Betragsfunktionen Lehrerkommentare

Die Materialien zu den Betragsfunktionen bestehen aus fünf Aufgabenblättern, die zur Differenzierung und individuellen Förderung im Unterricht gedacht sind. Das Anspruchsniveau in den Aufgabenblättern ist ansteigend. Daher sollten die Aufgabenblätter in der angebotenen Reihenfolge eingesetzt werden. Der Einsatz ist möglich als Erweiterung der Unterrichtsinhalte zum Themenbereich der linearen Funktionen.

Die Aufgaben dienen einerseits dazu, die inhaltlichen Kompetenzen zu den linearen Funktionen aus dem Unterricht zu trainieren und im neuen Kontext der Betragsfunktionen anzuwenden. Andererseits werden Kenntnisse über Betragsfunktionen auf unterschiedlichen Niveaustufen erworben.

Konkrete Voraussetzungen für den Einsatz der Materialien:

* Der Funktionsbegriff und die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen (Graph, Tabelle, Text, Term) müssen beherrscht werden.
* Geradengleichungen müssen bekannt sei.
* Die Bedeutung der Formvariablen in den Gleichungen (Steigung und Achsenabschnitt) muss bekannt sein.
* Die Schülerinnen und Schüler müssen mit einer DGS, zum Beispiel GeoGebra, umgehen können, so dass sie Geraden darstellen können.
* Die DGS sollte für die Unterrichtsstunden, in denen die Aufgabenblätter eingesetzt werden, zur Verfügung stehen.
* Die Schülerinnen und Schüler sollten Bildern aus Strecken zusammensetzen können. Insbesondere sollte ihnen bekannt sein, wie man den Definitionsbereich so einschränkt, dass nur ein Teil des Funktionsgraphen im Koordinatensystem dargestellt wird.

**Aufgabenblatt 1** geht von den Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler aus. Zum Start sollen sie in Aufgabe 1 ein Quadrat aus Strecken zeichnen. Dabei verwenden sie vier verschiedene Terme linearer Funktionen, jeweils eingeschränkt auf einen geeigneten Bereich. Sie nutzen hier ihre bereits im vorhergehenden Regelunterricht erworbene Kompetenz, zu einer vorgegebenen Geraden eine Funktionsgleichung zu erstellen.

Anschließend wird das Ziel des Aufgabenblattes formuliert. Mit anderen Funktionen soll die Erstellung solcher Bilder zu vereinfachen sein. Dazu wird in der zweiten Aufgabe die noch unbekannte Betragsfunktion vorgegeben. Sie wird zunächst als black box eingesetzt. Die neue Funktion erzeugt die untere Hälfte des Quadrates. Die Schülerinnen und Schüler beobachten und beschreiben das entstehende Bild.

In Aufgabe 3 wird genauer untersucht, welche arithmetischen Eigenschaft die Betragsfunktion hat. Es ist nicht unbedingt zu erwarten, dass die Schülerinnen und Schüler bereits unmittelbar aus dem Graphen erkennen werden, dass das Vorzeichen von negativen Argumenten positiv wird. Daher wird ihnen als Hilfestellung ein Darstellungswechsel empfohlen. Sie nutzen und erweitern dabei in einem neuen Kontext ihre Kompetenz, eine Wertetabelle zu erstellen und daraus Informationen zu gewinnen.

Durch Parametervariation wird in Aufgabe 4 der obere Teil des Quadrates erzeugt. Die Strategie des systematischen Probierens mit immer neuer Veränderung der Geradengleichung ist sinnvoll, aber auch langwierig. Günstiger ist es, die Variationen mit Hilfe eines Schiebereglers durchzuführen. Für den Fall, dass diese Kompetenz noch nicht erworben worden ist, ist eine Hilfe in den Aufgabentext eingebaut.

Die Aufgabe 1 ist eine reine Übungsaufgabe zu den linearen Funktionen. Sie knüpft damit direkt an den vorhergegangenen Unterricht an. Aufgabe 2 kann ebenfalls von allen Schülerinnen und Schülern gelöst werden, da sie nur eine Eingabe im Geometrieprogramm verlangt.

Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler, die auch Lösungen zu den Aufgaben 3 und 4 erarbeitet haben, können diese anschließend für die gesamte Lerngruppe vorstellen. Besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler können formulieren, welchen Einfluss die Parametervariationen auf die Form der Graphen haben. Der Einfluss des Vorfaktors und der Einfluss des Summanden sind dabei aus der Betrachtung der linearen Funktionen bekannt und werden auf die neue Funktionsklasse übertragen.

Während bei den linearen Funktionen die Verschiebungen parallel zur waagerechten Achse keine Rolle spielen, haben sie bei den Betragsfunktionen eine Bedeutung. In **Aufgabenblatt 2** werden diese Verschiebungen systematisch untersucht.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden in Aufgabe 2 genutzt, um zwei Quadrate nebeneinander zu erzeugen.

Wenn die Schülerinnen und Schüler diese Kenntnisse weiter vertiefen möchten, können Sie in Aufgabe 3 die Kette der Quadrate beliebig verlängern.

In Aufgabe 4 wird der Schwerpunkt auf die Bedeutung des Vorzeichens des Parameters gelegt. Diese Kompetenz wird bei der Verschiebung von Parabel zu einem späteren Zweitpunkt auch von allen Schülerinnen und Schülern zu erwerben sein.

In **Aufgabenblatt 3** gibt es nur eine Aufgabe, bei der die Vorkenntnisse über das Verschieben nach oben und die in Blatt 2 erworbenen Kenntnisse zu kombinieren sind. Wenn Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe lösen, zeigen sie damit, dass sie solche Kombinationen leisten können.

Die abschließenden Aufgabenblätter schlagen den Bogen zu den Betragsgleichungen, indem Schnittpunkte von Graphen der Betragsfunktionen betrachtet werden. Es geht jedoch nicht um eine formale Vorgehensweise mit Fallunterscheidungen. Vielmehr wird die Lösung stets auf die bekannte Vorgehensweise bei den linearen Funktionen zurückgeführt.

In **Aufgabenblatt 4** werden ausschließlich Schnittpunkte des nicht verschobenen Graphen der Betragsfunktion mit Geraden betrachtet. In besonderer Weise wird immer das Wechselspiel zwischen der graphischen und der rechnerischen Betrachtung angeregt.

In Aufgabe 1 wird ausschließlich graphisch gearbeitet. Die Zahl der Schnittpunkte ist anzugeben. Diese graphische Untersuchung ist auch auf einem grundlegenden Niveau möglich.

Aufgabe 2 gibt den Hinweis, die rechnerische Betrachtung dadurch zu leisten, dass die Betragsfunktion durch zwei lineare Funktionen ersetzt wird. Hier sind zwei Kompetenzen erforderlich: die Angabe einer Funktionsgleichung aus dem Graphen und die Berechnung des Schnittpunktes von linearen Funktionen. Beide Kompetenzen sollten aus dem Unterricht über lineare Funktionen vorliegen, so dass es sich bei dieser Aufgabe um eine Übertragung auf einen anderen Kontext handelt.

Anspruchsvoller sind die Lösungen der Aufgaben 4 und 5.

Vom Text der Aufgaben 4 her sollen zunächst Funktionsgleichungen angegeben werden, so dass die theoretische Durchdringung im Vordergrund steht. Die Graphik wird zur Überprüfung eingesetzt. Leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler können die Aufgabe auch durch systematisches Probieren auf der graphischen Ebene lösen.

In Aufgabe 5 kann die allgemeingültige Begründung nicht durch die Betrachtung von Beispielen geleistet werden. Hier ist die Argumentationskompetenz gefordert. Eine mögliche Argumentation kann in drei Schritten erfolgen.

* Die Betragsfunktion wird in zwei lineare Funktionen aufgespalten.
* Zwei lineare Funktionen haben höchstens einen Schnittpunkt.
* Damit kann es höchstens zwei Schnittpunkte zwischen den Graphen einer Betragsfunktion und einer linearen Funktion geben.

