Bruchfunktionen Lehrerkommentare

Die Materialien zu den Bruchfunktionen bestehen aus fünf Aufgabenblättern, die zur Differenzierung und individuellen Förderung im Unterricht gedacht sind. Das Anspruchsniveau in den Aufgabenblättern ist ansteigend. Daher sollten die Aufgabenblätter in der angebotenen Reihenfolge eingesetzt werden. Der Einsatz ist möglich als Erweiterung der Unterrichtsinhalte zum Themenbereich der quadratischen Funktionen.

Die Aufgaben dienen einerseits dazu Kenntnisse über Bruchfunktionen auf verschiedenen Niveaustufen zu vermitteln, und andererseits dazu Kenntnisse über Transformation quadratischer Gleichungen zu trainieren.

Konkrete Voraussetzungen für den Einsatz der Materialien:

* Der Funktionsbegriff und die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen (Graph, Tabelle, Text, Term) müssen beherrscht werden.
* Lineare und quadratische Funktionen müssen bekannt sei.
* Die Verschiebung von Funktionsgraphen am Beispiel von Parabeln muss bekannt sein.
* Die Schülerinnen und Schüler müssen mit einer DGS, zum Beispiel GeoGebra, umgehen können, so dass sie Funktionsgraphen darstellen können.
* Die DGS sollte für die Unterrichtsstunden, in denen die Aufgabenblätter eingesetzt werden, zur Verfügung stehen.
* Den Schülerinnen und Schüler sollte bekannt sein, wie man den Definitionsbereich so einschränkt, dass nur ein Teil des Funktionsgraphen im Koordinatensystem dargestellt wird.
* Der Satz von Pythagoras muss bekannt sein.
* Die Lösung einfacher Bruchgleichungen sollte beherrscht werden.

Die Verwendung von **Aufgabenblatt 1** ist für das vorgestellte Modul optional. Es empfiehlt es, dass leistungsstarke Schülerinnen und Schüler direkt mit Aufgabenblatt 2 beginnen.

**Aufgabenblatt 1** geht von einem Anwendungsbeispiel zu einer einfachen Bruchfunktion aus. Das Beispiel ist den Schülerinnen und Schülern von den antiproportionalen Zuordnungen bekannt.

Die Aufgaben 1 bis 3 sind Rechenaufgaben im Kontext von Rechtecken, die von allen Schülerinnen und Schülern bewältigt werden sollten.

Auch Aufgabe 4 erfordert beim Übertragen der Wertepaare in ein Koordinatensystem ausschließlich Kenntnisse, die bei allen Schülerinnen und Schülern verfügbar sein sollten.

In Aufgabe 5 ist das bei den bisherigen Rechnungen verwendete Muster zu erkennen und in Form eines allgemeinen Terms aufzuschreiben. Da das Muster sehr einfach ist, ist der Schwierigkeitsgrad hier nicht besonders hoch.

Das Zeichnen eines Graphen zu einem Funktionsterm ist allen Schülerinnen und Schülern geläufig. Neuer Aspekt ist in Aufgabe 6 der Bruchterm.

Während bis zu dieser Stelle ausschließlich mit einem Flächeninhalt von gearbeitet wurde, erfolgt in der abschließenden Aufgabe 7 der Übergang zu anderen Flächeninhalten.

**Aufgabenblatt 2** regt dazu an, sich mit den Graphen von Bruchfunktionen zu beschäftigen und aus ihnen Bilder zusammenzusetzen.

Zunächst wird die zu erstellende Parkettierung als Motivation vorgestellt. Anschließend erforschen die Schülerinnen und Schüler die Graphen von Funktionen mit einer Gleichung der Form , um die Grundfigur der dargestellten Parkettierung selbst erstellen zu können.

Damit es nicht eine reine Spielerei ist und ein nachhaltiger Lernerfolg sich einstellt, sollen sie ihre Beobachtungen bezüglich Gemeinsamkeiten und Unterschieden festhalten.

In Aufgabe 2 ist die zu verwendende Gleichung vorgegeben. Damit kann diese Aufgabe auch von Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden, die in der vorhergehenden Aufgabe keine oder nur zu wenige Eigenschaften gefunden haben. Die Schülerinnen und Schüler werden erkennen, dass erst nur die Hälfte des Bildes dargestellt wird.

In Aufgabe 3 ist der Rest des Bildes zu ergänzen. Die im Zusammenhang mit den Transformationen von Parabeln erworbenen Kenntnisse über die Spiegelung des Graphen an der waagerechten Achse sind dabei anzuwenden.

