Betragsgleichungen Aufgabenblatt 1

Eine Anwendung von Betragsfunktionen und Betragsgleichungen

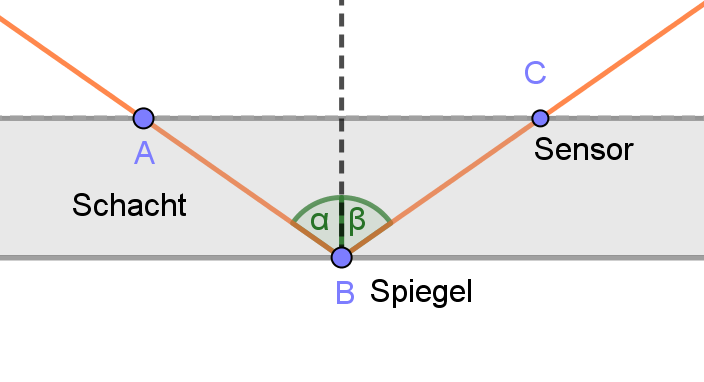


Abbildung 1

In einem Escape-Room müssen die Spieler einen Lichtsensor mit einem Laserstrahl anleuchten, damit sie weiterkommen. Das Problem ist, dass sich der Sensor in einem Schacht befindet und nicht direkt angeleuchtet werden kann. Er kann nur über einen Spiegel, der sich ebenfalls in dem Schacht befindet, angestrahlt werden. (Abbildung 1).

Bei befindet sich das Loch im Schacht, durch das der Lichtstrahl einfallen kann. Bei befindet sich der Mittelpunkt des Spiegels. Im Punkt ist der Sensor angebracht.

Das aus der Physik bekannte *Reflexionsgesetz* besagt, dass die Größe des Einfallswinkels der Größe des Ausfallswinkels entspricht (). Beide Winkel werden auf gegenüberliegenden Seiten der Geraden abgetragen, welche im Punkt senkrecht auf der Spiegelebene steht. Eine solche Gerade wird Lot genannt.

Es geht nun darum, die Positionen der Punkte , und festzulegen. Wenn die Schachtwände parallel zueinander verlaufen, ist wegen der Achsensymmetrie klar, dass der Punkt genau in der Mitte zwischen und , aber auf der gegenüberliegenden Schachtwand liegen muss.

Falls die Schachtwände nicht parallel zueinander verlaufen (Abbildung 2), kann man durch eine geometrische Konstruktion die Lage der Punkte bestimmen.

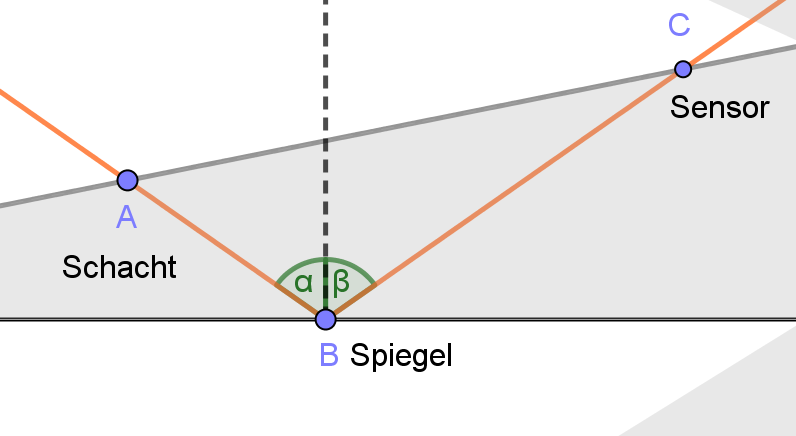
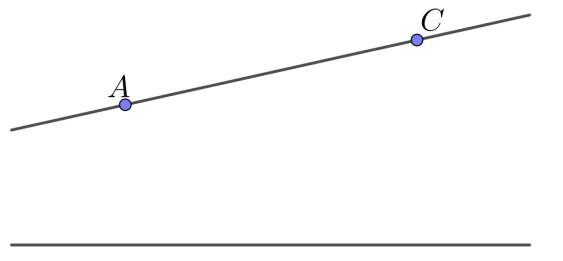
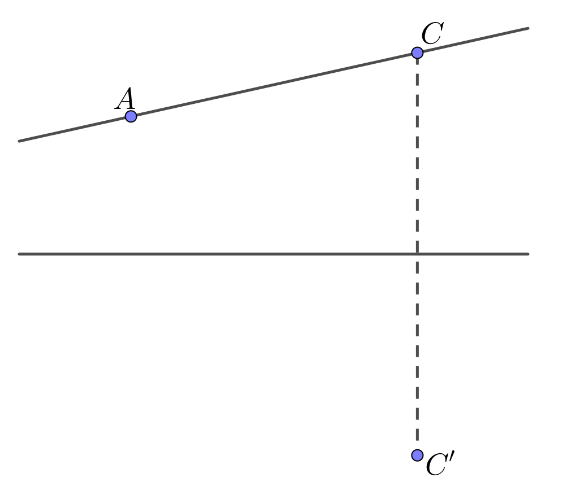