**Aufgabenblatt 5** führt das Aufspalten von Betragstermen in zwei lineare Terme weiter. Hier werden jetzt auch verschobene Graphen von Betragsfunktionen betrachtet. Insgesamt führt dieses Aufgabenblatt zur formalen Definition des Betrages, wie sie in den Formelsammlungen zu finden ist. Dabei ist es wichtig, die Definitionsbereiche der linearen Funktionen geeignet einzuschränken.

Diese Einschränkungen werden in den Aufgaben 1 und 2 an einem konkreten Beispiel durchgeführt, so dass damit in Aufgabe 3 eine Gleichung gelöst werden kann.

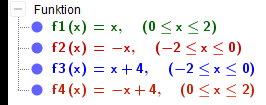
In den Aufgaben 4 und 5 wird die formale Definition des Betrages eingeübt.

In Aufgabe 6 sind die erworbenen Kompetenzen auf das Lösen von Gleichungen angewendet und ein Übergang zur systematischen Betrachtung von Betragsgleichungen angebahnt.

Betragsfunktionen Lösungsbeispiele

**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 1**

Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

Auf dem Zeichenblatt wird die untere Hälfte des Quadrates dargestellt.

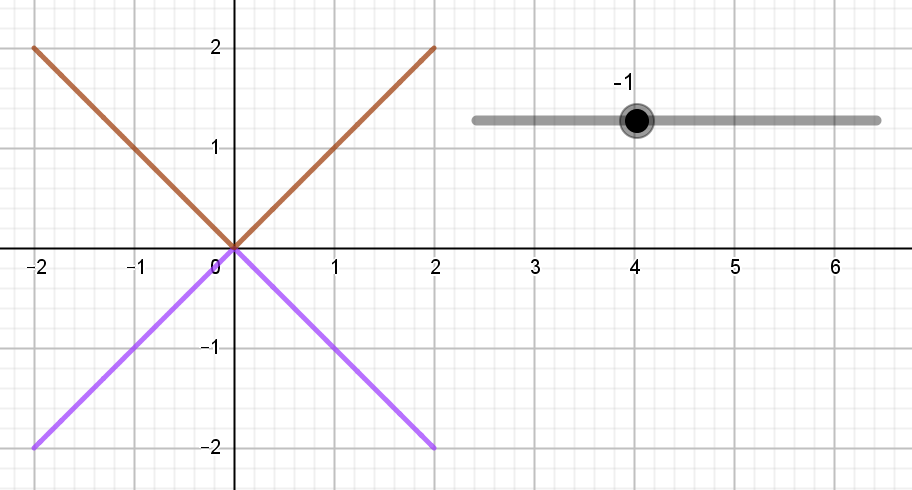
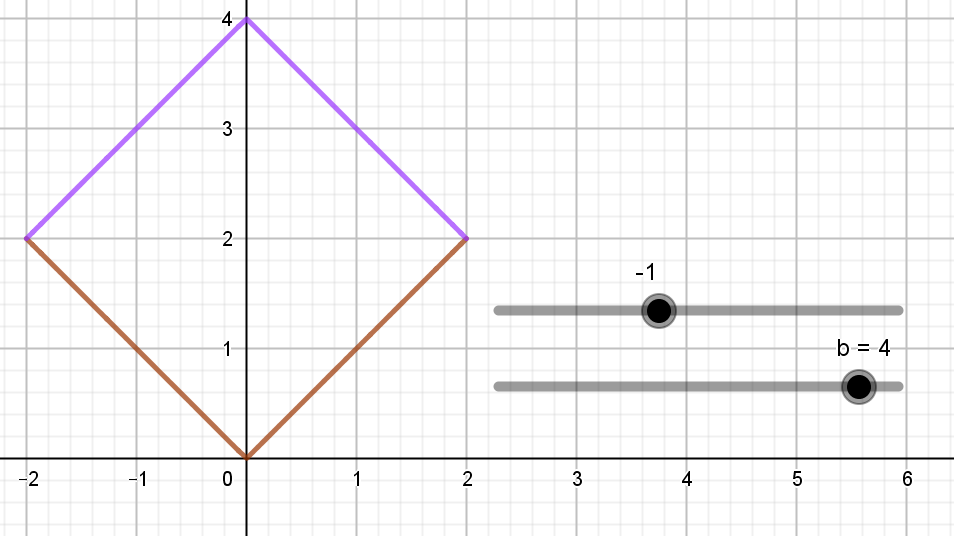
Aufgabe 3:

Wertetabelle

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -Wert | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| Funktionswert | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |

Bei negativen -Werten wird das Minuszeichen entfernt. Die anderen Werte bleiben unverändert.

Aufgabe 4:

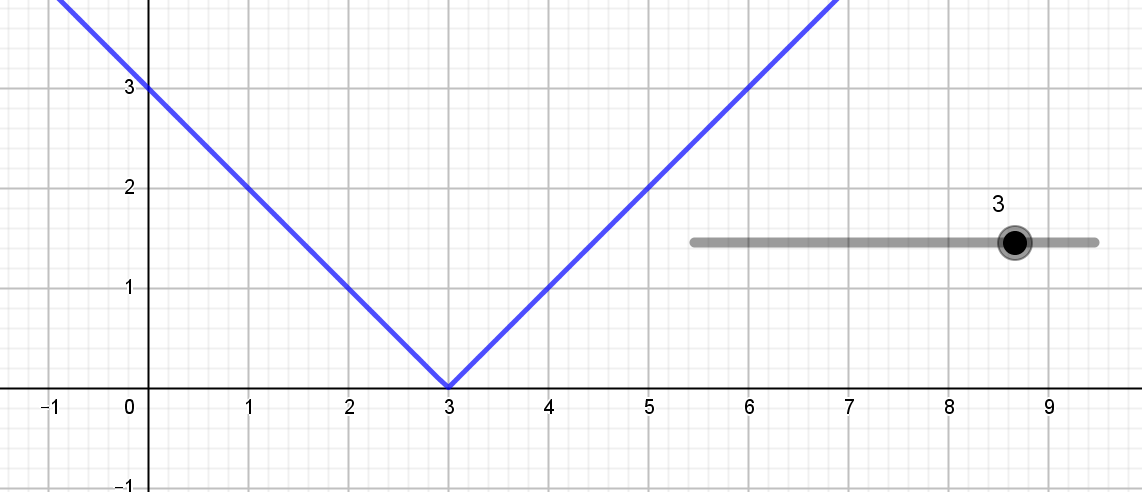
 

Hilfreich sind an dieser Stelle die Kenntnisse über die Steigung und den Achsenabschnitt bei den linearen Funktionen:

* Die Spitze muss in den Punkt verschoben werden.
* Die Steigung der beiden Äste des Graphen muss angepasst werden. Dabei können die Schülerinnen und Schüler auf die Idee eines negativen Faktors kommen, wenn sie sich dran erinnern, dass bei den linearen Funktionen dadurch das Steigungsverhalten umgekehrt wird.

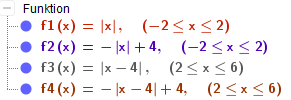
**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 2**

Aufgabe 1:

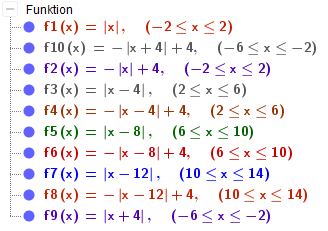


Vermutung: Durch wird der Funktionsgraph verschoben. Die Spitze liegt jetzt im Punkt .

Aufgabe 2:

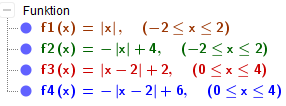


Aufgaben 3 und 4:



Durch die Funktionen f4 bis f8 wird die Kette nach rechts verlängert, durch die Funktionen f9 und f10 nach links.

