UV 9.1 – Ein historischer Moment: Der Satz des Pythagoras

Unterrichtsvorhaben zum KLP GYM SI Mathematik 2019

Januar 2020

# Kurzbeschreibung

Der Satz des Pythagoras stellt ohne Zweifel einen der, wenn nicht den bekanntesten Satz der Geometrie dar. Erstmals beschrieb und bewies Euklid diesen Satz in seinem mathematischen Werk "Elemente". Es existieren bis heute mehr als 400 verschiedene Beweise.

Der Schwerpunkt dieses Unterrichtsvorhabens liegt in der Verknüpfung des Prozesses Begründen als Teilaspekt des Argumentierens mit dem Gegenstand „Satz des Pythagoras“. Aus der Vielzahl der Beweise aus den unterschiedlichen Jahrhunderten sind einige exemplarisch ausgewählt worden, an denen die Argumentations- und Problemlösekompetenz beim eigenständigen Erkunden einer historischen Beweisidee geschult werden sollen. Insgesamt werden somit verschiedene Beweisstrategien erarbeitet, verglichen und bewertet. Das eigenständige Führen des Beweises wird zunächst an vereinfachten Figuren, zunehmend komplexeren Darstellungen und in neuen Situationen gefestigt. Als Vertiefung über den KLP hinaus wird eine Übertragung auf den Höhen- und Kathetensatz angeboten.

Die Anwendung des Satzes erfolgt anschließend in inner- und außermathematischen Kontexten. Hierbei machen Schülerinnen und Schüler erste Bekanntschaft mit irrationalen Zahlen in Form von Wurzeln, die beim Lösen von quadratischen Gleichungen bei der Bestimmung der Länge von Dreiecksseiten entstehen.

Die Geschichte der Mathematik wird in diesem Vorhaben gewinnbringend eingebracht, da historische Aufgaben und Fragestellungen sowie Beweise zur Motivation eingesetzt werden.

Vernetzungen mit bereits abgeschlossenen (oder künftigen) Unterrichtsvorhaben wie z.B. binomische Formeln oder Termumformungen sind sinnvoll.

## Das Unterrichtsvorhaben im Überblick

## Zeitbedarf: ca. 16 Unterrichtsstunden

1. Einführung in den geschichtlichen Kontext – Pythagoras und die Pythagoreer (1 U.-Std.)
2. Der Satz des Pythagoras - Wie kann man ihn beweisen? (6 U.-Std.)
3. *Vertiefung* Der Höhen- und der Kathetensatz – Anwendung von Beweisstrategien auf weitere geometrische Sätze (3 U.-Std.)
4. Bestimmung von unbekannten Seitenlängen in rechtwinkligen Dreiecken – Innermathematische Anwendung des Satzes des Pythagoras (2 U.-Std.)
5. Bestimmung von unbekannten Seitenlängen in nichtrechtwinkligen Dreiecken durch die Strategie der Zerlegung in rechtwinklige Teildreiecke – Innermathematische Anwendung des Satzes des Pythagoras (2 U.-Std.)
6. Bestimmung von Größen in Sachzusammenhängen – Anwendung des Satzes des Pythagoras in Kontexten (2 U.-Std.)

# Zielsetzung

Dieses Unterrichtsvorhaben konkretisiert die Umsetzung des Schulinternen Lehrplans Mathematik (SiLP), der auf dem Kernlehrplan Gymnasium SI Mathematik (Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2019) basiert.

