Fachdidaktische Rückmeldung zu den zentralen Prüfungen am Ende der Klasse 10 (ZP10) im Fach Mathematik

Prüfungsjahrgang 2019

QUA-LiS NRW Arbeitsbereich 5

Qualitäts- und UnterstützungsAgentur – Landesinstitut für Schule

Autoren: Natascha Besuch, Dr. Joachim Roß

Herausgegeben von der
Qualitäts- und UnterstützungsAgentur –
Landesinstitut für Schule
des Landes Nordrhein-Westfalen (QUA-LiS NRW)
Paradieser Weg 64, 59494 Soest
März 2020

Sehr geehrte Kollegin,
sehr geehrter Kollege,

der Hauptschulabschluss am Ende der Klasse 10 (HSA) sowie der mittlere Schulabschluss (MSA) werden in NRW in einem Vergabeverfahren mit zentralen Klausuren in den Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik vergeben. In dieser vierten fachdidaktischen Rückmeldung zu den Prüfungen werden erneut Bearbeitungsergebnisse der Schülerinnen und Schüler zu ausgewählten Teilaufgaben der Prüfungsklausuren für den Hauptschulabschluss nach Klasse 10 und den mittleren Schulabschluss analysiert und kommentiert.[1]

Schwerpunktthema der diesjährigen fachdidaktischen Rückmeldung ist das mathematische Argumentieren und Begründen, ausgehend von Prüfungssituationen. Dieser für das Verstehen und Begreifen mathematisch-logischer Zusammenhänge wichtige Bereich bildet zudem die Grundlage für logisches Schließen in anderen Zusammenhängen und stellt damit einen Grundpfeiler zum Erreichen der gesellschaftlich orientierten Bildungsziele aus mathematischer Sicht dar.

Ausgehend von den diesjährigen Prüfungsaufgaben werden anhand der Schülerbearbeitungen und deren Bewertungen wesentliche Schritte des mathematischen Argumentierens und Begründens illustriert und mit Hinweisen und Beispielen für einen gezielten Kompetenzaufbau im Unterricht ergänzt.

Grundlage der Analyse bilden die von den Schulen rückgemeldeten Daten zu den Prüfungsergebnissen. Ausführliche Informationen hierzu finden Sie im Anhang. Die rückgemeldeten Daten sowie die Einsicht in die Schülerbearbeitungen bieten eine sehr gute Möglichkeit, die Prüfungsergebnisse auszuwerten: Welche Aufgaben konnten die Schülerinnen und Schüler gut lösen? Wo hatten sie Schwierigkeiten? Wie können die Aufgaben in zukünftigen Prüfungsjahren weiter verbessert werden? Welche Erkenntnisse und Anregungen für den Unterricht lassen sich daraus ableiten?

Wir möchten bei dieser Gelegenheit allen Lehrerinnen und Lehrern danken, die mit der diesjährigen Ergebnisrückmeldung befasst waren. Der mit diesen Rückmeldungen in der ohnehin turbulenten Zeit am Schuljahresende verbundene Aufwand ist uns durchaus bewusst.

Natascha Besuch und Joachim Roß

Wir freuen uns über Ihre Hinweise und Fragen. Bitte schreiben Sie an

pruefungen10@qua-lis.nrw.de.

---

[1] Für das Fach Mathematik wurde zusätzlich bereits im Oktober 2013 ein ausführlicher Evaluationsbericht zu den zentralen Prüfungen veröffentlicht, in dem auf der Grundlage ausgewerteter Prüfungsergebnisse und Schülerlösungen Hinweise und Anregungen für den Unterricht abgeleitet wurden: „Analysen und Hinweise zur Bearbeitung ausgewählter Aufgaben der Zentralen Prüfungen 10 Mathematik auf der Grundlage der Ergebnisrückmeldung 2010 – 2012“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung 2013).
Im geschützten Bereich zum Herunterladen: https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/zp10/

Inhaltsverzeichnis

1 Ergebnisse der diesjährigen Prüfungen im Fach Mathematik im Überblick

Die empirische Auswertung der zurückgemeldeten Ergebnisse für die diesjährigen Prüfungen weist keine auffälligen Unterschiede zu den Ergebnissen der vergangenen Jahre aus. Die mittleren Prüfungsnoten variieren in beiden Abschlüssen jeweils etwa um eine halbe Notenstufe gegenüber dem langjährigen Mittelwert. Wie in den Vorjahren zeigt sich auch in diesem Jahr, dass die von den Schulen vergebenen Vornoten in der deutlichen Mehrheit der Fälle mit der Abschlussnote übereinstimmen. Weicht die Abschlussnote von der Vornote ab, so in der Regel um eine Notenstufe. Abweichungen der Abschlussnote um mehr als eine Notenstufe betreffen weniger als 1 Promille der Fälle. Die zentralen Prüfungen haben daher einen moderaten Einfluss auf die Noten und das Erreichen der gewünschten Abschlüsse.

1.1 Hauptschulabschluss (2019)

Das langjährige Mittel aller Prüfungsnoten auf dem Abschlussniveau des HSA liegt bei etwa 3,7. In diesem Jahr weichen die Prüfungsnoten davon leicht nach oben ab (2019: 3,4; 2018: 4,0; 2017: 3,9; 2016: 3,3).[2] Weiterhin ist der Anteil der Schülerinnen und Schüler, die keine ausreichende Prüfungsleistung erreichen, mit etwa 25 % aller Prüflinge groß. Die Abweichungen zwischen Vornote und Prüfungsnote erfolgen gleichermaßen in beide Richtungen, wobei etwa 90 % der Schülerinnen und Schüler lediglich maximal um eine Notenstufe abweichen.

Wie auch im vergangenen Jahr konnten die Schülerinnen und Schüler im ersten Prüfungsteil zu Basiskompetenzen erwartungsgemäß ca. 55 % der möglichen Rohpunkte erreichen.[3] Das Ziel des Unterrichts sollte sein, dass nahezu alle Prüflinge den ersten Prüfungsteil weitgehend vollständig absolvieren, da in diesem Prüfungsteil mathematische Basiskompetenzen gefordert werden.