In Aufgabe 4 muss der Definitionsbereich eingeschränkt werden, damit die Figur aus den beiden Funktionsgraphen quadratisch wird. Die Einschränkung auf der senkrechten Achse kann für Schülerinnen und Schüler ein Problem sein. Hier könnte ein Hinweis der Lehrkraft erforderlich sein, dass eine Einschränkung auf der senkrechten Achse durch geeignete Einschränkung des Definitionsbereiches in der Umgebung von 0 realisiert werden kann.

**Aufgabenblatt 3** greift die Konstruktion aus Aufgabenblatt 2 wieder auf und erweitert diese, um eine Parkettierung zu erreichen. Dabei beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler automatisch mit dem Symmetriezentrum von Graphen von Bruchfunktionen der Form bzw. .

In den Aufgabe 1 bis 3 erforschen die Schülerinnen und Schüler die Lage eines Symmetriezentrums für den Graphen einer Bruchfunktion bzw. dem dazu an der waagerechten Achse gespiegelten Graphen.

In Aufgabe 1 und 2 werden notwendige Vorüberlegungen für die Konstruktion des Kreises getätigt, damit in Aufgabe 3 der Kreis konstruiert werden kann. Die Beobachtung, dass der Berührpunkt stets auf einer der Winkelhalbierenden des Kreises liegt, wird im Aufgabenblatt 4 wieder benötigt und sollte daher von allen Schülerinnen und Schülern getätigt werden. Eine funktionale Beschreibung der Winkelhalbierenden als Graph einer linearen Funktion ist an dieser Stelle noch nicht notwendig, kann aber von leistungsstarken Schülerinnen und Schülern getätigt werden.

In Aufgabe 4 soll die Vorlage der Parkettierung erstellt werden. Dazu müssen die Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse über die Transformation von Parabeln die vorliegenden stückweise definierten Bruchfunktionen anwenden. Wichtig ist dabei die Erkenntnis, dass in diesem Fall dem Kreismittelpunkt bei den Bruchfunktionen die gleiche Bedeutung wie dem Scheitelpunkt des Graphen einer quadratischen Funktion zukommt.

An dieser Stelle ist es sinnvoll die Schülerinnen und Schüler zu einem methodischen Vorgehen anzuhalten. Sie sollten zunächst versuchen eine Verschiebung nur in eine Richtung zu erreichen. Wichtige Fragestellungen dabei sind zum Beispiel: „Wie weit muss der Mittelpunkt des Kreises, und damit die ganze Figur, verschoben werden?“ und „Wie muss ich den Funktionsterm anpassen, um eine gewünschte Verschiebung zu erreichen?“

Zu beachten ist hierbei, dass auch die einschränkenden Bedingungen angepasst werden müssen. Für Schülerinnen und Schüler, die dies nicht selbst erkennen, könnte es hilfreich sein, zunächst die Funktionsgraphen ohne einschränkende Bedingungen zu verschieben.

**Aufgabenblatt 4** greift die Konstruktion des Kreises aus dem vorhergehenden Aufgabenblatt auf und führt über die Betrachtung der Radien von Kreisen bei unterschiedlichen Werten von a auf den Graphen der Wurzelfunktion und das Lösen von Bruchgleichungen.

In Aufgabe 1 wird anhand der gegebenen GeoGebra-Datei eine Wertetabelle erstellt. Dies sollte für alle Schülerinnen und Schüler ohne Probleme durchführbar sein. Damit die Erstellung der Wertetabelle nicht ins Leere läuft werden die erhaltenen Werte in Aufgabe 2 als Punkte weiterverwendet und in Aufgabe 3 als Teil eines Funktionsgraphen interpretiert.

Bei der Erstellung der Wertetabelle muss darauf geachtet werden, dass die Werte von a einen möglichst großen Bereich abdecken. Andernfalls ist der Verlauf der Wurzelfunktion nur schwer zu erkennen.

In Aufgabe 4 wird der Graph der Wurzelfunktion eingeführt, ohne jedoch die Wurzelfunktion zu benennen. Die Anpassung des Graphen in Aufgabe 5 sollte durch systematisches Probieren auch allen Schülerinnen und Schülern möglich sein.

In Aufgabe 6 und 7 werden die Beobachtungen aus den ersten fünf Aufgaben aufgegriffen und rechnerisch überprüft. Zur Bearbeitung der Aufgabe 6 muss eine Bruchgleichung gelöst werden.

In Aufgabe 7 muss zunächst das rechtwinklige Dreieck erkannt werden und die Länge des Radius mit dem Satz von Pythagoras bestimmt werden.