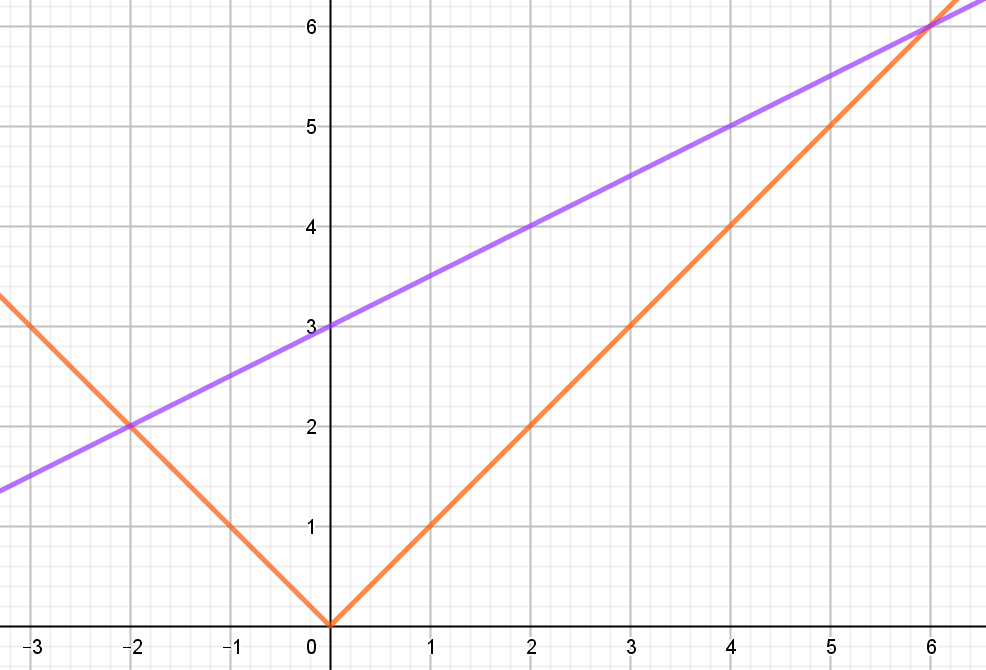
**Lösungsbeispiel zur Aufgabe von Aufgabenblatt 3**



Alternativ kann das Bild auch mit zwei Betragsfunktionen, jeweils im Bereich , und einer linearen Funktion erstellt werden. Dann wird das Bild unabhängig von den Transformationen der einfachen Betragsfunktion erstellt.

**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 4**

Aufgabe 1



Zu erkennen sind zwei Schnittpunkte mit den Koordinaten und .

Aufgabe 2:

Der linke Teil des Graphen kann durch die Funktion mit der Gleichung der rechte Teil durch die Funktion mit der Gleichung beschrieben werden.

Schnittpunkt der Graphen von und :

.

.

Also .

Schnittpunkt der Graphen von und :

.

.

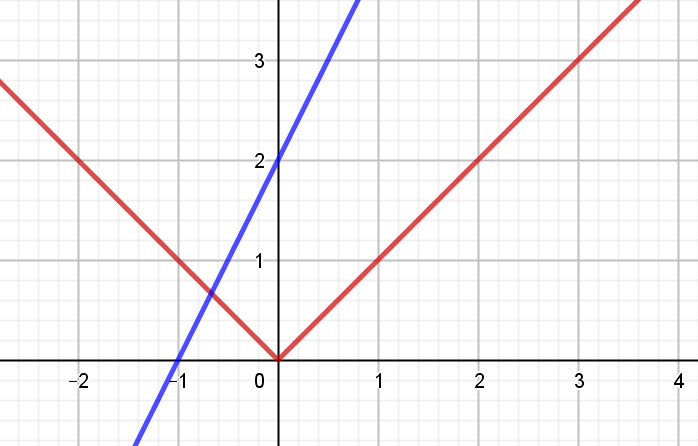
Also .

