Betragsgleichungen Lehrerkommentare

Die Materialien zu den Betragsgleichungen bestehen aus vier Aufgabenblättern, die zur Differenzierung und individuellen Förderung im Unterricht gedacht sind. Das Anspruchsniveau in den Aufgabenblättern ist ansteigend. Daher sollten die Aufgabenblätter auch in der angebotenen Reihenfolge eingesetzt werden. Der Einsatz ist sinnvoll nach dem Einsatz der Materialien zu den Betragsfunktionen.

Die Aufgaben dienen einerseits dazu, die inhaltlichen Kompetenzen zum Lösen von Gleichungen und zu den Betragsfunktionen aus dem Unterricht zu trainieren und in einem neuen Kontext bei der Lösung von Betragsgleichungen zu erweitern. Andererseits werden durch die notwendigen Fallunterscheidungen beim Lösen von Betragsgleichungen Problemlösekompetenzen vertieft oder neu erworben.

Das Wechselspiel von geometrischem Vorgehen und algebraischen Lösungswegen spielt bei allen Aufgabenblättern eine große Rolle.

Konkrete Voraussetzungen für den Einsatz der Materialien:

* Der Funktionsbegriff und die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen (Graph, Tabelle, Text, Term) müssen beherrscht werden.
* Der Umgang mit Geradengleichungen muss bekannt sei.
* Die Bedeutung der Formvariablen in den Gleichungen (Steigung und Achsenabschnitt) muss bekannt sein.
* Lineare Gleichungen müssen gelöst werden können
* Die Schülerinnen und Schüler müssen mit einer DGS, zum Beispiel GeoGebra, umgehen können, so dass sie Geraden und die Graphen von Betragsfunktionen darstellen können.
* Die DGS sollte für die Unterrichtsstunden, in denen die Aufgabenblätter eingesetzt werden, zur Verfügung stehen.
* Die Schülerinnen und Schüler müssen grundlegende Eigenschaften der Graphen von Betragsfunktionen kennen.

Alle vier Aufgabenblätter sind so gestaltet, dass zunächst ausführliche Beispiele präsentiert werden. Anschließend folgen Aufgaben, in denen die Schülerinnen und Schüler das neu Gelernte anwenden können. Wegen der vorgeführten Beispiele sind die drei ersten Aufgabenblätter zweiseitig.

**Aufgabenblatt 1** dient der Motivation und Einführung in das Thema. In einem Sachkontext (Reflexion eines Lichtstrahls in einem Escape-Room) wird eine Situation vorgestellt, in der ein Graph mit einem Knick vorkommt. Speziell bei der Programmierung eines Computerspiels muss dieser Graph durch eine Funktionsgleichung dargestellt werden. Die Bestimmung von Schnittpunkten führt dann auf das Lösen einer Betragsgleichung. Der Sachkontext wird vielen Schülerinnen und Schülern vertraut sein.

Das Aufgabenblatt besteht aus drei vorbereitenden Seiten, auf denen an den passenden Stellen auf die im vierten Blatt zusammengestellten Aufgaben verwiesen wird. Der vorbereitende Text kann den Schülerinnen und Schülern zur eigenständigen Bearbeitung vorgelegt werden, so dass die Lehrkraft bei Verständnisproblemen individuell eingreifen wird. Bei diesem Vorgehen wird der Aspekt der individuellen Förderung im Vordergrund stehen. Es ist aber auch möglich, die Voraussetzungen in einem Unterrichtsgespräch zu erarbeiten.

In dem vorbereitenden Text werden zunächst die physikalischen Grundlagen der Reflexion dargestellt und der Verlauf der Lichtstrahlen geometrisch untersucht. In den ersten Aufgaben geht es darum, den Punkt, an dem die Reflexion erfolgt, zu bestimmen. Dazu werden in einer Bilderfolge die nötigen Konstruktionsschritte vorgeführt. In der zugehörigen Aufgabe 1 sollen die Schülerinnen und Schüler die einzelnen Konstruktionsschritte beschreiben, während sie in der anspruchsvolleren Aufgabe 2 die Konstruktion selber durchführen sollen. Das kann mit Zirkel und Lineal oder mit DGS erfolgen.