> *Basiskompetenzen sind „mathematische Kompetenzen, über die alle Schülerinnen und Schüler aller Bildungsgänge am Ende der allgemeinen Schulpflicht mindestens und dauerhaft verfügen müssen. Sie sind Voraussetzungen für eine eigenständige Bewältigung von Alltagssituationen und aktive Teilhabe als mündige Bürgerinnen und Bürger am gesellschaftlichen und kulturellen Leben. Sie sind ebenso Voraussetzungen für einen Erfolg versprechenden Beginn einer Berufsausbildung und die Ausübung beruflicher Tätigkeiten."*

(Drueke-Noe et al., 2011, S. 8)

Im Gegensatz zum Vorjahr haben die Schülerinnen und Schüler auch im zweiten Prüfungsteil im Mittel mehr Rohpunkte insbesondere bei einfacheren Teilaufgaben erreicht. Dies steht im Einklang mit der landesweiten Vollerhebung der Prüfungsnoten, deren Mittelwert bei 3,4 liegt.

Anhand eingereichter Bearbeitungen und den zugehörigen Daten der Bewertung gelingt es, die Stärken des Unterrichts bei den Schülerinnen und Schülern herauszustellen und zugleich aufzuzeigen, an welchen Stellen weitere Entwicklungen notwendig sind.

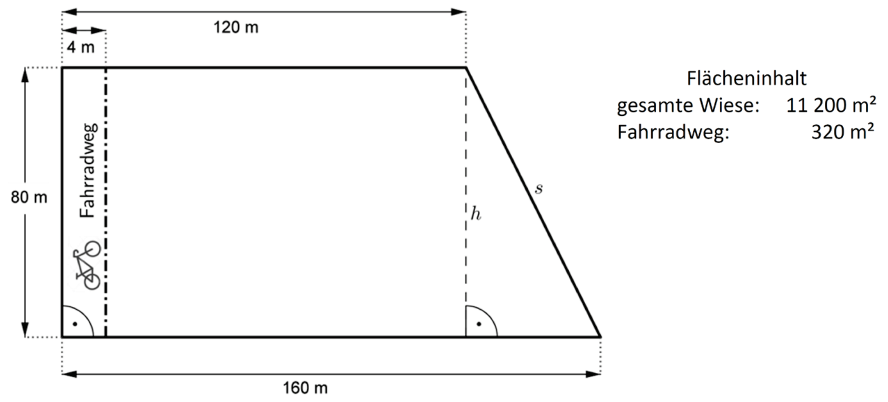
---

[2] Die Ergebnisse der schriftlichen Prüfung im Fach Mathematik unterliegen von Jahr zu Jahr etwas größeren Schwankungen als die mittleren Prüfungsnoten anderer Fächer. Im Allgemeinen werden Abweichungen der mittleren Prüfungsnoten von einer halben Ziffernnote zwischen zwei Prüfungsjahrgängen als statistisch nicht auffällig interpretiert.

[3] Grundlage sind die Ergebnisse der Stichprobe 1 (vgl. Anhang: Datengrundlage).

Das direkte Berechnen des Volumens geometrischer Grundkörper gelingt nahezu allen Prüflingen. Ebenso gelingt es weitgehend einfache Aufgaben zur Addition im Zahlenraum ganzer Zahlen zu lösen, Durchschnittswerte zu berechnen oder Grundaufgaben zur Wahrscheinlichkeit zu lösen, auch wenn hier bereits häufiger Fehler zu beobachten sind. Ein großer Handlungsbedarf besteht aber weiterhin bei dem Grundverständnis von Variablen und Termen sowie dem Umgang mit diesen. Das Zusammenfassen eines einfachen Terms gelingt nur sehr wenigen Schülerinnen und Schülern: weniger als 10 % erhalten hierbei die volle Punktzahl.

Während im ersten Prüfungsteil die Volumenberechnung nahezu von fast allen Prüflingen gelöst wurde, können die geometrischen Aufgaben im Kontext lediglich zu 60 % ausgeschöpft werden, d.h. im Durchschnitt werden lediglich 60 % der Rohpunkte dieser Teilaufgabe erreicht. Komplexere Teilaufgaben, bei denen die Zusammenhänge erst erkannt werden müssen (z.B. Aufgabe II.2d – Fahrradweg, Berechnen der Seitenlänge eines Trapezes) gelingt weniger als einem Drittel der Prüflinge vollständig; mehr als 50 % erhalten null Punkte.



d) Zeige mithilfe einer Rechnung, dass die Seite s ungefähr 89,4 m lang ist.

Abbildung 1: ZP10-Aufgabe Mathematik 2019, HSA II.2d: im Mittel werden 1,1 von 3 Rohpunkten (Bewertungspunkten) erreicht

Das entnehmen von Werten aus Tabellen und grafischen Darstellungen und deren Verarbeitung gelingt den Schülerinnen und Schülern (II.1c und d, II.3b und d). Direkt proportionale Zusammenhänge werden in der Regel ebenfalls gut erfasst und die Lösung der dargebotenen Problemstellungen gelingt weitgehend. Schwierigkeiten bereiten aber prozentuale Darstellungen und Zusammenhänge. Das Treffen einer begründeten Entscheidung auf Grundlage der vorher zusammengestellten Informationen gelingt nur wenigen Schülerinnen und Schülern.