In Aufgabe 8 werden die Berechnungen aus den Teilen 6 und 7 verallgemeinert. Diese Aufgabenstellung führt auf die Lösung einer Gleichung mit Parameter und ist nur für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler geeignet.

**Aufgabenblatt 5** behandelt die Eigenschaften der Graphen von Bruchfunktionen. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich an dieser Stelle zum einen mit bereits bekannten Eigenschaften von Funktionsgraphen auseinandersetzen, und zum anderen bisher unbekannte Eigenschaften genauer untersuchen. Dabei wird bereits die Idee eines intuitiven Grenzwertbegriffes aufgegriffen. Das letzte Arbeitsblatt ist also durchaus auch für eine Verwendung in der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe geeignet.

In Aufgabe 1 sollen die Eigenschaften nur beschrieben werden. Aus der graphischen Anschauung heraus sollten alle Schülerinnen und Schüler erkennen können, dass der Graph punktsymmetrisch ist und es keine Achsenschnittpunkte gibt. Außerdem ist erkennbar, dass der Graph in zwei nicht zusammenhängende Teilstücke vorliegt.

In Aufgabe 2 bis 5 sollen die Achsenschnittpunkte bzw. die Nichtexistenz von Achsenschnittpunkten untersucht werden. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler zunächst argumentativ arbeiten.

In Aufgabe 3 wird mit Hilfe einer Tabelle eine Entwicklung der Funktionswerte bei Annäherung an die Polstelle 0 von rechts betrachtet. Die Beobachtung, dass die Funktionswerte immer größer werden, je weiter man sich der 0 nährt, sollte für alle Schülerinnen und Schüler möglich sein.

Aufgabe 4 überträgt die gleiche Idee auf die Annäherung von links. Die Tabelle müssen die Schülerinnen und Schüler an dieser Stelle jedoch selbst erstellen.

In Aufgabe 5 werden die Schnittpunkte mit der Rechtsachse untersucht. Dabei kann es dazu kommen, dass bei Verwendung eines Taschenrechners, als Funktionswert 0 angezeigt wird, obwohl dies nicht möglich ist. Eine Diskussion über Rundungsfehler bei der Nutzung digitaler Hilfsmittel ist an dieser Stelle dann angebracht.

Eine analytische Untersuchung der Symmetrieeigenschaften in Aufgabe 6 ist von den fachlichen Voraussetzungen her erst in der Einführungsphase möglich. Die Beobachtung der Punktsymmetrie ist jedoch auch mit Mitteln der Sekundarstufe I bereits möglich.

In Aufgabe 7 und 8 werden weitere Bruchfunktionen von den Schülerinnen und Schülern untersucht. Dabei sollte deutlich werden, dass alle Bruchfunktionen sowohl eine waagerechte als auch eine senkrechte Asymptote haben.