In Aufgabe 3 wird angeregt, die Konstruktion rechnerisch nachzuvollziehen. Dazu sind noch keine Betragsfunktionen erforderlich.

In der Realität ist es eher so, dass der Ausgangspunkt des Lichtes und der Punkt, an dem die Reflexion erfolgt, bekannt sind und der Zielpunkt zu bestimmen ist. Das wird in den Aufgaben 4 und 5 mit einer vorgegebenen GeoGebra-Datei untersucht. Leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler können die Datei auch dann nutzen, wenn sie nicht alle Teile des Textes vollständig nachvollziehen konnten. Dabei können diese Schülerinnen und Schüler trotzdem Erfahrungen mit der Lage von Schnittpunkten machen und beobachten, wie die Funktionsgleichung zu variieren ist, um den vorgegebenen Schnittpunkt zu erhalten.

Anschließend wird im Text ein Bezug zwischen den Lichtwegen und den Graphen von Betragsfunktionen hergestellt. Dabei wird Modellierungskompetenz der Schülerinnen und Schüler angesprochen. Es wird vorgeführt, wie man die Gleichung der benötigten Betragsfunktion gewinnen kann. Die Betragsgleichung, durch die der Schnittpunkt zwischen dem Lichtweg und der Wand ermittelt werden kann, wird angegeben und graphisch gelöst.

Die Symmetrieeigenschaft des Graphen der Betragsfunktion ist für die Modellierung des Lichtweges entscheidend. Sie kann durch Betrachten des Graphen verifiziert werden. In Aufgabe 6 wird zusätzlich für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler die Symmetriebedingung angegeben. Ihre Gültigkeit soll nachgewiesen werden.

Aufgabe 7 ist die anspruchsvollste Aufgabe der Sequenz. Hier soll begründet werden, warum die in Aufgabe 6 genannte Bedingung wirklich die Symmetrie nachweist. Die Aufgabe ist allgemein mit Variablen formuliert: Zur Vereinfachung der Aufgabe können den Schülerinnen und Schülern statt der Variablen konkrete Zahlenwerte gegeben werden.

**Aufgabenblatt 2** stellt zunächst dar, wie ein Betrag mit Hilfe eine Fallunterscheidung aufgelöst werden kann, so dass statt einer Betragsgleichung zwei lineare Gleichungen zu lösen sind. Zur Veranschaulichung wird auf die Graphen der Betragsfunktionen zurückgegriffen. Dabei werden die Kompetenzen genutzt, die in den Aufgabenblättern zu den Betragsfunktionen erworben worden sind. Neu erworben bzw. gefestigt wird die Kompetenz, mit Fallunterscheidungen umzugehen.

In den beiden Beispielen werden zwei Betragsgleichungen gelöst. In Beispiel 1 existieren zwei Lösungen. In Beispiel 2 ergeben sich rechnerisch zunächst zwei Lösungen, die aber jeweils nicht in den Einschränkungsbereichen liegen, so dass diese Gleichung keine Lösung hat. Die Lage der rechnerischen Ergebnisse relativ zu den Bereichen aus der Fallunterscheidung wird durch eine Graphik veranschaulicht.

Aufgabe 1 regt dazu an, die Unlösbarkeit der Gleichung durch Funktionsgleichungen zu veranschaulichen.

In Aufgabe 2 sollen in Analogie zu den vorgeführten Beispielen Gleichungen, die einen Betrag enthalten, rechnerisch gelöst werden.

**Aufgabenblatt 3** verallgemeinert das Vorgehen auf Gleichungen mit zwei Beträgen. Auch hier werden die Fälle, in denen die „Lösung“ nicht in dem Bereich liegt, der durch die Fallunterscheidung vorgegeben ist, graphisch dargestellt.

Bei den Aufgaben ist zu beachten, dass die Lösung von Aufgabe 2 f) ein ganzes Intervall ist. Dieser Fall ist in den Beispielen nicht behandelt und muss von den Schülerinnen und Schülern neu entdeckt werden.