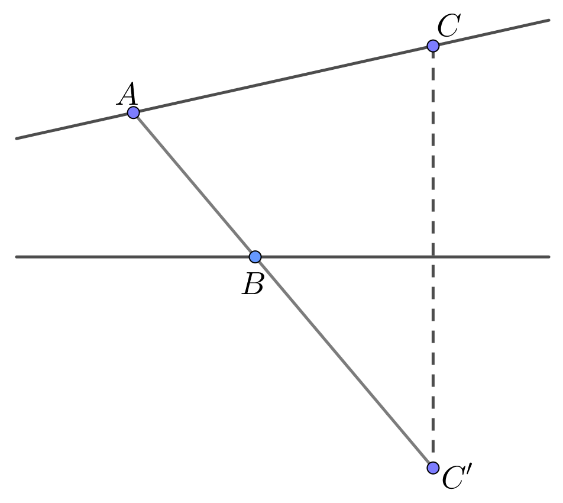
Abbildung 2

Durch die Bilderfolge ist dargestellt, wie man bei fester Lage der Punkte und die Position von Punkt konstruiert. Bearbeite zu dieser Bilderfolge jetzt die **Aufgaben 1 und 2**.

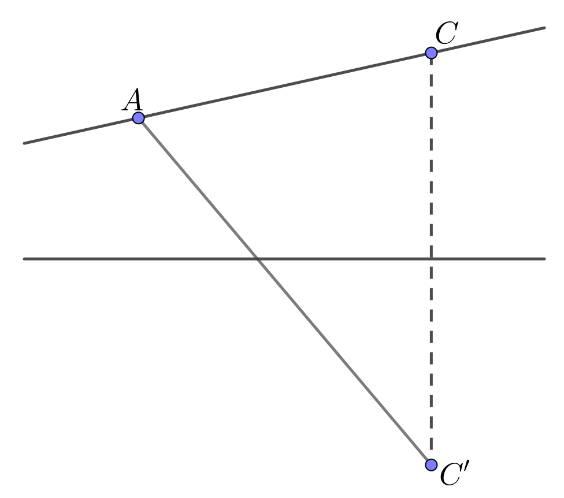
Bilderfolge, Bild 2



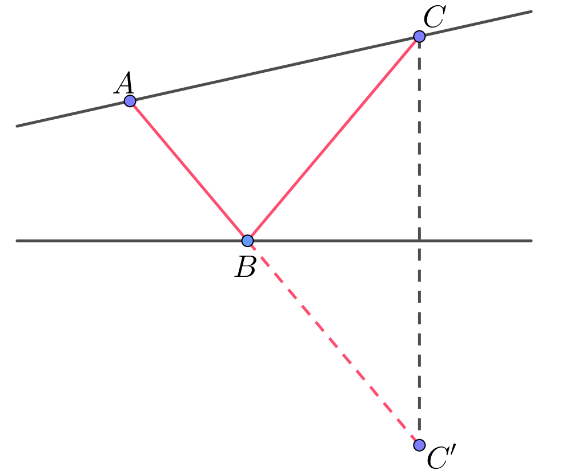
Bilderfolge, Bild 1



Bilderfolge, Bild 4



Bilderfolge, Bild 3



Bilderfolge, Bild 5

Der Entwickler eines Computerspieles möchte ein Spiel programmieren, das diese Aufgabe aus dem Escape-Room darstellt. Im Computer muss die Konstruktion durch eine Rechnung ersetzt werden. Bearbeite dazu die **Aufgabe 3**.