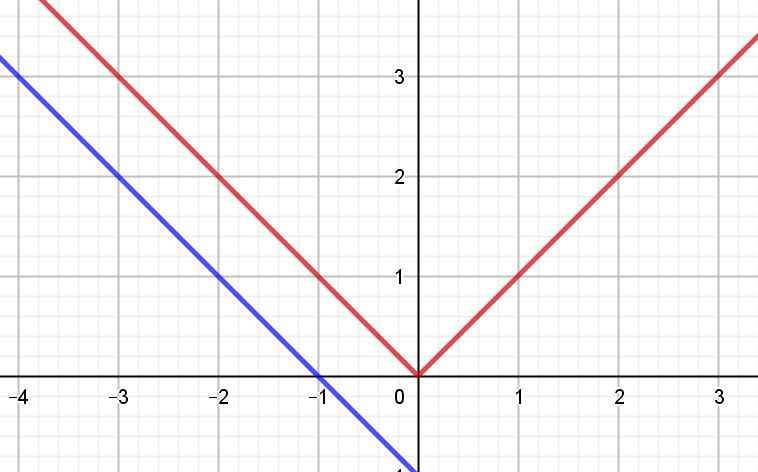
Aufgabe 3

1. ;
2. ;

Aufgabe 4

Mögliche Funktionen:

Ein Schnittpunkt:  

Kein Schnittpunkt:  

Aufgabe 5:

Mögliche Argumentationskette:

* Die Betragsfunktion wird in zwei lineare Funktionen aufgespalten.
* Zwei lineare Funktionen haben höchstens einen Schnittpunkt.
* Damit kann es höchstens zwei Schnittpunkte zwischen den Graphen einer Betragsfunktion und einer linearen Funktion geben.

**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 5**

Aufgabe 1:

Linker Teil: ; Rechter Teil: .

Aufgabe 2:

Bereich für die linke Funktion: ; Bereich für die rechte Funktion: .

Es ist zu erwarten, dass die Schülerinnen und Schüler den Wert an dieser Stelle noch nicht berücksichtigen.

Aufgabe 3:

Schnittpunkt mit dem linken Teil des Graphen von :

,

, also .

Schnittpunkt mit dem rechten Teil des Graphen von :

,

, also .

Aufgabe 4:

|  |  |
| --- | --- |
| a) |  |
| b) |  |
| c) |  |

Aufgabe 5:

a) b)

|  |  |
| --- | --- |
| c) |  |
| d) |  |

Aufgabe 6:

1. Falls ist die Gleichung zu lösen. Lösung: .   
   Wegen ist .

Falls ist die Gleichung zu lösen. Lösung: .  
Wegen ist .

1. Falls ist die Gleichung zu lösen. Lösung: .  
   Wegen =6 ist .  
   Falls ist die Gleichung zu lösen. Lösung: .  
   Wegen ist .

Betragsfunktionen: Zusammenstellung der Kompetenzen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Arbeitsblatt** | **Aufgabe** | **Kompetenz** |
| 1 | 1 | Gerade durch Funktionsgleichung beschreiben |
|  | 2 | Werkzeugkompetenz Dynamisches Geometriesystem  Beschreiben eines Graphen |
|  | 3 | Darstellungswechsel Graph – Wertetabelle  Entnehmen von Informationen aus der Wertetabelle  Dokumentieren der Informationen |
|  | 4 | Strategie des systematischen Variierens  Werkzeugkompetenz Schieberegler im DGS |
| 2 | 1 | Systematisches Variieren eines Parameters  Dokumentation der Beobachtung  Horizontale Verschiebung von Funktionsgraphen |
|  | 4 | Einfluss des Vorzeichens des Parameters auf die Verschieberichtung |
| 4 | 2 | Gerade durch Funktionsgleichung beschreiben  Schnittpunktberechnung bei linearen Funktionen |
|  | 3 | Schnittpunktberechnung |
|  | 4 | Umkehrung: Zu vorgegebenen Schnittpunktsbedingungen Funktionen ermitteln |
|  | 5 | Argumentationskompetenz |