Die in der Tabelle aufgeführten Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans (KLP) sind Schwerpunkte der Kompetenzentwicklung in diesem Unterrichtsvorhaben.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Geometrie* geometrische Sätze: Satz des Pythagoras, *Kosinussatz*

Arithmetik/ Algebra* Begriffsbildung: *Potenzen*, Wurzeln, *Logarithmen*
 | Konkretisierte KompetenzerwartungenDie Schülerinnen und Schüler …(Geo-1) beweisen den Satz des Pythagoras,(Geo-9) berechnen Größen mithilfe von *Ähnlichkeitsbeziehungen*, geometrischen Sätzen und *trigonometrischen Beziehungen*, (Geo-10) ermitteln Maßangaben in Sachsituationen, nutzen diese für geometrische Berechnungen und bewerten die Ergebnisse sowie die Vorgehensweise, (Ari-9) wenden das Radizieren als Umkehrung des Potenzierens an,Prozessbezogene Kompetenzerwartungen(Ope-5) arbeiten unter Berücksichtigung mathematischer Regeln und Gesetze mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen,(Arg-6) verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten, (Arg-7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, *Widerspruch*), (Arg-8) erläutern vorgegebene Argumentationen und Beweise hinsichtlich ihrer logischen Struktur (Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder- Verknüpfungen, Negation, *All- und Existenzaussagen*),(Arg-9) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,(Pro-4) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus,(Mod-8) überprüfen Lösungen auf ihre Plausibilität in realen Situationen. | Zur Umsetzung* selbstständiges Aufstellen von Argumentationsketten und Präsentation unterschiedlicher Beweise (z.B. als Gruppenpuzzle)
* Vielfache geometrische Anwendungen auf die Berechnung von Abständen, Höhen und Diagonalen
* Existenz von Wurzeln als reelle Zahlen erst in →9.2; Rechnerergebnisse als Näherung akzeptieren

Zur Vernetzung* Pythagoras als Spezialfall des Kosinussatzes in →10.4, dort Nachweis der Umkehrbarkeit
* Beweisvarianten nutzen binomischen Formeln ←7.6
* Berechnung der Länge der Diagonalen im Quader als Vorbereitung auf →EF und Höhe einer Pyramide →9.6,

Zur Erweiterung und Vertiefung* Beweis und Anwendung des Höhen- und Kathetensatzes
 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Kurzbeschreibung | Didaktische Hinweise | Umsetzung | Literatur |

# Didaktische Hinweise

Der Satz des Pythagoras hat eine zentrale Rolle innerhalb der Schulmathematik. Baptist führt hierzu folgende Gründe an (Baptist, 1998, S. 2):

* ein erstes Beispiel substantieller Mathematik innerhalb des Schulstoffs,
* der Beziehungsreichtum zu vielen Inhalten des Lehrplans,
* die Vielfalt kulturgeschichtlicher Aspekte.

Dieser Satz erschließt sich jedoch nicht ohne weiteres durch die Betrachtung von rechtwinkligen Dreiecken und seine Allgemeingültigkeit lässt sich nicht alleine durch die Visualisierung z.B. mit einer dynamischen Geometriesoftware zeigen. Damit wird eine Beweisnotwendigkeit bei den Schülerinnen und Schülern geweckt (vgl. z.B. Elschenbroich, 2002, 2016).

Somit kommt dem Beweis eine hohe Bedeutsamkeit zu: „Zum einen dient er der Erkenntnissicherung, zum anderen ermöglicht er erst Einsicht in die Aussage selbst.“ (Baptist, 1998, S. 3). Dabei wird für dieses Unterrichtsvorhaben auf die für Schule angemessene Beweisdefinition zurückgegriffen:

„Eine Begründung auf Grund einer vorgegebenen Argumentationsbasis soll als Beweis bezüglich dieser Argumentationsbasis bezeichnet werden.“ (Fischer & Malle, 2004, S. 180; zitiert nach Jahnke & Ufer, 2015, S. 334)

Aus den zahlreichen Beweisen zum Satz des Pythagoras wurden für dieses Vorhaben verschiedene Beweise exemplarisch ausgewählt, die auf verschiedenen Beweisstrategien der Mathematik beruhen und unterschiedliche Inhalte aus den Teilgebieten der Mathematik aufgreifen.