Wenn umgekehrt die Punkte und festliegen, ist die Position des Punktes zu bestimmen. Das kann durch Konstruktion oder durch Rechnung geschehen. Die Konstruktion wird in den **Aufgaben 4 und 5** durchgeführt.

Da der einfallende und der ausfallende Lichtstrahl spiegelsymmetrisch in Bezug auf das Lot sind, kann der Verlauf des Lichtstrahls mit Hilfe einer Betragsfunktion modelliert werden. Die Betragsfunktion mit der Gleichung weist nämlich Achsensymmetrie bezüglich der Geraden auf, die durch die Gleichung beschrieben wird. Bearbeite dazu die **Aufgabe 6**.

Durch Einführen eines Koordinatensystems und Modellierung der Situation mit Betragsfunktionen und linearen Funktionen wird das Problem rechnerisch zugänglich gemacht (Abbildung 3).

Gleichung der linearen Funktion für die obere, schräge Schachtwand: .

Für die Betragsfunktion betrachtet man zunächst die lineare Funktion, deren Graph durch die Punkte und verläuft und bildet anschließend hiervon den Betrag. .

Der zweite Schnittpunkt des Graphen von mit dem Graphen von markiert die Position des Lichtsensors. Man kann seine -Koordinate durch Lösen der Betragsgleichung erhalten. Wie man eine solche Betragsgleichung lösen kann, erfährst du in den weiteren Arbeitsblättern.

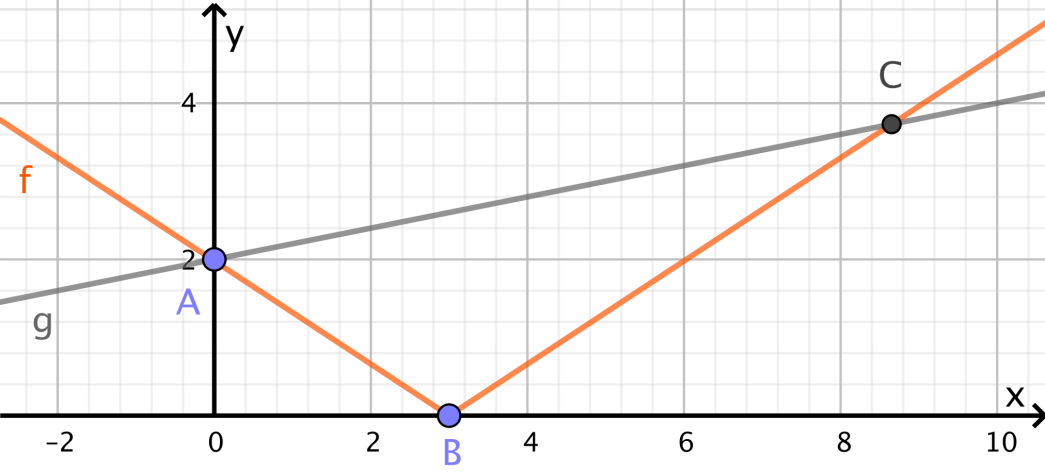


Abbildung 3

Aufgaben

**Aufgaben zur Bestimmung der Lage des Reflexionspunktes .**

1. *Beschreibe, was in der Bilderfolge von Bild zu Bild gemacht wird*.
2. *Führe die Konstruktion aus der Bilderfolge durch, wenn die Punkte* und *gegeben sind und die gerade Schachtwand auf der -Achse liegt. Gib die Koordinaten des ReflexionsPunktes* *an. Erstelle die Konstruktion mit Stift, Lineal und Zirkel oder mit einem Geometrieprogramm*.
3. *Bestimme durch Rechnung die Koordinaten des Punktes* .

**Aufgaben zur Bestimmung der Lage des Sensorpunktes .**

1. *Experimentiere mit der GeoGebra-Datei* „ReflektionenMitBetragsfunktionen1.gbb“*, wie sich der Verlauf des Lichtstrahls verändert, wenn du die Lage der Punkte oder variierst.*

Mit dem Schiebe­regler m kannst du zusätzlich die Steigung der oberen Schachtwand verändern und untersuchen, wie sich die Lage der Punkte verändert, wenn man die schräge Schachtwand verändert.

