Klara Kolcov, und Annette Veit. „Alltag in Grundkursen der SI? – Kompetenzerwerb im Fach Mathematik für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler." In *Sinus.NRW - Impulse für einen verstehensorientierten Unterricht*, Herausgeber: QUA-LiS.NRW. Münster: Waxmann-Verlag, vor. 2018.

Holzäpfel, Lars, und Bärbel Barzel. „Gleichungen verstehen." *mathematik lehren*, Dezember 2011: 2 - 7.

Isselbächer-Giese, Annette, Cornelia Witzmann, und Charlotte Königs. „Sprachförderung im Fach Mathematik in der Sekundarstufe I." In *Sinus.NRW - Impulse für einen verstehensorientierten Unterricht*, Herausgeber: QUA-LiS NRW. Münster: Waxmann Verlag, vor. 2018.

Malle, Günther. *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Herausgeber: Erich Christian Wittmann. Wiesbaden: SpringerVieweg, 1993.

Ministerium für Schule und Weiterbildung. „Analysen und Hinweise zur Bearbeitung ausgewählter Aufgaben der Zentralen Prüfungen 10 Mathematik auf der Grundlage der Ergebnisrückmeldung 2010 bis 2012." Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW, Soest, 2013.

QUA-LiS.NRW, Hrsg. *Sinus.NRW - Impulse für einen verstehensorientierten Unterricht.* Münster: Waxmann-Verlag, vor. 2018.

vom Hofe, Rudolf. „Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell." *Journal für Mathematik-Didaktik*, Dezember 1992: 345 - 364.