Bruchfunktionen Lösungsbeispiele

**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 1**

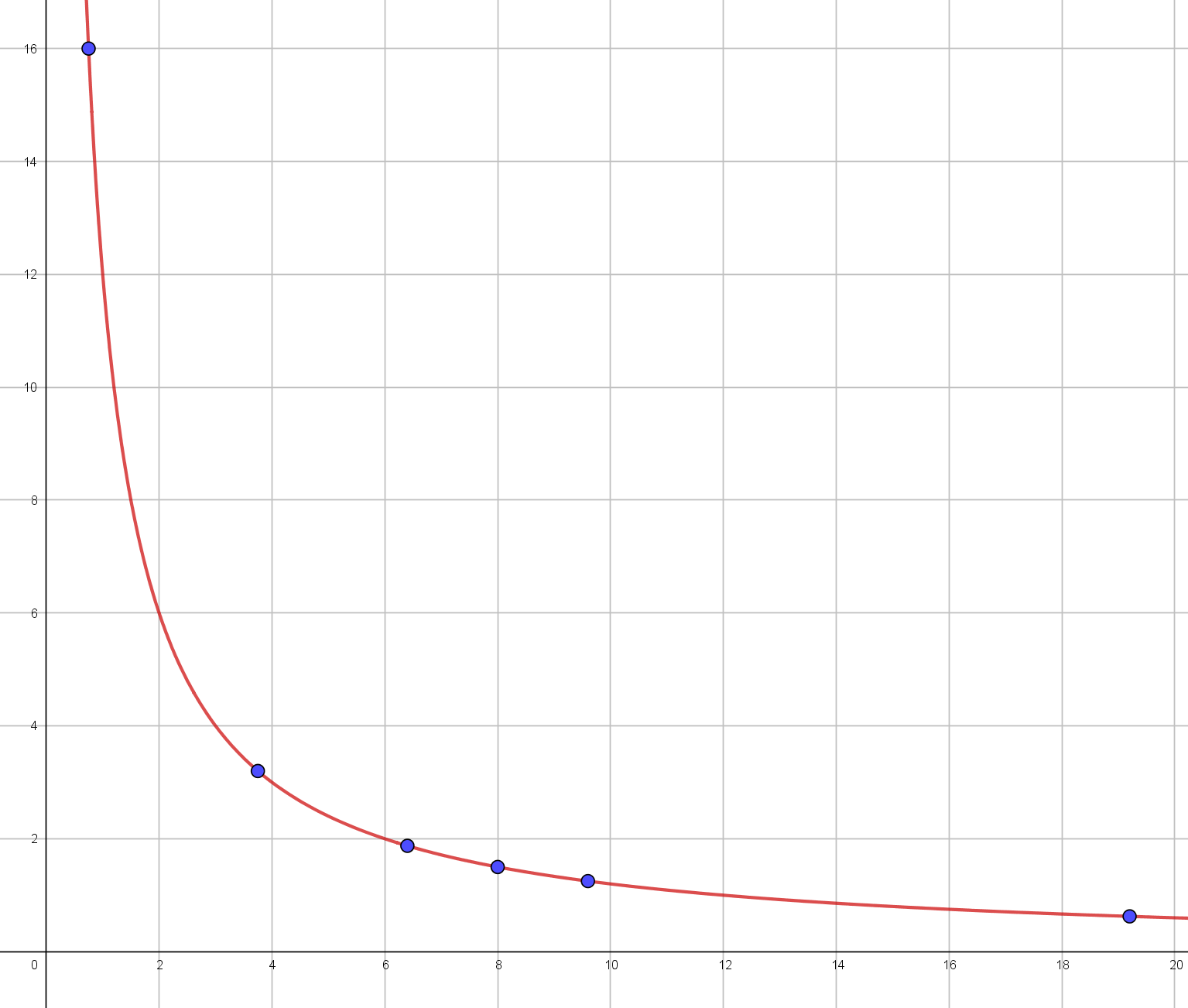
Aufgabe 1:

Es ist .

Aufgaben 2 und 3:

|  |  |
| --- | --- |
| in cm | in cm |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Aufgabe 4:

****

Auch wenn das Wertepaar nur schwer zusammen mit dem anderen Wertepaaren einzuzeichnen ist, gibt es einen ersten Hinweis darauf, dass die Funktionswerte in der Nach von sehr groß werden.

Nach der Aufgabenstellung ist es nicht erforderlich, die Punkte durch eine Linie zu verbinden. Die meisten Schülerinnen und Schüler werden das aber aus Gewohnheit machen.

Aufgabe 5:

Um zu berechnen wurde in den Rechnungen stets die Zahl durch den Wert von dividiert, also lautet die gesuchte Gleichung .

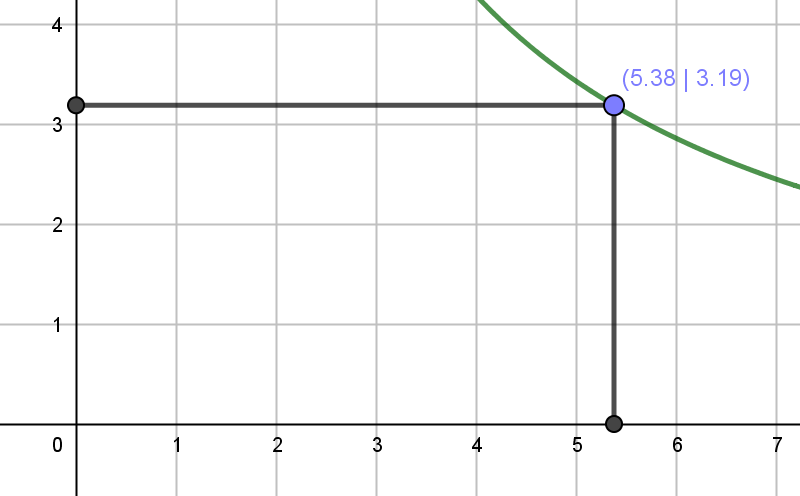
Aufgabe 6:

Mit einer DGS lässt sich der Graph exakt einzeichnen, und man ist nicht auf das Augenmaß angewiesen.