1.2 Mittlerer Schulabschluss (2019)

In den Prüfungen auf der Anforderungsebene des mittleren Schulabschlusses liegen die Prüfungsnoten im mittleren befriedigenden Bereich (2019: 3,3; 2018: 3,5; 2017: 3,3; 2016: 3,6). Die im ersten Prüfungsteil gestellten kontextfreien Aufgaben oder Aufgaben mit geringem Kontextanteil werden von den Schülerinnen und Schülern in der Regel zufriedenstellend bewältigt, im Mittel wurden ca. 60 % der Punkte erreicht. Besonders hervorzuheben ist aus unserer Sicht, dass seit 2018 in vielen Teilaufgaben des ersten Prüfungsteils die Ausschöpfungsquote mehr als 70 % beträgt. Die Schülerinnen und Schüler können in der Regel Zahlen in unterschiedlichen Darstellungen vergleichen, direkt zugängliche Berechnungen an ebenen Figuren vornehmen und einfache geometrische Zusammenhänge erfassen und zur Berechnung nutzen sowie im Rahmen der Tabellenkalkulation richtige Formeln zuordnen und Abhängigkeiten aufzeigen. Weiterhin fällt es den Prüflingen schwerer, einfache lineare Gleichungssysteme zu lösen (z.B. Aufgabe I.5). Überraschend wenigen Schülerinnen und Schülern gelingt das Ablesen der Verschiebung einer Normalparabel in y-Richtung (Aufgabe I.3a, Abbildung 2) und folglich wird auch der Bereich für den Parameter nicht erfasst (Aufgabe I.3b). Verschiebungen einer Parabel entlang der y-Achse zu erfassen und zu systematisieren, fällt aber sicherlich in den Bereich grundlegender Kompetenzen und ist Voraussetzung für das Modellieren mit dieser Funktionsklasse und darauf aufbauender Funktionsklassen.

Aufgabe 3

Isabelle zeichnet mit einer Geometriesoftware den Graphen f einer quadratischen Funktion mit: $f(x) = x^2 + c$. Sie erstellt einen Schieberegler, mit dem sie den Wert für c verändern kann.

a) Der Schieberegler zeigt den Wert für c nicht an. Gib den Wert für c an.

b) Für welche Werte von c verläuft der Graph f vollständig oberhalb der x-Achse? Gib den Bereich für c an.

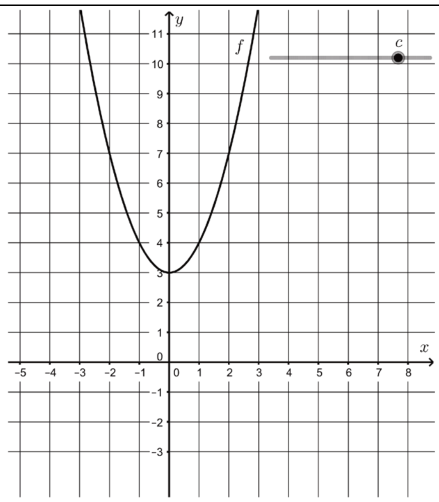


Abbildung 2: ZP10 Mathematik 2019, MSA Aufgabe I.3: Teilaufgabe a) wird lediglich von der Hälfte der Prüflinge gelöst, Teilaufgabe b) von deutlich weniger.

Die Ausschöpfungsquoten der Aufgaben aus dem zweiten Prüfungsteil sind erwartungsgemäß im Mittel etwas geringer als im ersten Prüfungsteil. Neben dem Bezug zu Sachkontexten werden in diesem Prüfungsteil auch Aufgaben mit einem höheren kognitiven (mathematischen) Anspruch bearbeitet.

Es gelingt den Prüflingen wiederholt gut, einfache stochastische Aufgaben bis zur zweiten Stufe zu lösen (II.1d und II.1e), Berechnungen an geometrischen Grundkörpern und ebenen Figuren durchzuführen (II.1a und II.2a) sowie Anzahlen aus Mustern zu erkennen (II.3a) und/oder mithilfe von gegebenen Termen vorwärts zu berechnen (II.2e und II.3b). Das Erfassen des exponentiellen Wachstums gelingt, jedoch fällt es den Schülerinnen und Schülern deutlich schwerer, den Zusammenhang zum Modell zu erläutern oder die Grenzen des Modells zu begründen (II.2d und II.2f). Auch die Entscheidung, ob ein gegebenes mathematisches Modell geeignet ist, fällt im Rahmen der Kaugummikugeln ebenfalls nicht leicht (II.1c) – die Aufgabe wird von weniger als der Hälfte der Prüflinge gelöst.

Der Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen ist weiterhin nicht zufriedenstellend. Wie auch in den vergangenen fachdidaktischen Rückmeldungen bereits dargestellt, werden Aufgaben, die ein Operieren mit Termen und Gleichungen erfordern, nicht oder nur mit Mängeln gelöst. Dabei ist auffällig, dass weder das Lösen eines einfachen Gleichungssystems noch grundlegende Termumformungen sicher gelingen. Weiterhin ist in den Schülerbearbeitungen erkennbar, dass zentrale Vorstellungen zu Termen und Variablen nicht oder nicht ausreichend aufgebaut sind – das Operieren mit Termen und Gleichungen baut darauf auf. Folglich ist es nicht verwunderlich, dass auch das Übersetzen von Situationsmodellen in eine Sprache mit Variablen nicht gelingt.

2 Argumentieren, Begründen und Beweisen

Im Mathematikunterricht spielen einige Kompetenzen eine Rolle, die konzeptionell recht eng beieinander liegen und sich darüber hinaus in ihrer didaktischen Bedeutung vom wissenschaftlichen Gebrauch unterscheiden. Dazu gehören u.a. Argumentieren, Begründen und Beweisen.

In der Mathematik-Wissenschaft werden in Publikationen strenge mathematische Beweise akzeptiert. Ein strenger mathematischer Beweis eines Satzes beruht auf Axiomen und nutzt ausschließlich vorab bewiesene Lemmata und Sätze. Alle Deduktionsschritte entsprechen vereinbarten Schlussregeln; sie sind streng logisch und erfolgen idealerweise unter dem Ausschluss jeglicher Anschauung. Jedoch „besteht ein weitgehender Konsens darüber, dass sich ein axiomatisch-deduktives Vorgehen im allgemeinbildenden Mathematikunterricht verbietet. Vom Beweisen bleibt dann der Anspruch übrig, dass Aussagen auf Gründe zurückgeführt werden sollen.“ (Jahnke & Ufer, 2015, S. 333)

Die Kernlehrpläne in NRW verstehen daher unter einem schulisch angemessenen Beweis die folgende sinnvolle Festlegung:

> *„Eine Begründung auf Grund einer vorgegebenen Argumentationsbasis soll als Beweis bezüglich dieser Argumentationsbasis bezeichnet werden.“*