Das Hauptlernziel dieser Unterrichtsreihe ist durch die konkretisierte Kompetenzerwartung Geo-1 gegeben: „Die Schülerinnen und Schüler beweisen den Satz des Pythagoras“ (MSB, 2019). Um dieses umzusetzen wird der Schwerpunkt dieses Unterrichtsvorhabens auf die selbstständige Erarbeitung eines Beweises aus sechs verschiedenen Beweisvarianten gelegt. Diese verschiedenen Beweise werden anschließend vorgestellt und wie folgt ausgewertet:

* Vergleichen und Bewerten von Beweisvarianten in Bezug auf Zugänglichkeit und Komplexität sowie Benennen der genutzten Beweisstrategien
* Beurteilen der Qualität (logisch schlüssig, vollständig, geeignet, übertragbar) einer Argumentationskette

Das eigenständige Führen des Beweises wird zunächst an vereinfachten Figuren, zunehmend komplexeren Darstellungen und in neuen Situationen gefestigt. Zur Erweiterung kann auf einen Scherungsbeweis zurückgegriffen werden.

Zur Vertiefung und Übung der Beweisstrategien wird eine Übertragung auf den Höhen- und den Kathetensatz angeboten, welche aber im KLP nicht vorgesehen sind.

Die Anwendung des Satzes erfolgt anschließend in inner- und außermathematischen Kontexten. Hierbei machen Schülerinnen und Schüler erste Bekanntschaft mit irrationalen Zahlen in Form von Wurzeln, die beim Lösen von quadratischen Gleichungen bei der Bestimmung von Längen von Dreiecksseiten entstehen. Diese Wurzeln werden zunächst mit dem Taschenrechner bestimmt. Die grundlegende Behandlung des Radizierens als Umkehrung des Potenzierens erfolgt in einem späteren Unterrichtsvorhaben.

In den sich anschließenden Unterrichtseinheiten werden Übungen eingebaut, so dass die Schülerinnen und Schüler den Satz sicher anwenden und mit ihm unbekannte geometrische Größen auch in Sachzusammenhängen bestimmen können. Das Ergänzen von unvollständigen Beweisen oder das Aufstellen von Argumentationsketten sind sinnvolle Variationen beim Einüben von Beweistechniken.

Die Umkehrung des Satzes des Pythagoras wird in einem späteren Unterrichtsvorhaben zusammen mit dem Kosinussatz thematisiert.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Kurzbeschreibung | Didaktische Hinweise | Umsetzung | Literatur |