Aufgabe 7:

Man zeichnet den Graphen der Funktion mit der Gleichung und liest zu verschiedenen –Werten die zugehörigen Funktionswerte ab. Selbstverständlich können die Schülerinnen und Schüler auch von vorgegebenen –Werten ausgehen.

Bei Verwendung einer DGS kann alternativ ein Punkt auf den Graphen gesetzt und im Zugmodus seine Lage verändert werden, so dass verschiedene Koordinaten abgelesen werden können.



**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 2**

Aufgabe 1:

Alle Graphen bestehen aus zwei Teilen.

Es gibt weder Schnittpunkte mit der –Achse noch mit der –Achse.

Alle Graphen sind punktsymmetrisch zum Nullpunkt.

Die Graphen kommen sowohl der–Achse als auch der –Achse immer näher.

Wenn ist, liegen die Stücke des Graphen im 1. und 3. Quadranten, wenn ist im 2. und 4. Quadranten.

Je näher der Wert für bei Null liegt, desto mehr nähert sich der Graph den Koordinatenachsen.

Aufgabe 2:

Schülerlösung

Aufgabe 3:

Der Vorfaktor ist zu wählen.

Aufgabe 4

Die erforderlichen Einschränkungen werden in GeoGebra in der Form  
f(x) = Wenn(-3 < x < -1 / 3 || 1 / 3 < x < 3, 1 / x)

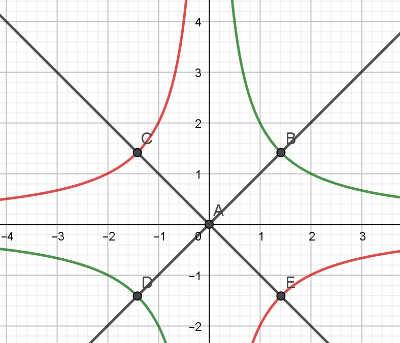
Eingegeben. Dabei sind die beiden senkrechten Striche das Zeichen für das logische Oder

**Lösungsbeispiel zur Aufgabe von Aufgabenblatt 3**

Aufgabe 1:

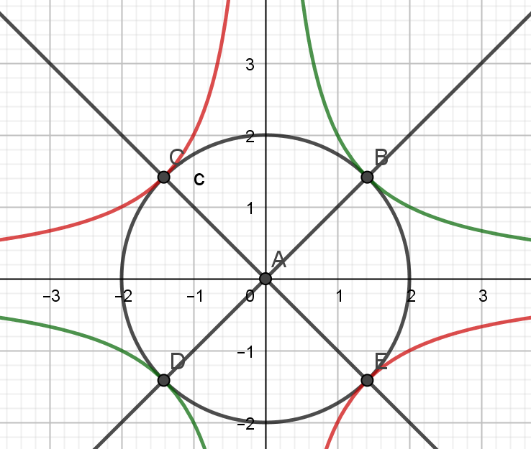
Der Mittelpunkt des Kreises liegt, solange Funktionen der Form verwendet werden, immer im Koordinatenursprung.

Aufgabe 2:

Die gesuchte Hilfslinie ist die Winkelhalbierende im Koordinatensystem.

Alternativ: Die Hilfsline wird durch die Graphen der Funktion bzw. gebildet

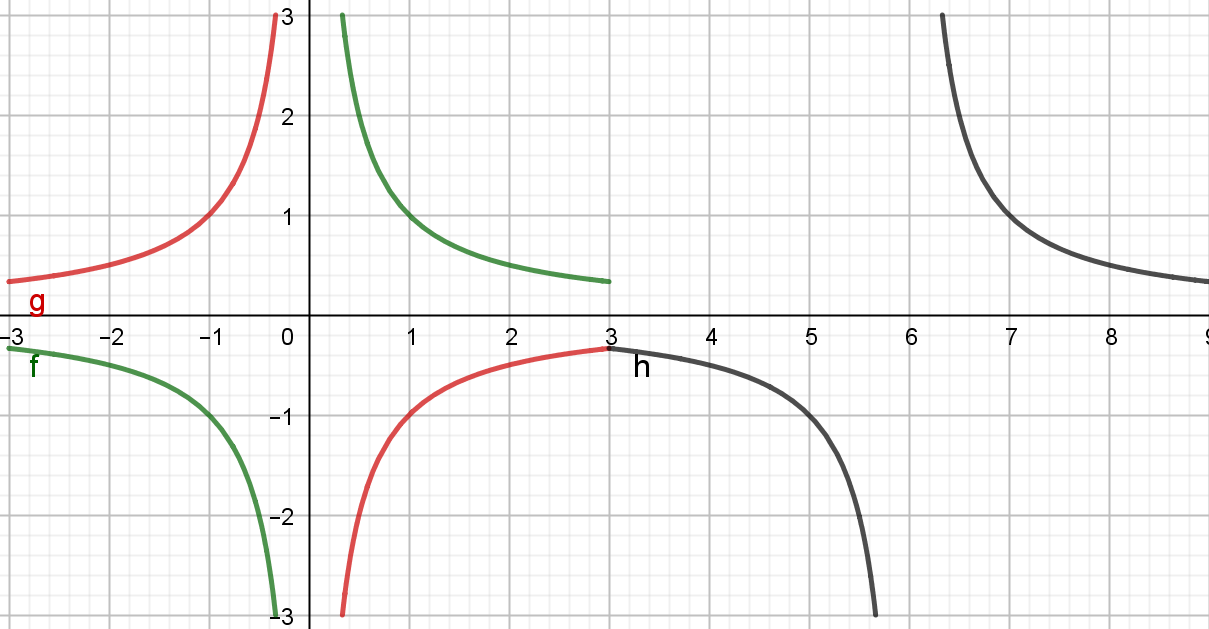
Aufgabe 3:



Aufgabe 4:

Die genutzte Funktion bzw. muss durch eine Funktion der Form bzw. ersetzt werden. Dabei sind die Parameter d und e von der Wahl der ursprünglichen Bruchfunktion abhängig. Ausgehend von der Schreibweise in Aufgabe 2 Arbeitsblatt 2 würde sich für die Verschiebung entlang der waagerechten Achse in der Notation von GeoGebra ergeben:

h(x) = Wenn(3 < x < 17 / 3 || 19 / 3 < x < 9, 1 / x)



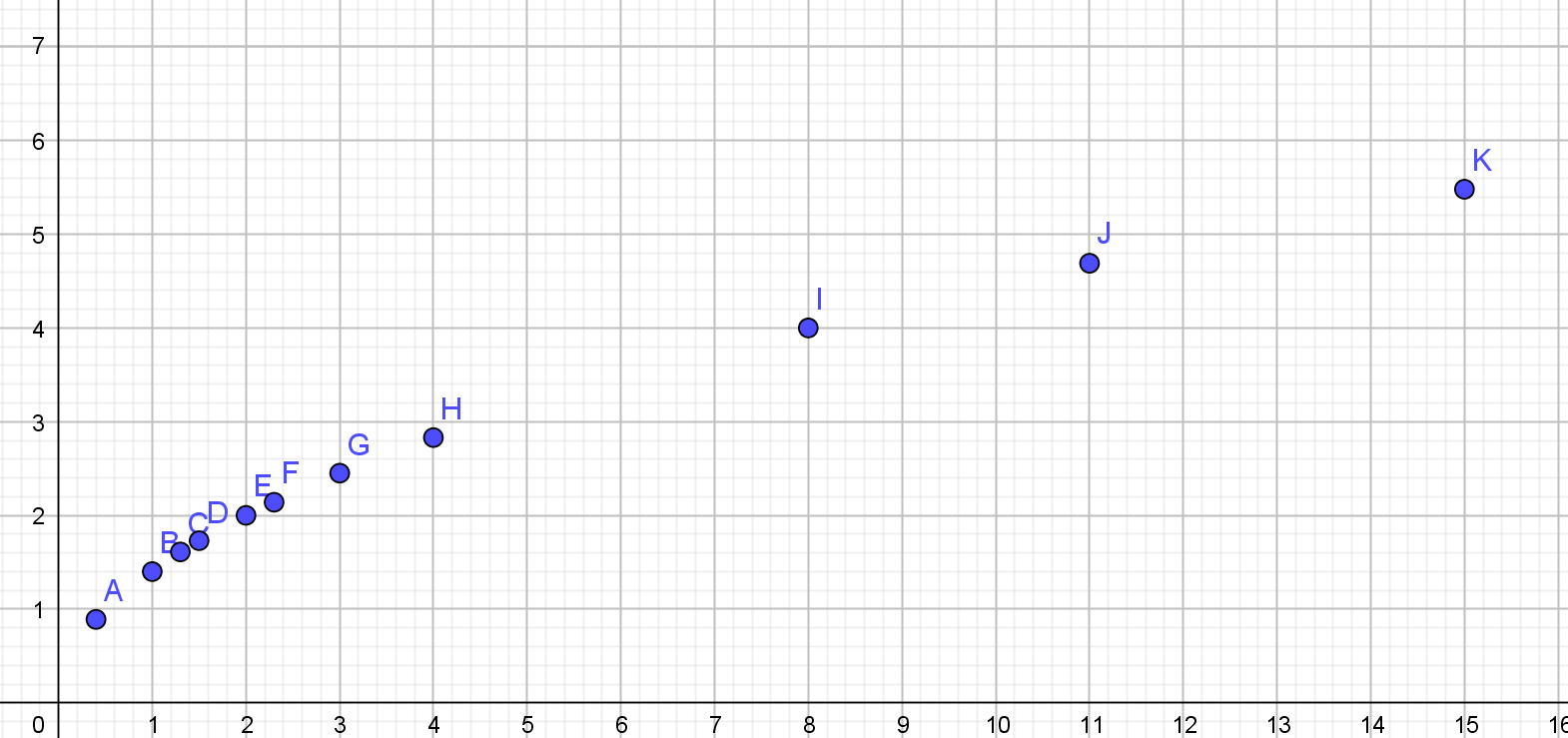
Die weiteren Verschiebungen erfolgen analog.