(Fischer und Malle zitiert nach Jahnke & Ufer, 2015, S. 334)

Mathematisches Begründen einer These oder einer Behauptung ist immer an eine Argumentationsbasis, also die gegebenen Bedingungen, und an bestimmte zugelassene Schlussweisen (Schlussregeln) gebunden. Schlussregeln zeigen an, dass der Schritt von der Argumentationsbasis auf die Behauptung oder These zulässig ist. Jene sind, wie auch in der universitären Mathematik, getroffene Vereinbarungen, die z.T. auch auf sozialen Zusammenhängen beruhen (vgl. Bruder & Pinkernell, 2011). Die Anzahl zulässiger Schlussweisen im Mathematikunterricht ist nach Bruder und Pinkernell begrenzt auf

- Begründen durch Identifizieren/Realisieren eines Begriffs,
- Begründen durch Identifizieren/Realisieren eines Verfahrens oder Satzes und
- Schluss der Kontraposition bzw. Widerlegung durch Gegenbeispiel.

2.1 Argumentieren lernen

Der Mathematikunterricht bietet mit seiner eng abgegrenzten Argumentationsstruktur gute Lerngelegenheiten, das logische Argumentieren zu üben und zugleich erste Einblicke in mathematische Arbeitsweisen zu erhalten. Ziel des Argumentierens ist es nicht nur, andere (z.B. Mitschülerinnen und Mitschüler) von (allgemeingültigen) Zusammenhängen zu überzeugen, so dass die Schlussweisen auf Grundlage der Argumentationsbasis unerschütterlich sind, sondern auch Zusammenhänge mit Begründungen zu erklären, um diese zu verstehen (vgl. Gotwals & Songer, 2009, S. 263). Mit der zunehmenden Zahl manipulierender Meldungen[4] in den Medien ist es umso wichtiger, dass Schülerinnen und Schüler mit logischen Argumenten arbeiten können und insbesondere fehlerhafte oder lückenhafte Argumentationen erkennen können. Auch sind kognitiv anspruchsvollere Aufgaben und Problemstellungen, also Aufgaben, die nicht durch direktes

[4] In politisch motivierten Zusammenhängen wird verharmlosend von „fake-news“ gesprochen.

Abarbeiten eines Algorithmus gelöst werden können, ohne Argumentationsprozesse nicht zu bearbeiten.

> *„In real life, to solve actual problems, we are obliged to proceed by approximations, by arithmetic procedures that give successively better approximations“ (Pólya & Bowden, 1977, S. 44)*

Bei der Auswahl der Lerngelegenheiten ist zu beachten, welche Grundvorstellungen bzw. erweiterten Grundvorstellungen thematisiert werden, und diese insbesondere mit Blick darauf, welchen dieser Vorstellungen eine besondere mathematische Bedeutung zukommt. Durch das Argumentieren im vereinbarten Rahmen und in abgeschlossenen Situationen entsteht durch die Kommunikation darüber ein gemeinsam geknüpftes Netz des Wissens, das von den Lernenden und Lehrenden gleichsam getragen wird.

Für die Vorbereitung des Unterrichts findet man in schulmathematischen Foren oder auch in Schulbüchern eine Vielzahl von Anregungen, mit denen Zusammenhänge von den Schülerinnen und Schülern selbstständig bearbeitet werden können. Durch Handlungen, die auch durch interaktive Lernumgebungen digital umgesetzt sein können, wird das Begreifen der Zusammenhänge einfacher. Auch das Erklären stellt einen wesentlichen Schritt zum Verstehen mathematischer Zusammenhänge dar. Dies muss bereits an einfachen, grundlegenden Zusammenhängen gelernt werden, damit deutlich wird, was geeignete Begründungen ausmacht, und um zu trainieren, dass sich in der Sprache angemessene Argumentationsstrukturen ausbilden können (vgl. Wagner & Wörn, 2011).

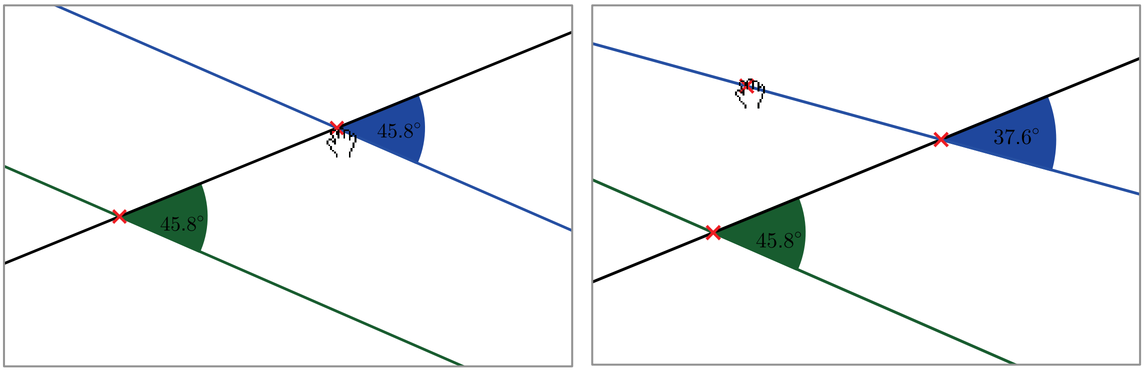


Abbildung 3: Interaktive Visualisierung des Stufenwinkelsatzes: Die Lage der Geraden kann verschoben werden (links). Durch einen Schalter kann die Eigenschaft der Geraden verändert werden (rechts), so dass diese nicht mehr parallel zueinander sind.

Am Beispiel der Beobachtungen von Stufenwinkeln an sich kreuzenden Geraden (Abbildung 3) folgt die These: „Die Stufenwinkel sind gleich groß, wenn die beiden Geraden parallel zueinander sind.“ Diese Beobachtungen stellen aber noch keinen Beweis dar, sondern liefern nur Evidenzen für einen Zusammenhang.