1. *Bestimme durch Konstruktion die Koordinaten des Sensorpunktes , wenn die schräge Schachtwand durch die Gleichung* *beschrieben wird und die Punkte und die Koordinaten* *und* *haben*.

Du kannst auch die GeoGebra-Datei aus Aufgabe 4 verwenden.

**Aufgaben zur Symmetrieeigenschaft der Graphen von Betragsfunktionen**

1. *Weise rechnerisch die Achsensymmetrie der Betragsfunktion* *mit der Gleichung* *bezüglich der Achse mit der Gleichung* *nach*. *Du musst dazu zeigen, dass*  *für alle Zahlen gilt*.
2. *Begründe mit Hilfe der Datei* „Symmetriebedingung.ggb“ *die Gleichung* *aus Aufgabe 6*.

Betragsgleichungen Aufgabenblatt 2

Gleichungen mit einem Betrag

Gleichungen, die Beträge enthalten, kann man auch formal lösen. Das wichtige Hilfsmittel ist die Fall­unterscheidung. Dadurch werden die Betragsstriche aufgelöst. An zwei Beispielen wird das vorgeführt.

Beispiel 1: *Bestimme die Lösungen der Gleichung* .

Da man nicht weiß, welchen Wert die Variable hat, weiß man auch nicht, ob die Differenz positiv oder negativ ist. Wenn , dann wäre die Differenz positiv oder Null, andernfalls negativ. Deshalb unterscheidet man hier zwischen diesen beiden Fällen, um alle Lösungen der Gleichung zu erhalten.

Fall 1:

Für diesen Fall ist der Betragsinhalt  nicht negativ, also kann man die Betragsstriche auch einfach weglassen.

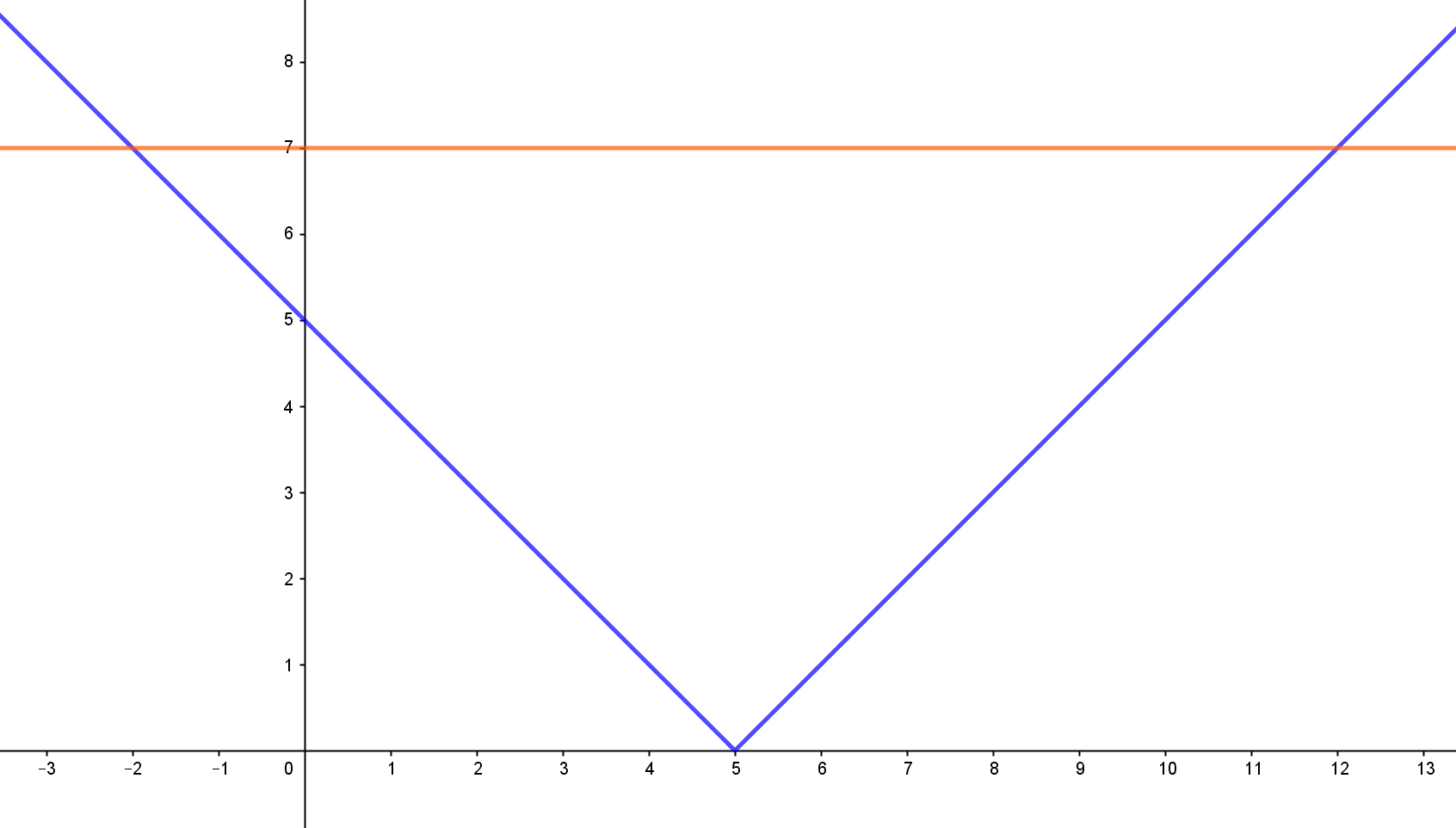
Fall 2:

Für diesen Fall ist der Betragsinhalt negativ, also muss man nach der Definition die Betragsstriche durch die Multiplikation mit ersetzen.

Bevor die Lösungsmenge angegeben werden kann, muss man noch überprüfen, ob die beiden Lösungen innerhalb der Zahlenbereiche des jeweiligen Falls liegen.

Hier ist das so, da und .

Die Gleichung hat also die Lösungen und . Dies kann durch eine Probe oder durch Betrachten der Funktionsgraphen auch bestätigt werden.



Beispiel 2: *Bestimme die Lösungen der Gleichung* .

Fall 1:

Fall 2:

Die Zahlenbereiche der beiden Fälle sind in der Graphik mit unterschiedlichen Farben dargestellt. Außerdem sind auf der Zahlengeraden die beiden gefundenen -Werte dargestellt. Man erkennt, dass der im Fall gefundene Wert (rot) nicht im richtigen Zahlenbereich liegt. Gleiches gilt für den Wert, der im Fall gefunden wurde (grün).



Beide Fälle führen zu einem Widerspruch, da und .

Das heißt, die Gleichung hat keine Lösung.

Aufgaben

1. *Zeige in einem Diagramm, dass die Gleichung aus Beispiel 2 keine Lösung hat, indem du Schnittpunkte der Graphen der Funktionen mit den Gleichungen* *und* *suchst*.
2. *Bestimme rechnerisch die Lösungen der Gleichung durch Fallunterscheidung*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Betragsgleichungen Aufgabenblatt 3

Gleichungen mit mehreren Beträgen

Eine Gleichung kann auch gelöst werden, wenn in ihr mehrere Beträge stehen. Es sind dann jedoch mehr Fälle zu unterscheiden als bei nur einem Betrag.

Bei zwei verschiedenen Beträgen treten vier Fälle auf.

Beispiel: *Bestimme die Lösungen der Gleichung* .

Fall 1: und und

Fall 2: und und

Fall 3: und und

Fall 4: und und

Wenn man die Bedingungen für die vier verschiedenen Fälle betrachtet, so kann man in jedem der vier Fälle die Bedingungen vereinfachen.

Für Fall 1 sollen beide Terme nichtnegativ sein. Dies ist für den zweiten Term erst dann der Fall, wenn . Damit ist aber auch bereits die Bedingung für den ersten Term erfüllt.

Die vier Fälle lassen sich also wie folgt zusammenfassen:

Fall 1:

Fall 2:

Fall 3: ist nicht möglich, da es keine Werte gibt, die sowohl kleiner als -1 als auch größer als 2 sind.

Fall 4:

Die Beträge werden nun aufgelöst:

Fall 1:

In diesem Fall sind beide Betragsinhalte und positiv. Alle Betragsstriche können weggelassen werden.