**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 4**

Aufgabe 1:

|  |  |
| --- | --- |
| **a** | **r** |
| 0.4 | 0.89 |
| 1 | 1.41 |
| 1.3 | 1.61 |
| 1.5 | 1.73 |
| 2 | 2 |
| 2.3 | 2.14 |
| 3 | 2.45 |
| 4 | 2.83 |
| 8 | 4 |
| 11 | 4.69 |
| 15 | 5.48 |

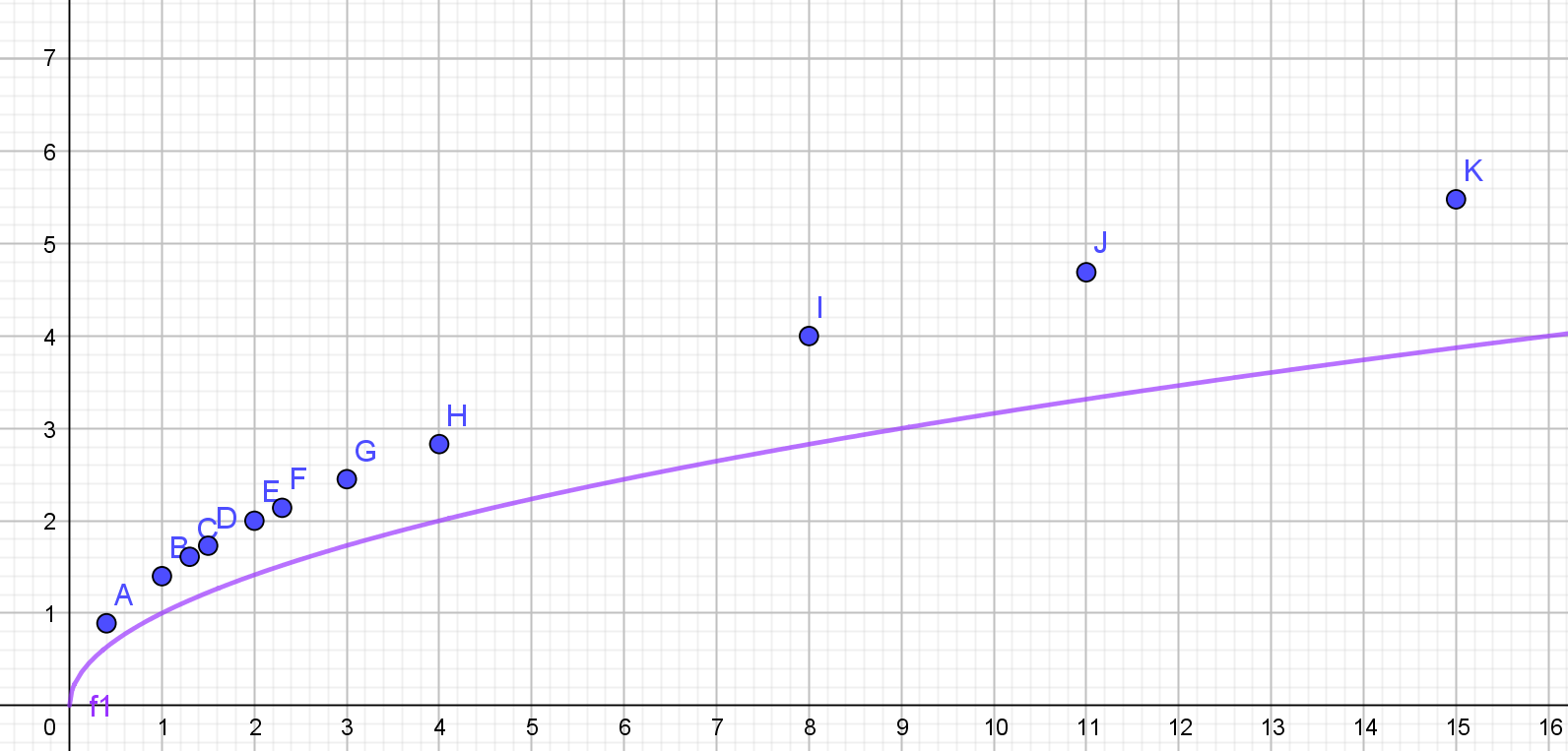
Aufgabe 2:



Aufgabe 3:

Der Graph steigt zunächst nahezu linear an und flacht im weiteren Verlauf immer weiter ab.

Aufgabe 4:



Aufgabe 5:

Alle Punkte liegen auf dem Graphen der Funktion .

Aufgabe 6:

Die Winkelhalbierende ist der Graph einer linearen Funktion mit der Gleichung

Die negative Lösung muss an dieser Stelle nicht extra betrachtet werden, da aus der Graphik hervorgeht, dass der Punkt B im ersten Quadranten liegt. Somit müssen seine Koordinaten positive Werte haben.

Der Berührpunkt hat die Koordinaten .

Aufgabe 7:

Das dargestellte Dreieck ist rechtwinklig. Also gilt mit dem Satz von Pythagoras:

Aus geometrischer Anschauung heraus ist klar, dass der Radius nur positive Werte annehmen kann.

Aufgabe 8:

Analog zu den Rechnungen aus Aufgabenteil 6 und 7 ergibt sich für die Funktion mit der Gleichung ein Berührpunkt mit den Koordinaten und ein Radius der Länge .

**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 5**

Aufgabe 1:

Der Graph der Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Es gibt keine sichtbaren Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Der Graph ist in zwei Teilgraphen unterteilt. Beide Teilgraphen sind fallend.

Aufgabe 2:

Es kann keine Nullstelle geben, weil ein Bruch nur dann den Wert 0 hat, wenn sein Zähler 0 ist.Ein Schnittpunkt mit der senkrechten Achse ist nicht möglich, weil man in die Funktionsgleichung die Stelle 0 nicht einsetzen darf. Dies würde bedeuten, dass man durch 0 dividiert.

Aufgabe 3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.00000001 |
|  | 10 | 100 | 1000 | 100000000 |

Die Funktionswerte werden immer größer, je näher man sich der 0 nähert.

Aufgabe 4:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -0.1 | -0.01 | -0.001 | -0.00000001 |
|  | -10 | -100 | -1000 | -100000000 |

Die Funktionswerte werden immer kleiner, je näher man sich der 0 nähert.

Aufgabe 5:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 100 | 1000 | 100000 | 100000000 |
|  | 0.01 | 0.001 | 0.00001 | 0.00000001 |
|  | -100 | -1000 | -100000 | -100000000 |
|  | -0.01 | -0.001 | -0.0001 | -0.00000001 |

Die Funktionswerte näheren sich immer weiter der 0 an. Für positive Stellen von oben und für negative Stellen von unten.

Aufgabe 6:

Aus Aufgabe 3 und 4 erkennt man, dass die Werte bei betragsgleichen Stellen auch betragsgleich sind. Der Funktionsgraph ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.

Bruchfunktionen: Zusammenstellung der Kompetenzen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Arbeitsblatt** | **Aufgabe** | **Kompetenz** |
| 1 | 2 bis 6 | Funktionen in Graphen, Wertetabellen und Termen darstellen. |
|  | 4 | Darstellungswechsel Graph - Wertetabelle |
|  | 7 | Argumentationskompetenz |
| 2 | 1 bis 4 | Benutzung dynamischer Geometriesoftware |
|  | 1 | Funktionen mit eigenen Worten, in Graphen und als Terme darstellen. |
|  | 3 | Transformation von Funktionsgraphen |
| 4 | 1 | Mithilfe dynamischer Geometriesoftware den Einfluss eines Parameters auf eine Funktion untersuchen und systematisieren. |
|  | 2 bis 4 | Funktionen in Graphen, Wertetabellen und Termen darstellen. |
|  | 5 | Anhand des Graphen einer Funktion ihre Parameter bestimmen. |
|  | 6 | Lösen von Bruchgleichungen |
|  | 7 | Satz von Pythagoras |
|  | 8 | Verallgemeinerung aus Spezialfällen |
| 5 | 1 bis 8 | Argumentationskompetenz |