Mathematisches Argumentieren unterscheidet sich hier von Argumentationen im Alltag: viele beobachtete Winkeleinstellungen stärken zwar die These, letztendlich ist der Schluss aber nicht einwandfrei, weitere logische Argumente müssen herangezogen werden. Was unterscheidet aber eine Argumentation von einem Beweis? Im Wesentlichen ist es der Grad der dargestellten Verallgemeinerung und das lückenlose Darstellen aller Schritte. Anschaulich ist die Vielfalt an Begründungsformen von Meyer & Prediger (2009) zur Gauß’schen Summenformel dargestellt: Ausgehend von einer Begründung an einem speziellen Beispiel werden insgesamt sechs verschiedene Begründungen bis zu einer vollständigen Induktion dargestellt. Meyer und Prediger zitieren den immer noch gültigen Schluss von Manin (1977):

> *„Ein Beweis wird erst dann zum Beweis, wenn er in einem sozialen Akt als solcher akzeptiert wird.“*

Präformale Beweise[5] sind nach der Definition für schulische Zwecke hinreichend, wenn diese auf allgemein anerkannte Zusammenhänge zurückgeführt werden.

Im Beispiel der Abbildung 3 kann die untere (grüne) Gerade zusammen mit dem Winkel durch eine Parallelverschiebung in Deckung mit der oberen (blauen) Geraden gebracht werden. Da eine Verschiebung Winkel und Längen erhält, ist dies ein Beweis, durch Rückführung auf (aus der Unterstufe) bekannte Zusammenhänge. Erneut kann bei dem Beweis eine vorbereitete digitale Lernumgebung helfen (Abbildung 4),[6] zusätzlich darf aber sowohl auf eine Verbalisierung als auch auf eine schriftliche Fixierung des Beweises nicht verzichtet werden. Weiterhin ist es sinnvoll, die angewandte Strategie ebenfalls zu reflektieren und in geeigneter Form festzuhalten. Dadurch kann auch auf die angewandte Problemlösestrategie („Verschiebungen erhalten Winkel“) in neuen Zusammenhängen besser zurückgegriffen werden.

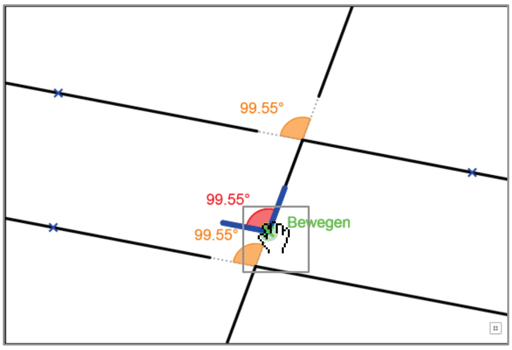


Abbildung 4: (Anschauliches) Verschieben des Winkels liefert den logischen Schluss, da eine Verschiebung Winkelgrößen erhält.

Gerade das mathematische Beweisen im Sinne der Definition, also dem Begründen durch eine Rückführung auf (aus dem Unterricht) bekannte Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge, ist eine wesentliche Eigenschaft, die von der Mathematik auf alle Bereiche des Begründens zu übertragen ist.

In Prüfungskontexten sind jedoch nicht alle Aspekte eines Beweises sinnvoll überprüfbar.

2.2 Argumentieren in Prüfungssituationen

In derzeitig akzeptierten Prüfungsformaten ist es schwer möglich, eigenständige mathematische Beweise zu führen, wenn dafür problemlösende Anteile benötigt werden. Dies verschärft sich in zentralen Prüfungen, die unabhängig von erfahrenem Unterricht Bestand haben müssen. Plant man

[5] Präformale Beweise kommen ohne die formale Sprache der Mathematik aus. Unterschieden werden dabei inhaltlich anschauliche Beweise und handlungsbezogene Beweise. Für letztere gilt: „Ein solcher besteht […] kurz gesagt aus gewissen konkreten Handlungen (zuerst wirklich ausgeführt, dann nur vorgestellt), die korrekten mathematischen Argumenten entsprechen. Hierbei sind sowohl die Prämissen als auch die Schlüsse enaktiv dargestellt, so dass man auch von einer enaktiven Repräsentation eines formal-exakten Beweises sprechen kann.“ Blum und Kirsch (1989, S. 203)

[6] Vgl. z.B. https://www.geogebra.org/m/NRyZH3VV#material/Pd874rGr

aber die heuristische Schwierigkeit *a priori* entsprechend, indem die Komplexität der Aufgabe, das Niveau der kognitiven Prozesse und die erforderlichen Kompetenzbereiche angepasst, in der Regel eher eingeschränkt werden, gibt es zahlreiche Möglichkeiten, mathematische Argumentationen auch in Klassenarbeiten oder in zentralen Prüfungen sinnvoll aufzunehmen (vgl. für die Naturwissenschaften auch Trendel & Lübeck, 2018). Sehr wohl können z.B. einfach zugängliche Zusammenhänge begründet werden oder Schlussweisen und Behauptungen auf sachlogische Korrektheit überprüft werden. Die Aufgaben in Prüfungen beschränken sich dabei auf ein oder zwei Fakten bzw. einen Zusammenhang, greifen auf Routineverfahren, z.B. das Lösen von Gleichungen und linearen Gleichungssystemen bzw. grundlegende mathematische Beziehungen zurück, wie z.B. Winkelsätze und Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck. Viele der Prüfungsaufgaben mit argumentativen Anteilen entstammen aus geometrischen Zusammenhängen oder beziehen sich auf erweiterte Grundvorstellungen. Darüber hinaus gibt es aber auch vielfältige weitere Begründungsaufgaben, z.B. in der Arithmetik – angefangen von einfachen Zahlenrätseln hin zu Teilbarkeitsregeln und deren Kombinationen bzw. Behauptungen zur Teilbarkeit. Im Aufgabenbrowser[7] zum Lernstand 8 (und auch schon in VERA 3) stehen vielfältige Aufgaben zur freien Verwendung zur Verfügung, zu denen jeweils eine sehr ausführliche Analyse der Schwierigkeit und möglicher Fehlvorstellungen, der benötigten Leitideen und Kompetenzbereiche gemäß der Bildungsstandards sowie die Einordnung des Anspruchsniveaus vorgenommen wurde (Institut für Schulqualität der Länder Berlin und Brandenburg e.V., 2020). Alle Aufgaben können als bearbeitbare Datei heruntergeladen und weiterverwendet werden.