**Aufgabenblatt 4** führt ebenfalls auf Gleichungen mit zwei Beträgen. Dazu müssen jedoch zunächst quadratische Terme in Produkte zerlegt werden. Dann muss der Betrag eines Produktes in das Produkt zweier Beträge zerlegt werden. Zur Vorbereitung werden in den Aufgaben 1 und 3 die Beträge von Summen und Produkten an Beispielen untersucht. Dabei lernen die Schülerinnen und Schüler nebenbei die Dreiecksungleichung kennen, und sie sehen, dass es nicht selbstverständlich ist, Beträge und Rechenoperationen miteinander zu vertauschen. Diese Erkenntnisse werden an konkreten Zahlenbeispielen gewonnen und sind daher allen Schülerinnen und Schülern zugänglich.

Aufgabe 2 ist für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler gedacht, da es hier um eine Begründung für die Dreiecksungleichung geht.

Aufgabe 4 kann nur dann bearbeitet werde, wenn der Umgang mit quadratischen Gleichungen schon geläufig ist. Zu Beginn der Aufgabe wird beispielhaft die Lösung einer quadratischen Betragsgleichung vorgeführt.

**Hinweise zur Ergänzung**

Eine mögliche Weiterführung besteht in der Untersuchung von Betragsungleichungen. Das ist aber erst möglich, wenn die Schülerinnen und Schüler einfache Ungleichungen lösen können. Dazu wird ein weiteres Materialpaket vorbereitet, das dann auch die Betragsungleichungen umfassen wird.

Betragsgleichungen Lösungsbeispiele

**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 1**

Aufgabe 1:

Der Punkt wird an der unteren Schachtwand gespiegelt. Man erhält den Bildpunkt .

Die Punkte A und werden durch eine Gerade (oder Strecke) verbunden.

Der Schnittpunkt der Strecke mit der geraden Schachtwand ist der Punkt , an dem die Reflexion stattfindet.

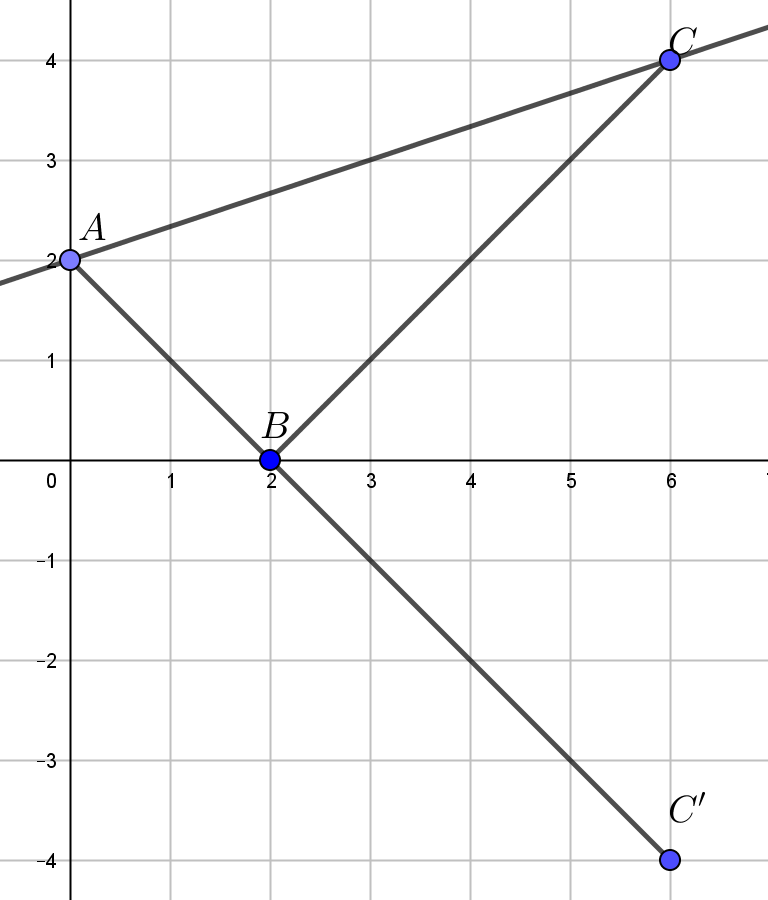
Die Strecke durch die Punkte und ergibt den Verlauf des reflektierten Lichtstrahls.