# Umsetzung

| **Unterrichtseinheit; Thema; (Zeitumfang)** | **Kompetenzerwartungen Die Schülerinnen und Schüler…** | **Hinweise zur Umsetzung, Vernetzung und Vertiefung; Absprachen und Empfehlungen**  |
| --- | --- | --- |
| Einführung in den geschichtlichen Kontext –Pythagoras und die Pythagoreer(1 U.-Std.) | (Kom-1) entnehmen und strukturieren Informationen aus mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, (Kom-2) recherchieren und bewerten fachbezogene Informationen,(Ope-10) nutzen Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlung) zur Informationsrecherche, | * Einführung in den Zusammenhang der Gleichung $a^{2}+b^{2}=c^{2}$ z.B. aufgrund alter Darstellungen wie den Tontafeln der Babylonier „Plimpton 322“, die eine Vielzahl an pythagoreischen Zahlentripeln auflistet oder anhand der Gärtnerschnur[[1]](#footnote-1)
* Pythagoras in einer Kurzbiografie
* Pythagoras und die Pythagoreer
 |
| Der Satz des PythagorasWie kann man ihn beweisen?(6 U.-Std.) | (Geo-1) beweisen den Satz des Pythagoras,(Arg-6) verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten,(Arg-7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern),(Arg-8) erläutern vorgegebene Argumentationen und Beweise hinsichtlich ihrer logischen Struktur (Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen). | 3-Stufen-Gruppenpuzzle: * 1. Partnerarbeit: Erarbeitung je einer Beweisvariante[[2]](#footnote-2)
	+ A1 „Stuhl der Braut“ - A2 „Zhoubi suanjing“[[3]](#footnote-3)
	+ (B1 Scherung I - B2 Scherung II) als Vertiefung
	+ C1 Garfield - C2 Bhaskara
	+ D1 Altindischer Beweis (geometrisch)
	+ D2 Altinidischer Beweis (algebraisch)
* 2. Partnerarbeit: Je eine Person aus A1 mit A2, C1 mit C2 und D1 mit D2: Vorstellen und Herausarbeiten von Gemeinsamkeiten und mathematischer Argumentationen
* 3. Gruppenarbeit: Je einer aus A, C und D: Vorstellen, Vergleichen und Bewerten von Beweisvarianten in Bezug
	+ auf Zugänglichkeit,
	+ auf Komplexität
	+ auf die Qualität einer Argumentationskette (logisch schlüssig, vollständig, geeignet, übertragbar)
* Plenum: Beweisstrategien und (subjektives) Bewerten der Zugänglichkeit, Komplexität und Einsichtigkeit
* Vernetzung: binomische Formeln und Termumformungen in Beweisvariante.
 |
| **Fakultativ**Der Höhen- und KathetensatzAnwendung der Beweisstrategien auf weitere geometrische Sätze(3 U.-Std.) | (Arg-6) verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten, (Arg-7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch), (Arg-8) erläutern vorgegebene Argumentationen und Beweise hinsichtlich ihrer logischen Struktur (Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen), | * Hinweis: Diese Unterrichtseinheit ist vertieft den KLP, da hier noch einmal die Anwendung von Beweisstrategien auf weitere grundlegende geometrische Sätze aus der Satzgruppe des Pythagoras geübt und damit auch gesichert werden können.
* Material: siehe Arbeitsblätter zum Höhen und Kathetensatz[[4]](#footnote-4) zu diesem UV
 |
| Bestimmung von unbekannten Seitenlängen in rechtwinkligen DreieckenInnermathematische Anwendung des Satzes des Pythagoras(2 U.-Std.) | (Geo-9) berechnen Größen mithilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen, geometrischen Sätzen und trigonometrischen Beziehungen, (Ari-9) wenden das Radizieren als Umkehrung des Potenzierens an.(Ope-5) arbeiten unter Berücksichtigung mathematischer Regeln und Gesetze mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen, | * Anwendung des Satzes des Pythagoras in rechtwinkligen Dreiecken in innermathematischen Zusammenhängen mit Variation der Seiten und Seitenbezeichnungen.
* Existenz von Wurzeln als reelle Zahlen erst in →9.2; Taschenrechnerergebnisse als Näherung akzeptieren
* Übliche Aufgaben können den bekannten Schulbüchern entnommen werden.
 |
| Bestimmung von unbekannten Seitenlängen in nichtrechtwinkligen Dreiecken durch die Strategie der Zerlegung in rechtwinklige TeildreieckeInnermathematische Anwendung des Satzes des Pythagoras(2 U.-Std.) | (Geo-9) berechnen Größen mithilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen, geometrischen Sätzen und trigonometrischen Beziehungen, (Ari-9) wenden das Radizieren als Umkehrung des Potenzierens an.(Ope-5) arbeiten unter Berücksichtigung mathematischer Regeln und Gesetze mit Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen. | * Durch die Höhe wird ein Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt.
* Existenz von Wurzeln als reelle Zahlen erst in →9.2; Rechnerergebnisse als Näherung akzeptieren
* Es gibt zahlreiche Aufgaben in der üblichen Schulbuchliteratur.
 |
| Bestimmung von Größen in SachzusammenhängenAnwendung des Satzes des Pythagoras in Sachzusammenhängen / Kontexten(2 U.-Std.) | (Geo-9) berechnen Größen mithilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen, geometrischen Sätzen und trigonometrischen Beziehungen, (Geo-10) ermitteln Maßangaben in Sachsituationen, nutzen diese für geometrische Berechnungen und bewerten die Ergebnisse sowie die Vorgehensweise, (Ari-9) wenden das Radizieren als Umkehrung des Potenzierens an,(Pro-4) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren und Werkzeuge zur Problemlösung aus. | * Bestimmung von Größen in Sachzusammenhängen mit Pythagoras (Gebäude, Landschaft, Natur, …)
* Existenz von Wurzeln als reelle Zahlen erst in →9.2; Rechnerergebnisse als Näherung akzeptieren
* Stationenlernen[[5]](#footnote-5)
* Aufgaben können den üblichen Schulbüchern entnommen werden.
 |