Widerlegen einer Behauptung

In den diesjährigen Prüfungsaufgaben mit den Anforderungen für den HSA sollten die Prüflinge im Prüfungsteil I die folgende Aufgabe lösen, bei der in Teilaufgabe b) eine Behauptung argumentativ überprüft werden sollte:

Ein Quader hat die Maße $a = 25$ cm, $b = 20$ cm und $c = 70$ cm.

a) Berechne das Volumen des Quaders. Notiere deinen Lösungsweg.

b) Michael behauptet: „Wenn ich die Höhe des Quaders verdopple, vervierfacht sich das Volumen“.

Stimmt diese Behauptung? Begründe.

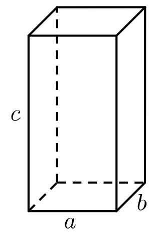


Abbildung 5: ZP10 2019, Mathematik, HSA , Prüfungsteil I, Aufgabe 4

Eine etwas genauere Analyse der Teilaufgabe b) ergibt, dass mehr als die Hälfte der Prüflinge zwei Punkte und gut ein weiteres Fünftel einen Punkt erzielt hat.[8] Doch was sind hierbei akzeptable Beweise im Sinne der o.g. Definition? Welche Schlussregeln sind in diesem Fall anzuwenden, was sollte noch akzeptiert werden und was stellt keinen logischen Schluss dar?

Möglichkeit 1: Begründen gemäß der Strategie „Widerlegen durch ein Gegenbeispiel“

Eine Möglichkeit, die Teilaufgabe HSA I.4b zu lösen, besteht in der Anwendung der Strategie bzw. Schlussregel, eine Behauptung durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen. Dementsprechend ist hier ein direkter Vergleich zweier Volumina eine naheliegende Lösung, zumal das Berechnen eines Volumens den Prüflingen sehr gut gelingt (vgl. Abbildung 6). Analog kann das *Verhältnis* der

[7] www.aufgabenbrowser.de
[8] Datengrundlage ist Stichprobe 1. Erklärungen dazu in Abschnitt 3, Anhang: Datengrundlage

beiden Volumina berechnet und verglichen werden, wodurch ebenfalls durch ein Gegenbeispiel gefolgert werden kann, dass die Behauptung falsch ist.

Vergleiche das Volumen aus a) (V_a) mit dem Volumen mit doppelter Höhe (V_b).
Bereits berechnet: $V_a = 25 \cdot 20 \cdot 70\ \text{cm}^3 = 35\,000\ \text{cm}^3$,
Michael behauptet: $V_b = 4 \cdot V_a = 4 \cdot 35\,000\ \text{cm}^3 = 140\,000\ \text{cm}^3$.
Doppelte Höhe bedeutet: $c =\ 140$ cm, also ist: $V_b = 25 \cdot 20 \cdot 140\ \text{cm}^3 = 70\,000\ \text{cm}^3$,
da $140\,000 \neq 70\,000$ stimmt die Behauptung von Michael nicht.

Abbildung 6: Argumentation zu Aufgabe I.4b durch direkten Vergleich (Widerlegen einer Behauptung durch ein Gegenbeispiel)

Auffallend, aber in Prüfungssituationen durchaus nachvollziehbar, ist, dass viele Lehrkräfte bereits die maximale Punktzahl vergeben, obwohl der Schluss nicht gezogen wurde: Mehrfach wird lediglich das Volumen eines Körpers mit der Höhe $c = 140$ cm berechnet, aber der Vergleich mit der Behauptung wird nicht mehr explizit nachvollzogen. Sicherlich wird auch in der wissenschaftlichen Mathematik darauf verzichtet, jeden Schritt vollkommen streng nachzuweisen – insbesondere dann, wenn dieser offensichtlich ist. Zumindest im Unterricht muss thematisiert werden, was einen gültigen Schluss gemäß den Schlussregeln darstellt und wann eine Begründung angemessen dargestellt worden ist: Schließlich wird mit den o.g. Schlussregeln plausibel gemacht, dass dieser (jeder) Schritt der Argumentation zulässig ist. Sinnvoll wäre es, vollständige und nachvollziehbare Schritte bei Argumentationen auch in mündlichen und schriftlichen Beiträgen im Unterricht einzufordern und entsprechend zu werten.

Möglichkeit 2: Begründen gemäß der Strategie „Realisieren eines Satzes (eines Zusammenhangs)“

Die in der Auswertungsanleitung der Aufgabe HSA I.4b dargestellte Lösung ist unabhängig von der Lösung der Teilaufgabe I.4a formuliert. Sie greift eine erweiterte Grundvorstellung eines zusammengesetzten Körpers auf bzw. kann auch auf eine formalere Betrachtung der Volumenformel zurückgeführt werden (Abbildung 7).

Die Grundfläche des Quaders bleibt gleich, durch Verdoppelung der Höhe verdoppelt sich das Volumen.
Michaels Aussage ist falsch.

Abbildung 7: Lösung aus der Auswertungsanleitung: Argumentation zu Aufgabe I.4b durch Rückführung auf einen bekannten Zusammenhang

Deutlich griffiger wird die Argumentation, wenn die entsprechenden Darstellungen auch gezeichnet bzw. gedanklich nachempfunden werden[9]. Im Unterricht lohnt es sich die Aussage von Michael entsprechend der in Abbildung 7 dargestellten Lösung zu korrigieren. Dadurch sind die Schülerinnen und Schüler angehalten, ggf. sogar eine allgemeingültige Aussage zu formulieren und anhand logischer Schlussregeln die Vermutung zu beweisen. Dies könnte z.B. wie folgt geschehen:

Wird in der Vorstellung die Höhe des Körpers gestreckt (Abbildung 8, linke Darstellung), so stellt die Volumenformel die Argumentationsbasis dar: $V_a = G \cdot h$, daraus ergibt sich:

$$V_b = G \cdot 2 \cdot h = 2 \cdot G \cdot h = 2 \cdot V_a.$$

[9] Dies kann und sollte ggf. auch durch (erneute) haptische Erfahrungen ergänzt werden.

