Der Höhen- und Kathetensatz

Anwendung der Beweisstrategien auf weitere geometrische Sätze

# Beweis H1 – Höhensatz algebraisch (Pythagoras + Kathetensatz)

Aufgabe: Beweise den Höhensatz.

Verwende die Bezeichnungen des Dreiecks in der Abbildung. Nutze dazu den Satz des Pythagoras und den Kathetensatz in einem der beiden Teildreiecke.



## Tipps:

1. Wähle eines der beiden Teildreiecke ADC oder CDB.
2. Stelle den Satz des Pythagoras und den Kathetensatz für dieses Dreieck auf.
3. Setze die eine Gleichung in die andere ein und forme die Gleichung nach h2 um.
4. Klammere aus.
5. Ersetze die Differenz in der Klammer.

Der Höhen- und Kathetensatz

Anwendung der Beweisstrategien auf weitere geometrische Sätze

# Beweis H2 – Höhensatz algebraisch (Pythagoras + binomisch)

Aufgabe: Beweise den Höhensatz. Verwende die Bezeichnungen des abgebildeten Dreiecks. Nutze den Satz des Pythagoras und die 1. binomische Formel.



## Tipps:

1. Stelle den Satz des Pythagoras für das große Dreieck ABC auf.
2. Drücke die Seite c durch ihre Teilstrecken p und q aus.
3. Forme die Gleichung mit der 1. binomischen Formel um.
4. Stelle den Satz des Pythagoras für die beiden kleinen Teildreiecke ADC und CDB auf.
5. Setze die die beiden Gleichungen aus 4. für a² und b² in die Gleichung aus 3. ein.

[Kontrollergebnis zum Weiterrechnen: h² + p² + h² + q² = p² + 2pq + q²]

1. Vereinfache die in 5. erhaltene Gleichung durch Zusammenfassen und Termumformung nach h².

Der Höhen- und Kathetensatz

Anwendung der Beweisstrategien auf weitere geometrische Sätze

# Beweis H3 – Höhensatz (geometrische Ergänzung)

Ein rechtwinkliges Dreieck wird durch die Höhe in zwei Teildreiecke 1 und 2 zerlegt. Man kann diese beiden Dreiecke auf zwei Arten neu anordnen. Wenn man jeweils ein Rechteck (h² bzw. p·q) ergänzt, erhält man zwei neue rechtwinklige Dreiecke.

Aufgabe: Beweise den Höhensatz durch Vergleich der beiden neuen Dreiecke. Erkläre ausführlich. Zeige auch, dass die durch die Neuanordnung entstandenen großen Dreiecke keinen „Knick“ in der Hypotenuse haben.





Quelle: http://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/pythagoras/site9.html

Der Höhen- und Kathetensatz

Anwendung der Beweisstrategien auf weitere geometrische Sätze

# Beweis K1 – Kathetensatz algebraisch (Pythagoras + binomisch)

Aufgabe: Beweise den Kathetensatz. Verwende die Bezeichnungen in der Abbildung.

## Tipps:

1. Stelle den Satz des Pythagoras für die beiden Teildreiecke ADC und CDB auf, forme beide Gleichungen nach h2 um und setze die beiden Terme gleich.
2. Stelle den Satz des Pythagoras für das große Dreieck ABC auf und forme die Gleichung nach b² um.
3. Setze 2. in 1. ein.
4. Ersetze q durch c und p.
5. Wende die 2. binomische Formel an, vereinfache die Gleichung und forme nach a um.

Der Höhen- und Kathetensatz

Anwendung der Beweisstrategien auf weitere geometrische Sätze

# Beweis K2 – Kathetensatz Scherung (optional)

Der Scherungsbeweis des Satzes des Pythagoras beweist gleichzeitig auch den Kathetensatz. Veranschaulichung des Beweisgangs zum Kathetensatz mittels Scherung.

Aufgabe: Betrachte die Animation auf Wikipedia:

https://de.wikipedia.org/wiki/Satzgruppe\_des\_Pythagoras#Scherungsbeweis\_des\_Kathetensatzes

und erläutere die einzelnen Schritte.



Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Satzgruppe\_des\_Pythagoras#/media/Datei:Pythagorasanimation.gif

Der Höhen- und Kathetensatz

Anwendung der Beweisstrategien auf weitere geometrische Sätze

# Beweis K3 – Kathetensatz (mit Höhensatz)

Aufgabe: Beweise den Kathetensatz mit Hilfe des Höhensatzes. Verwende die Bezeichnungen in der Abbildung.



## Tipps:

1. Stelle den Satz des Pythagoras für das Teildreieck CDB auf.
2. Ersetze h² mit Hilfe des Höhensatzes.
3. Klammere p aus.
4. Ersetze p+q.

Beweis des anderen Teils des Kathetensatzes analog.