Aufgabe 2:

Konstruktionsprotokoll:



Konstruktion:



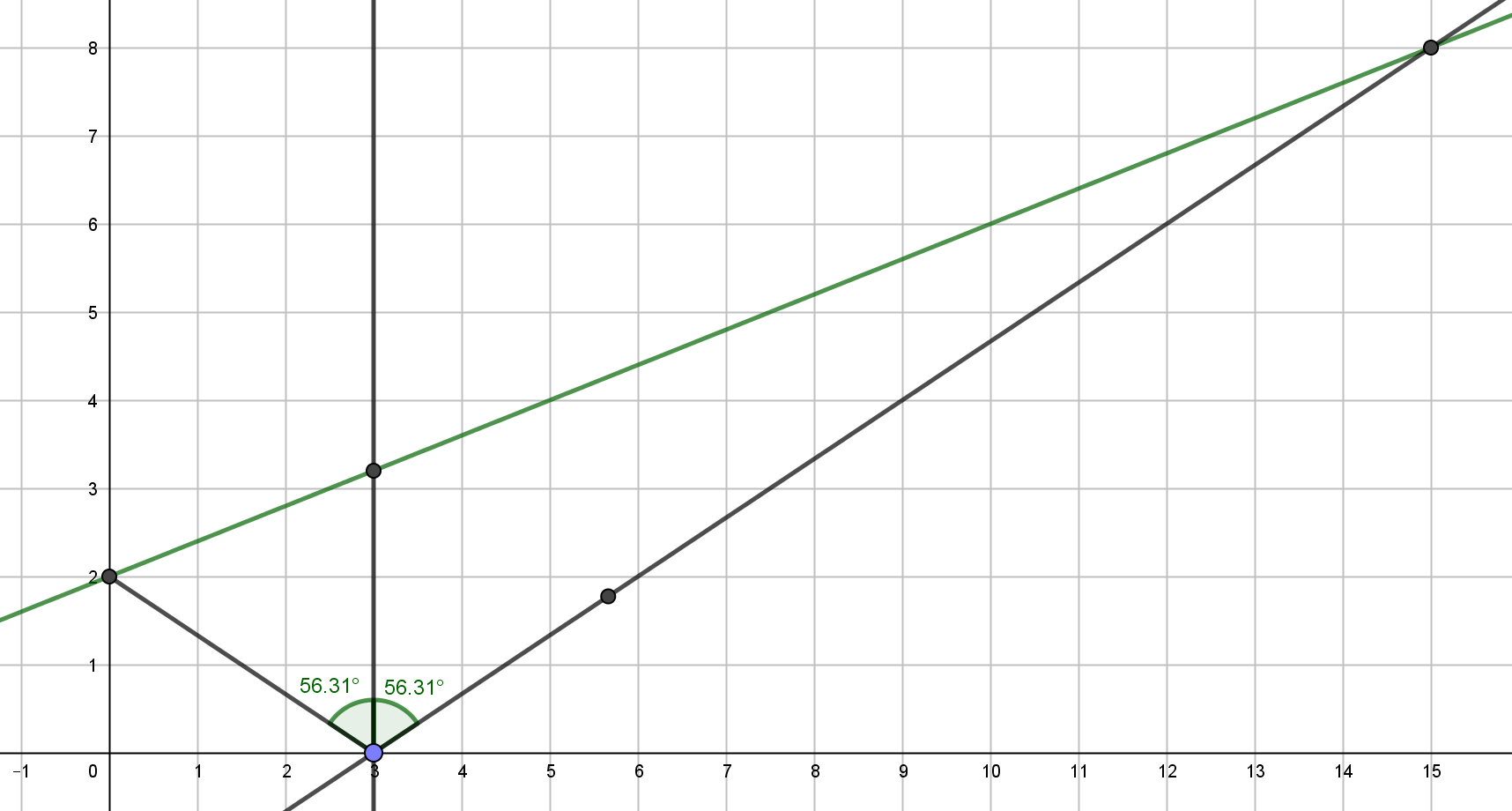
Aufgabe 3:

Es ist .

Die Gerade durch und hat die Gleichung .

ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der -Achse: , also .