Die Vorstellung, dass durch das Verdoppeln der Höhe ein identischer Körper auf den ersten Quader gestellt wird, illustriert, dass sich das Volumen verdoppeln muss (Abbildung 8, rechte Darstellung). Dies baut auf der Vorstellung des Verdoppelns einer Anzahl auf und ist ebenfalls eine geeignete Argumentationsbasis. Die Grundvorstellung zum Volumen greift die zum Flächeninhalt analoge Grundvorstellung der Ergänzungsgleichheit und zudem den Aspekt des Messens auf (vgl. Griesel, 1996). Schließlich kann die allgemeine Volumenformel mit dieser Vorstellung motiviert und in mehreren Schritten auch begründet werden. Diesen Prozess als Weg zur Volumenformel festzuhalten, ist für viele Schülerinnen und Schüler langfristig eine gute Chance, den Zusammenhang „Grundfläche mal Höhe“ vollständig zu begreifen. Hierbei kann auch erneut der Übergang von Anzahlen, also den natürlichen Zahlen, zu beliebigen Vielfachen, quasi den positiven rationalen Zahlen, nachvollzogen werden. Weitere Anregungen zur Umsetzung im Unterricht sind z.B. in dem Artikel von Bresinsky, Fuhrmann, Gerdiken, Kolcov & Veit (2018), in der Sinus-Publikation zu finden.

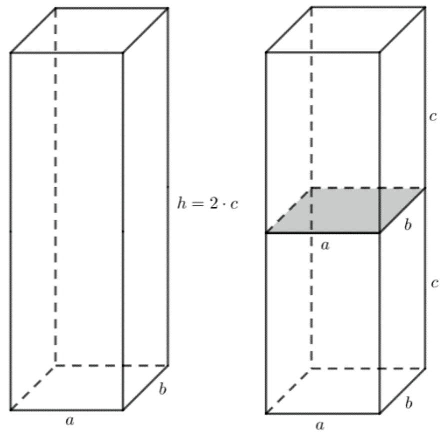


Abbildung 8: Strecken der Höhe (links) bzw. Verdoppeln des Quaders (rechts)

Dass die zum Verständnis notwendigen (erweiterten) Grundvorstellungen nicht gut ausgebildet sind, wird deutlich, sobald rückwärts gearbeitet werden muss oder z.B. eine Strategie zum Zerlegen angewandt werden muss: Das Berechnen des trapezförmigen Flächeninhalts in Teilaufgabe II.2a gelingt der Hälfte der Prüflinge, das Erfassen der kreisförmigen Grundfläche des zylindrischen Tisches ebenfalls (II.1a).

Beurteilen von Aussagen

Neben der bereits oben dargelegten Widerlegung von Aussagen können allgemeingültige Aussagen identifiziert werden – auch dieses ist in Prüfungssituationen durchaus angemessen und über die Art der Zusammenhänge und Aussagen kann die Schwierigkeit ebenfalls gut eingeschätzt werden. Einfache Begründungszusammenhänge können z.B. durch vorgegebene Schlüsse angeregt werden, die es zu beurteilen gilt. Ein Beispiel aus Lernstand 8 ist dazu in Abbildung 9 dargestellt[10]: Die zu beurteilenden Aussagen müssen auf einer allgemeinen Ebene erfasst und auch auf dieser Ebene bearbeitet werden. Ganz zentral ist dabei von den Schülerinnen und Schülern bzw. den Prüflingen die Frage „Gilt das immer?“ zu beantworten.

Die hier getätigten Einschätzungen durch die Schülerinnen und Schüler geben zudem direkten Aufschluss auf tragfähige oder nicht tragfähige Vorstellungen. Im Unterricht sollten die Argumentationen erneut aufgegriffen, konkretisiert und ggf. richtiggestellt werden. Hilfreich ist es dabei, die Darstellungsebene zu wechseln und neben der grafischen Darstellung auch die Wortform einzufordern.

[10] Lernstand 8 in NRW entspricht den nationalen Vergleichsarbeiten (VerA 8)

Eine proportionale Funktion kann im Koordinatensystem durch eine Gerade dargestellt werden, die durch den Punkt $(0|0)$ verläuft. Jede lineare Funktion kann durch eine Funktionsgleichung der Form $y = mx + b$ beschrieben werden.

Beurteile die folgenden Aussagen zu Funktionen. Kreuze jeweils an.

	ja	nein
Für jedes Wertepaar x und y einer proportionalen Funktion hat der Quotient $\frac{y}{x}$ den gleichen Wert. (Dabei ist $x, y \neq 0$.)		
Jede proportionale Funktion ist auch eine lineare Funktion.		
Jede lineare Funktion ist auch eine proportionale Funktion.		
Bei einer proportionalen Funktion gehört zum Doppelten des x-Werts die Hälfte des y-Werts.		
Bei einer linearen Funktion hat die zugehörige Gerade immer eine positive Steigung.		

Abbildung 9: Beurteilende Aufgabe aus Vera8 zu linearen Funktionen. Eine ausführliche Darstellung der Argumentationsstrategien findet sich im Modul D zur Kompetenz Argumentieren in den Didaktischen Kommentaren zu VerA 8: https://www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben/ma1, Durchgang 2011, Aufgabe „Linear und proportional". Quelle: https://www.aufgabenbrowser.de/

Neben dem mathematischen Argumentieren werden Argumentationsketten auch im Zusammenhang mit äußeren Kontexten, also beim Modellieren, genutzt. An vielen Schnittstellen sind jedoch Aspekte aus beiden Kompetenzbereichen angesprochen, so dass mit geeigneten äußeren Kontexten auch sachlogisches Argumentieren geübt werden kann. Zum einen kann dadurch eine höhere Motivation erreicht werden, zum anderen kann sogar die Zugänglichkeit durch alltagsnahe Situationen erleichtert werden.