Fall 2:

In diesem Fall ist der Betragsinhalt positiv, aber der Betragsinhalt negativ. Daher müssen die Vorzeichen geändert werden, wenn dort die Betragsstriche aufgelöst werden.

Fall 4:

8

Nur im Fall 1 liegt der gefundene Wert in dem passenden Zahlenbereich.

Aufgaben

1. *Stelle das Ergebnis des Beispiels durch ein Diagramm auf der Zahlengeraden wie im Aufgabenblatt 1 dar*.
2. *Löse die Gleichungen rechnerisch durch Fallunterscheidungen. Überprüfe jeweils die Lösung durch Betrachten der Schnittpunkte von Funktionsgraphen*.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

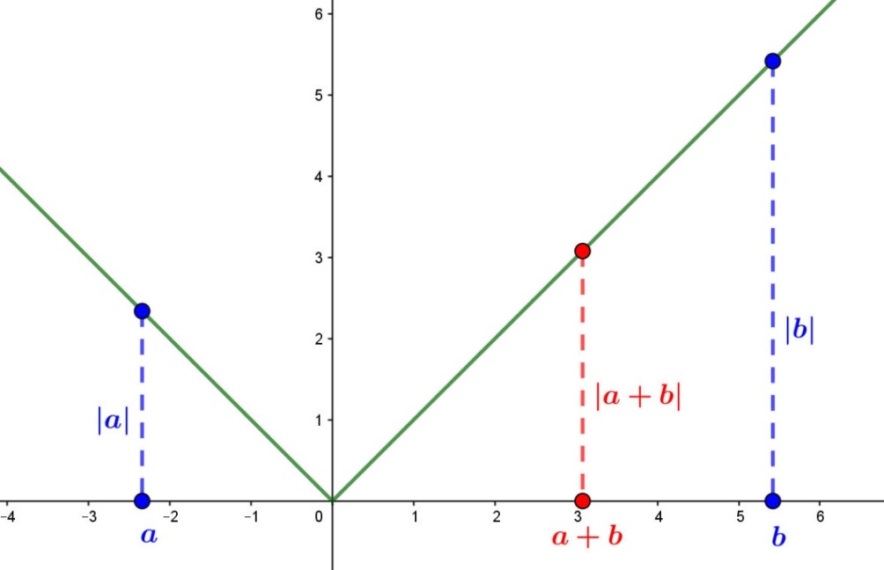
Betragsgleichungen Aufgabenblatt 4

Umformen von Beträgen

* 1. *Vergleiche die Werte der Terme* *und* *für unterschiedliche Werte von und* :

1. ,
2. ,
3. ,
4. ,

*Formuliere eine Beobachtung*.



1. Die Abbildung liefert eine Begründung für die Beobachtung. *Erkläre das*.

In den Aufgaben 1 und 2 hast du gesehen und begründet, dass man bei der Summe von Beträgen aufpassen muss. In manchen Fällen ist , in anderen ist aber . Zusammengefasst gilt . Diese Ungleichung wird „Dreiecksungleichung“ genannt.

1. In dieser Aufgabe sollst du nun untersuchen, wie es bei dem Produkt von Beträgen ist.  
   *Vergleiche die Werte der Terme* *und* *für unterschiedliche Werte von und* :
2. ,
3. ,
4. ,
5. ,

*Formuliere eine Beobachtung*.

1. Das Ergebnis von Aufgabe 3 kannst du nutzen, um die folgenden Gleichungen zu lösen. Beachte, dass du die binomische Formel oder den Satz von Vieta anwenden kannst.

An einem Beispiel wird ein möglicher Lösungsweg vorgeführt.

Löse die Gleichung .

Schreibe den Betrag der quadratischen Funktion zunächst als Produkt von zwei Beträgen: .

Untersuche nun die möglichen Fälle.

Wenn , sind beide Betragsinhalte negativ. Zu lösen ist die Gleichung

.

Nur die Lösung liegt im Intervall .

Wenn , ist und . Zu lösen ist die Gleichung

.

Beide Lösungen liegen im Intervall .