# Unterrichtsmaterial

* Gruppenpuzzle:
g9\_ma\_silp\_jg09\_uv1\_pythagorasgruppenpuzzle\_2020\_01\_21.docx
* Arbeitsblätter zum Höhen- und Kathetensatz:
g9\_ma\_silp\_jg09\_uv1\_pythagorashoehenundkathetensatz\_2020\_01\_21.docx
* Material zum UV passend zum alten KLP Gymnasium Mathematik Sekundarstufe I (G8), 2007:
https://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/material/view/5006

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Kurzbeschreibung | Didaktische Hinweise | Umsetzung | Literatur |

Literaturverzeichnis

Baptist, Peter (1998). Modulbezogene Erläuterungen zu "Pythagoras und kein Ende?". In Universität Bayreuth (Hrsg.), *BLK-Modellversuch. Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts.* Bayreuth. Verfügbar unter http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/download/artikel/baptist/BLKpyth.pdf [21.01.2020].

Elschenbroich, Hans-Jürgen (2002). Visuell-dynamisches Beweisen. *Mathematik lehren* (110), 56-59.

Elschenbroich, Hans-Jürgen (2016). Perspektivwechsel durch dynamische Software. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016. Vorträge auf der 50. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 07.03.2016 bis 11.03.2016 in Heidelberg* [1. Auflage]. Münster: WTM, Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien. Verfügbar unter https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/ 35612/1/BzMU16%20ELSCHENBROICH%20Perspektivwechsel.pdf [15.01.2020].

Fischer, Roland & Malle, Günther (2004). *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln* (Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, Bd. 5, [Neuaufl.], gedr. nach Typoskript). München: Profil-Verl.

Jahnke, Hans Niels & Ufer, Stefan (2015). Argumentieren und Beweisen. In Regina Bruder, Lisa Hefendehl-Hebeker, Barbara Schmidt-Thieme & Hans-Georg Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355). Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.

Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2019). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe I, Gymnasium in Nordrhein-Westfalen. Mathematik* (Sekundarstufe l - Gymnasium, Richtlinien und Lehrpläne, Bd. 3401). Frechen: Ritterbach-Verlag.

1. Bekannt auch als pythagoreische Knotenschnur. [↑](#footnote-ref-1)
2. Roth, Jürgen: Didaktik der Geometrie, Vorlesungsskript. https://www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/did\_geometrie/did\_geometrie\_4\_argumentieren\_beweisen.pdf (Datum des letzten Zugriffs: 21.1.2020) [↑](#footnote-ref-2)
3. https://www.math.uni-bielefeld.de/~ringel/puzzle/puzzle02/pytha.htm (Datum des letzten Zugriffs: 21.1.2020) [↑](#footnote-ref-3)
4. Im LPN unter g9\_ma\_silp\_jg09\_uv1\_pythagorashoehenundkathetensatz\_2020\_01\_21.docx [↑](#footnote-ref-4)
5. Übersicht zum Stationenlernen unter https://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/material/download/9148 (Datum des letzten Zugriffs: 21.1.2020) [↑](#footnote-ref-5)