3 Anhang: Datengrundlage

Die Beobachtungen stützen sich auf folgende Daten, die in jedem Jahr für die beiden Abschlussniveaus (HSA, MSA) erhoben werden:

3.1 Stichprobe 1

Ca. 30 Schulen der am Prüfungsverfahren beteiligten Schulformen werden gebeten, die für jede Teilaufgabe vergebenen Rohpunkte für jeweils eine Lerngruppe zurückzumelden. Die 30 Schulen werden so ausgewählt, dass sie weitgehend repräsentativ für die Schulen der jeweiligen Schulform im Land Nordrhein-Westfalen sind. Die Gesamtheit der Schülerinnen und Schüler, für die diese Daten vorliegen, wird im Bericht als *Stichprobe 1* bezeichnet. Im Bericht wird schulformübergreifend nach den beiden Abschlüssen differenziert:

- Hauptschulabschluss nach Klasse 10 (HSA): Hauptschulen Klasse 10 Typ A, Gesamtschule Grundkurs
- Mittlerer Schulabschluss (MSA): Hauptschulen Klasse 10 Typ B, Gesamtschule Erweiterungskurs, Realschule

Ausschöpfungsquote (Definition)

Aus der Stichprobe 1 lässt sich für jede Teilaufgabe u. a. die sogenannte *Ausschöpfungsquote* berechnen.

Die Ausschöpfungsquote ist der prozentuale Anteil an der maximal erreichbaren Punktzahl, den Schülerinnen und Schüler in der Klausur im Mittel erzielt haben. Eine Ausschöpfungsquote von 50 % bedeutet also, dass Schülerinnen und Schüler im Mittel die Hälfte der erreichbaren Punkte erzielt haben.

3.2 Stichprobe 2

Um tiefer gehende Erkenntnisse zu gewinnen, werden die Schulen über die Dateneingabe hinaus gebeten, anonymisiert jeweils drei Klausuren (eine im oberen, eine im mittleren und eine im unteren Leistungsspektrum) zu kopieren und der Qualitäts- und UnterstützungsAgentur – Landesinstitut für Schule (QUA-LiS) zur Verfügung zu stellen. Die Gesamtheit der Schülerinnen und Schüler, deren Klausur vorliegt, wird im Bericht als *Stichprobe 2* bezeichnet. Über die Repräsentativität dieser Stichprobe kann nichts ausgesagt werden, da die Auswahl den Schulen obliegt. Dennoch lassen sich aus den Prüfungsarbeiten bei vorsichtiger Deutung der Befunde Erkenntnisse gewinnen, die von allgemeiner Bedeutung sind.

Literaturverzeichnis

(Institut für Schulqualität der Länder Berlin und Brandenburg e.V. (ISQ), Hrsg.) (2020). *Aufgabenbrowser. Kommentierte Aufgaben zur Diagnose und Förderung auf jedem Kompetenzniveau,* Landesinstitut für Schule und Medien Berlin/Brandenburg; Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen. Verfügbar unter https://www.aufgabenbrowser.de/ [08.01.2020].

Blum, Werner & Kirsch, Arnold (1989). *Warum haben nicht-triviale Lösungen von f'=f keine Nullstellen? Beobachtungen und Bemerkungen zum "inhaltlich-anschaulichen Beweisen"* (Mathematische Schriften Kassel, Preprint 1989, Nr. 3). Kassel: GhK, Fachbereich 17.

Bresinsky, Dirk; Fuhrmann, Jeanette; Gerdiken, Johannes; Kolcov, Klara & Veit, Annette (2018). Alltag in Grundkursen der SI? – Kompetenzerwerb im Fach Mathematik für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler. In: Georg Trendel & Joachim Roß (Hrsg.), *SINUS.NRW: Verständnis fördern – Lernprozesse gestalten. Mathematik und Naturwissenschaften weiterdenken* (Beiträge zur Schulentwicklung | Praxis, 1. Auflage). Münster: Waxmann.

Bruder, Regina & Pinkernell, Guido (2011). Die richtigen Argumente finden. *Mathematik lehren* (168), S. 2–7.

Drueke-Noe, Christina; Möller, Gerd; Pallack, Andreas; Schmidt, Siegbert; Schmidt, Ursula; Sommer, Norbert; Wynands, Alexander & Drüke-Noe, Christina (2011). *Basiskompetenzen Mathematik. Für den Alltag und Berufseinstieg am Ende der allgemeinen Schulpflicht* (Basiskompetenzen, 1. Aufl.). Berlin: Cornelsen.

Gotwals, Amelia Wenk & Songer, Nancy Butler (2009). Reasoning up and down a food chain. Using an assessment framework to investigate students' middle knowledge. *Science Education, III* (1), S. 259–281. doi: 10.1002/sce.20368.

Griesel, Heinz (1996). Grundvorstellungen zu Größen. *Mathematik lehren* (78), S. 15–19.

Jahnke, Hans Niels & Ufer, Stefan (2015). Argumentieren und Beweisen. In: Regina Bruder, Lisa Hefendehl-Hebeker, Barbara Schmidt-Thieme & Hans-Georg Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355). Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.

Meyer, Michael & Prediger, Susanne (2009). Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 51* (30), S. 1–7.

Pólya, George & Bowden, Leon (Hrsg.) (1977). *Mathematical methods in science* (New mathematical library, Bd. 26, 3rd print). Washington, DC: Math. Assoc. of America.

Trendel, Georg & Lübeck, Michael (2018). Die Entwicklung experimenteller Kompetenzen. Konstruktion von Aufgaben zur systematischen Kompetenzentwicklung und Kompetenzüberprüfung. In: Georg Trendel & Joachim Roß (Hrsg.), *SINUS.NRW: Verständnis fördern – Lernprozesse gestalten. Mathematik und Naturwissenschaften weiterdenken* (Beiträge zur Schulentwicklung | Praxis, 1. Auflage, S. 117–149). Münster: Waxmann.

Wagner, Anke & Wörn, Claudia (2011). *Erklären lernen - Mathematik verstehen. Ein Praxisbuch mit Lernangeboten* (1. Aufl.). Stuttgart: Klett.