Aufgabe 5:



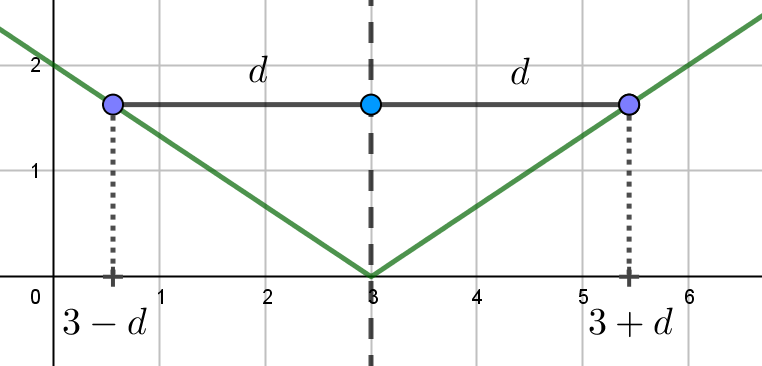


Aufgabe 6:

,

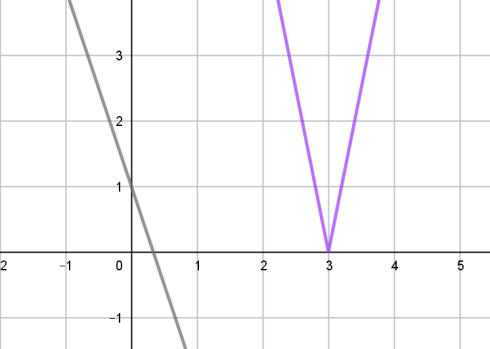
.

Aufgabe 7:



In der Abbildung sind zwei zueinander symmetrisch bezüglich der Achse mit der Gleichung liegende Punkte zu sehen. Sie haben jeweils den gleichen Abstand von der Achse, hier mit bezeichnet. Die -Koordinaten sind bzw. . Ihre -Koordinaten sind gleich, also .

**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 2**

Aufgabe 1:

Da der Graph von parallel zur linken Seite des Graphen von verläuft, kann es keine Schnittpunkte zwischen den Graphen geben.

Aufgabe 2:

a) b) c)

d) e) keine Lösung f)

g) h) i)

**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 3**

Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a) | keine Lösung |  |
| b) |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| c) |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| d) |  |  |
| e) | keine Lösung |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| f) |  |  |

**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 4**

Aufgabe 1:

Zu beobachten ist, dass der Betrag der Summe und die Summe der Beträge gleich sind, wenn die Summanden gleiche Vorzeichen haben. Sonst ist der Betrag der Summe kleiner als die Summe der Beträge.

Aufgabe 2:

Wenn die Vorzeichen der Summanden unterschiedlich sind, liegt die Summe auf der Zahlengeraden zwischen den Summanden. Aus der Form des Graphen ist zu erkennen, dass der Funktionswert zwischen den Summanden geringer ist, als einer der Funktionswerte der Summanden.

Aufgabe 3:

In allen Fällen ist der Betrag des Produktes gleich dem Produkt der Beträge.

Betragsgleichungen: Zusammenstellung der Kompetenzen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Arbeitsblatt** | **Aufgabe** | **Kompetenz** |
| 1 | 1 | Gerade durch Funktionsgleichung beschreiben |
|  | 2 | Werkzeugkompetenz Dynamisches Geometriesystem  Beschreiben eines Graphen |
|  | 3 | Darstellungswechsel Graph – Wertetabelle  Entnehmen von Informationen aus der Wertetabelle  Dokumentieren der Informationen |
|  | 4 | Strategie des systematischen Variierens  Werkzeugkompetenz Schieberegler im DGS |
| 2 | 1 | Systematisches Variieren eines Parameters  Dokumentation der Beobachtung  Horizontale Verschiebung von Funktionsgraphen |
|  | 4 | Einfluss des Vorzeichens des Parameters auf die Verschieberichtung |
| 4 | 2 | Gerade durch Funktionsgleichung beschreiben  Schnittpunktberechnung bei linearen Funktionen |
|  | 3 | Schnittpunktberechnung |
|  | 4 | Umkehrung: Zu vorgegebenen Schnittpunktsbedingungen Funktionen ermitteln |
|  | 5 | Argumentationskompetenz |