Wenn , sind beide Betragsinhalt größer oder gleich 0. Somit können die Betragsstriche

durch Klammern ersetzt werden. Zu lösen ist die Gleichung

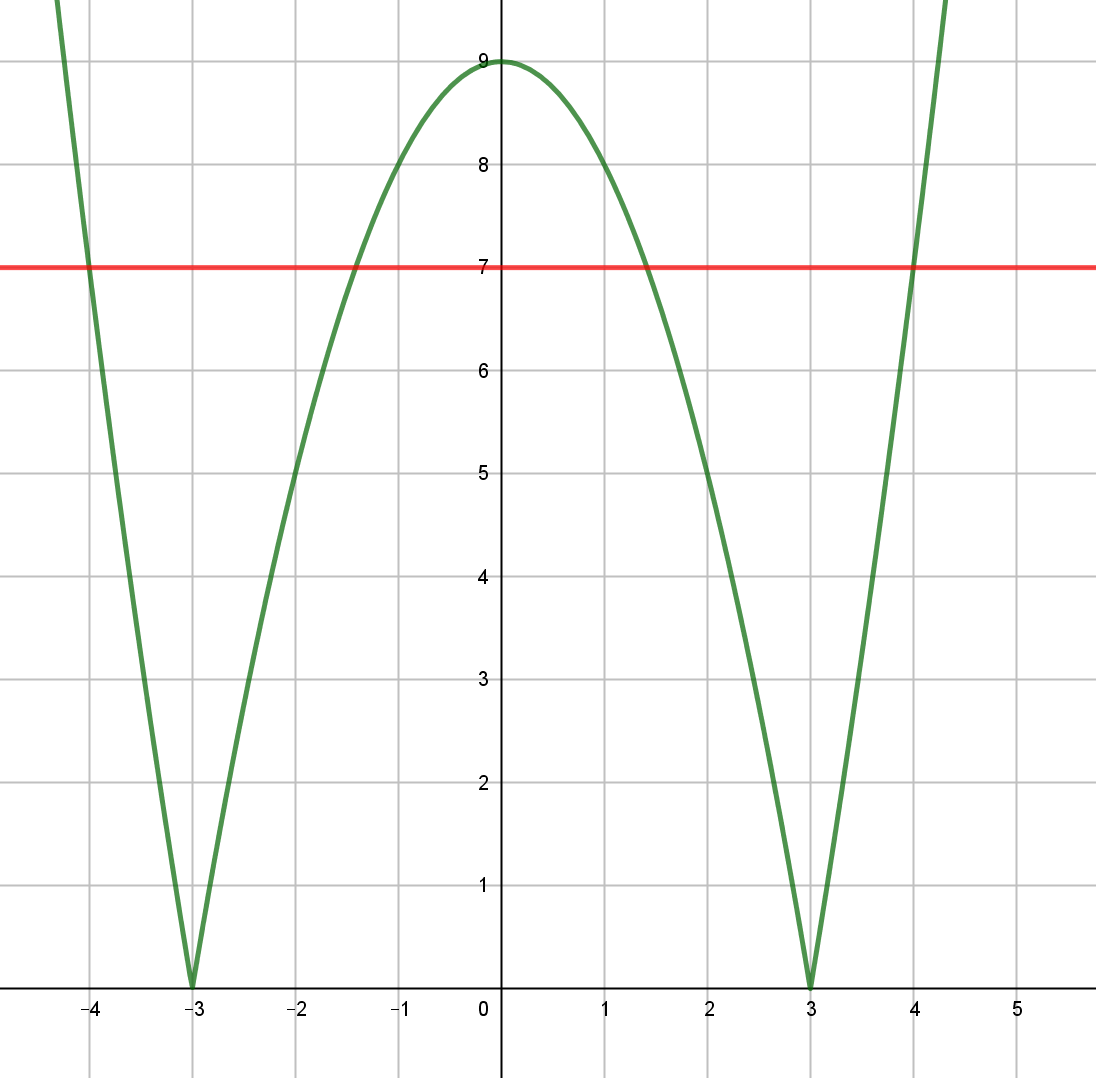
.

Nur die Lösung liegt im Intervall .

Zusammengefasst gibt es somit vier Lösungen der Gleichung:

.

In der Graphik sind die Lösungen zu sehen:



Löse nun die folgenden Gleichungen

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |