Umkehrfunktionen Lehrerkommentare

Im Kernlehrplan Mathematik für die Sekundarstufe I des Gymnasiums (1. Auflage 2019) wird das Inhaltsfeld Funktionen wie folgt beschrieben (siehe S.16):

*„Zuordnungen und Funktionen erlauben es, die Abhängigkeit zweier Größen zu beschreiben und in quantitativen Zusammenhängen anzuwenden. Verschiedene Darstellungsformen werden genutzt und situationsangemessen ineinander transformiert.*

*Ausgehend von einfachen Zuordnungen wird ein präziser Funktionsbegriff erarbeitet, auf dem aufbauend neue Funktionsklassen erschlossen und diese selbst zu Objekten mathematischer Untersuchungen werden. Funktionen werden als Modelle für vielfältige Anwendungssituationen genutzt; ihre Parameter und Eigenschaften sind dabei einer Interpretation zugänglich. Mithilfe von Funktionen kann somit ein Teil der Wirklichkeit quantitativ beschrieben werden.“*

Im vorliegenden Modul werden **Umkehrfunktionen** als neue Funktionsklasse betrachtet. Dabei sind folgende Voraussetzungen zur Bearbeitung der erstellten Aufgaben wichtig:

* Die Charakterisierung von Funktionen als Klasse eindeutiger Zuordnungen muss verstanden sein.
* Die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen (Graph, Tabelle, Text, Term) müssen beherrscht werden.
* Geradengleichungen müssen bekannt sein.
* Die Bedeutung der Formvariablen in den Gleichungen (u. a. Steigung und Achsenabschnitt) muss bekannt sein.
* Grundlegende Kenntnisse über lineare und quadratische Funktionen aber auch Betrags- und Wurzelfunktionen sollen vorliegen.
* Die Begriffe Definitions- und Wertebereich einer Funktion sollen hinreichend bekannt sein.
* Die Schülerinnen und Schüler müssen mit einem DGS, zum Beispiel GeoGebra, umgehen können, so dass sie Sachverhalten gezielt betrachten und untersuchen können.
* Das DGS sollte für die Unterrichtsstunden, in denen die Aufgabenblätter eingesetzt werden, zur Verfügung stehen.

Die Materialien zu den Umkehrfunktionen bestehen aus fünf Aufgabenblättern, die zur Differenzierung und individuellen Förderung im Unterricht ab der Jahrgangsstufe 8 bzw. 9 gedacht sind. Das Anspruchsniveau in den Aufgabenblättern ist ansteigend. Daher empfiehlt es sich, die Aufgabenblätter in der angebotenen Reihenfolge einzusetzen.

Das **Aufgabenblatt 1** bildet mit den unterschiedlichen Temperaturmessungen in Europa und Amerika den Einstieg in dieses Modul und knüpft somit an Vorerfahren aus dem Physikunterricht der Erprobungsstufe an. Die Abhängigkeit der beiden Größen Celsius und Fahrenheit ist ein bekanntes Beispiel für Umkehrfunktionen und ergibt sich aus der Notwendigkeit, bei vorgegebenem Celsiuswert den zugehörigen Fahrenheitswert (oder andersherum) bestimmen zu können.

Mathematische Grundlagen sind hier die linearen Funktionen. Es werden folgende Inhalte wiederholt:

Punkte im Koordinatensystem, Bestimmung von Geradengleichungen sowie Schnittpunktsberechnung. Der mathematische Zusammenhang der Umkehrfunktion wird dabei sowohl graphisch als auch rechnerisch vollzogen.

Die Leitfrage zu **Aufgabenblatt 2** lautet: Wann gibt es Umkehrfunktionen? Hierbei spielt die Charakterisierung von Funktionen als Klasse eindeutiger Zuordnungen eine elementare Verständnisgrundlage. Die Frage wird auf allen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen (Graph, Tabelle, Text, Term) angewendet.

Zunächst wird das Erkennen von nicht umkehrbaren Funktionen behandelt. Im Anschluss daran wird dann die Möglichkeit der „Umkehrbarkeit durch Einschränkung“ (im Falle der Nicht-Umkehrbarkeit einer Funktion) dargestellt und untersucht. Die Teilaufgabe (7) lädt zum eigenständigen Forschen ein: Mithilfe der GeoGebra-Datei „02\_Umkehrfunktionen\_linear“ können besondere Umkehrfunktionen bei linearen Funktionen gefunden und dargestellt werden.

Das **Aufgabenblatt 3** knüpft inhaltlich an das vorangegangene Blatt an: Bei der Möglichkeit der „Umkehrbarkeit durch Einschränkung“ spielen die Begriffe Definitions- und Wertebereich eine wichtige Rolle. Anhand der GeoGebra-Datei „03\_Umkehrfunktionen\_Bereiche“ soll der Zusammenhang zwischen diesen beiden Bereichen selbst entdeckt und formuliert werden.

Bei **Aufgabenblatt 4** wird es konkret: Hier geht es nun um die Bestimmung von Umkehrfunktionen. Wie bereits bei Aufgabenblatt 2 werden dabei alle Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen (Graph, Tabelle, Text, Term) betrachtet. Etwas schwieriger ist die Teilaufgabe (3), da hier quadratische Funktionen, Betrags- sowie Wurzelfunktionen betrachtet werden. Bei diesen Funktionen ist es jeweils notwendig, den Definitionsbereich einzuschränken, damit eine Umkehrfunktion bestimmt werden kann.

Das **Aufgabenblatt 5** behandelt einen Sachkontext, der auf einer wahren Begebenheit beruht. Das Problem wird hier sehr ausführlich behandelt und benötigt neben mathematischen Fertigkeiten wie dem Lösen von Gleichungssystemen auch physikalisches Verständnis hinsichtlich des Umgangs mit Variablen. Daher empfiehlt es sich, dieses Aufgabenblatt erst ab der Jahrgangsstufe 9 einzusetzen. Falls der theoretische Hintergrund rund um diese Geschichte insgesamt für Schüler\*innen als zu schwer eingeschätzt wird, kann auf die Teilaufgaben (2) bis (4) verzichtet werden und das Arbeitsblatt entsprechend angepasst sowie verkürzt werden.

Umkehrfunktionen Lösungsvorschläge

Umkehrfunktionen Aufgabenblatt 1

Temperaturmessung in Europa und Amerika

**Lösungsvorschläge**

1. Beide Schülerlösungen sind richtig. Der Unterschied besteht lediglich darin, dass die x- und y-Achsen unterschiedliche Einheiten besitzen. Bei dem linken Koordinatensystem gibt die x-Achse den Temperaturwert in Grad Celsius und die y-Achse den zugehörigen Temperaturwert in Grad Fahrenheit an. Bei dem rechten Koordinatensystem ist es genau andersherum.
2. Mithilfe zweier Punkte - z.B. und - lassen sich die Geradengleichungen ermitteln:

sowie

Also: sowie

Mittels Punktproben lässt sich zeigen, dass alle Punkte auf den jeweiligen Geraden liegen, z. B.:

oder

1. Die beiden Graphen sind achsensymmetrisch bzgl. der 1. Winkelhalbierenden.

Die beiden Steigungen und sind gegenseitige Kehrwerte.

1. Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen ergibt:

mit der Lösung

Einsetzen in eine der beiden Geradengleichungen ergibt .

Damit hat der Scheitelpunkt S die Koordinaten und liegt somit auf der 1. Winkelhalbierenden. Es gilt also: −40 °C = −40 °F.

1. Bekannte Paare von Funktionen sind:

* quadratische Funktionen und Quadratwurzelfunktionen (mit jeweils eingeschränktem Definitionsbereich)
* antiproportionale Funktionen der Form haben dieselben Umkehrfunktionen.
* Exponential- und Logarithmusfunktionen

Umkehrfunktionen Aufgabenblatt 2

Umkehrfunktionen erkennen

**Lösungsvorschläge**

1. Lediglich die beiden Funktionsgraphen in der linken Spalte können zu umkehrbaren Funktionen gehören. Alle anderen vier Funktionsgraphen nehmen -Werte mehrfach an und sind dadurch nicht in Gänze umkehrbar.
2. Aufgrund mehrfach auftretender -Werte sind die zugehörigen Funktionen zur ersten und letzten Tabelle nicht umkehrbar.
3. Max Schulweg ist nicht umkehrbar, da es Zeitspannen gibt, in denen sich die Entfernung zur Schule aufgrund von Wartezeiten nicht ändert (vgl. mögliches Zeit-Weg-Diagramm).



1. Im weiteren Verlauf des Funktionsgraphen für immer größer werdende -Werte sieht es so aus, als seien die zugehörigen -Werte allesamt null. Das würde bedeuten, dass die Funktion nicht umkehrbar ist.
2. Die Funktion mit der Gleichung ist umkehrbar. Die Gleichung der Umkehrfunktion lautet ebenfalls . Die -Werte nähern sich für immer größer werdende -Werte beliebig nahe der Zahl null, nehmen diesen Wert allerdings niemals an.
3. Betragsfunktion: bzw.

Sinusfunktion: u.v.a.

Funktion 3. Grades: bzw. bzw.

1. a) *Die Ausgangsfunktion und die zugehörige Umkehrfunktion sind identisch.*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

b) *Die Ausgansfunktion und die Umkehrfunktion schneiden sich nicht.*

|  |
| --- |
|  |

c) *Zur Ausgangsfunktion existiert keine Umkehrfunktion.*

|  |
| --- |
|  |

d) *Welchen Zusammenhang erkennst du zwischen der Steigung der Umkehrfunktion und der Steigung der Ausgangsfunktion? Welchen zwischen dem -Achsenabschnitt der Umkehrfunktion und dem -Achsenabschnitt der Ausgangsfunktion?*

Für die beiden Steigungen gilt:

In der Regel ist ein-Achsenabschnitt positiv und der andere negativ (Ausnahme bei proportionalen Funktionen, da sind beide gleich null). Es gilt: sowie

Beispiel: und

Es gilt: sowie und

Umkehrfunktionen Aufgabenblatt 3

Definitions- und Wertebereich

**Lösungsvorschläge**

1. Mögliche Einstellungen der Schieberegler sind in den folgenden Abbildungen zu sehen:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Der Wertebereich der Umkehrfunktion „entspricht“ dem Definitionsbereich der Ausgangsfunktion:

sowie ;

sowie .

Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion „entspricht“ dem Wertebereich der Ausgangsfunktion. In beiden obigen Beispielen gilt:

sowie .

1. Weitere Beispiele mit entsprechenden Beobachtungen:

|  |  |
| --- | --- |
| mit  und | mit  und |

Umkehrfunktionen Aufgabenblatt 4

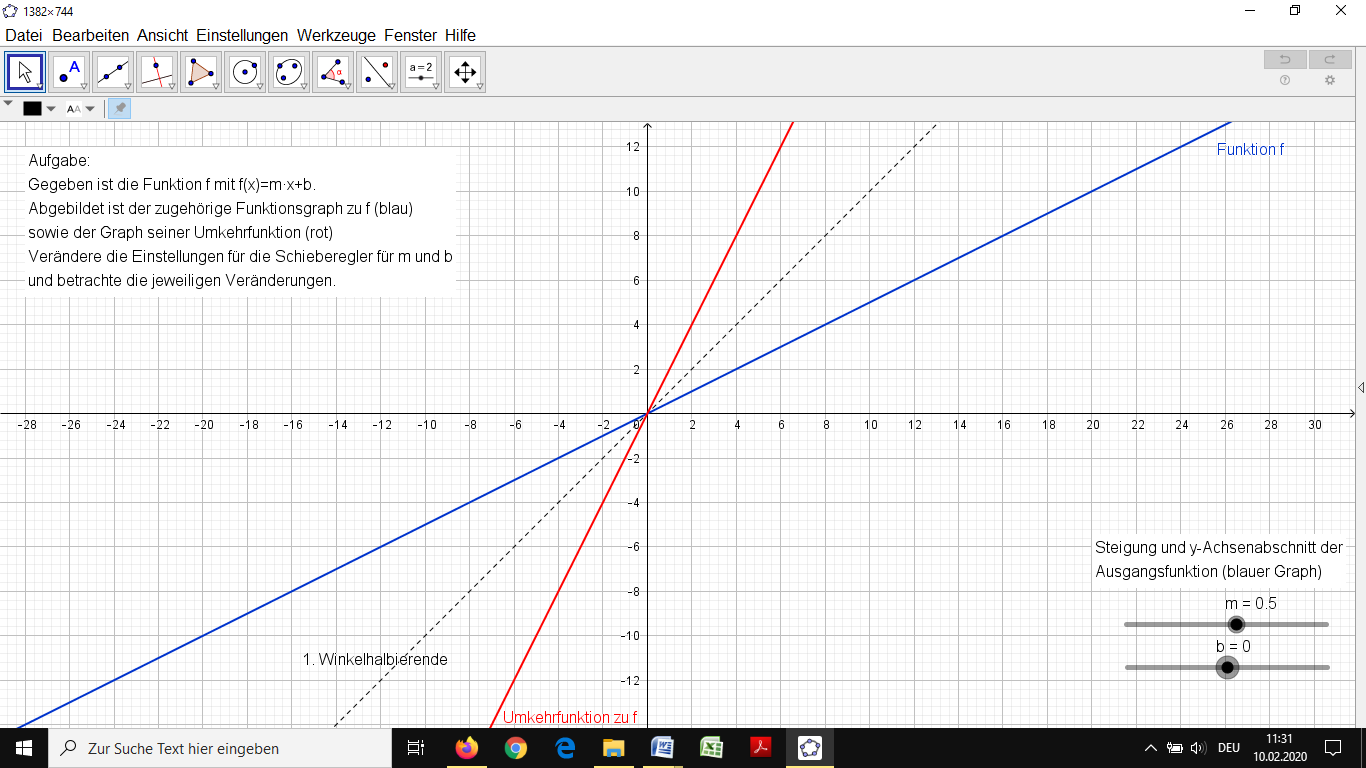
Umkehrfunktionen bestimmen

**Lösungsvorschläge**

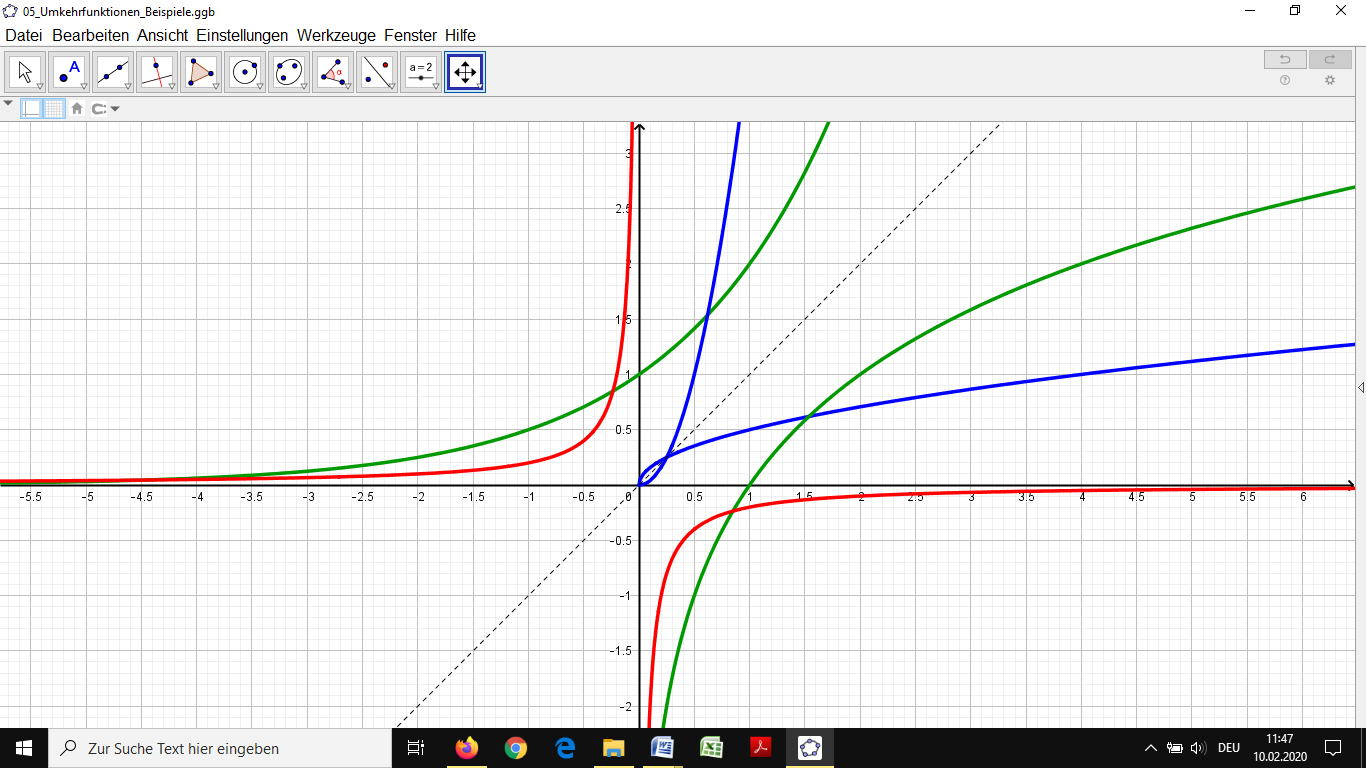
1. a)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **y** | −1,5 | −1 | −0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3,5 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | −1,5 | −1 | −0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3,5 |
| **y** | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

b)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

1. 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Es gilt:  mit  und  ist die Umkehrfunktion zu  mit  mit  und  ist die Umkehrfunktion zu  mit | 1. Fall: , dann gilt für die Umkehrfunktion:  mit und  2. Fall: , dann gilt für die Umkehrfunktion:  mit und | Also gilt:  mit  und  ist die Umkehrfunktion zu  mit |

Umkehrfunktionen Aufgabenblatt 5

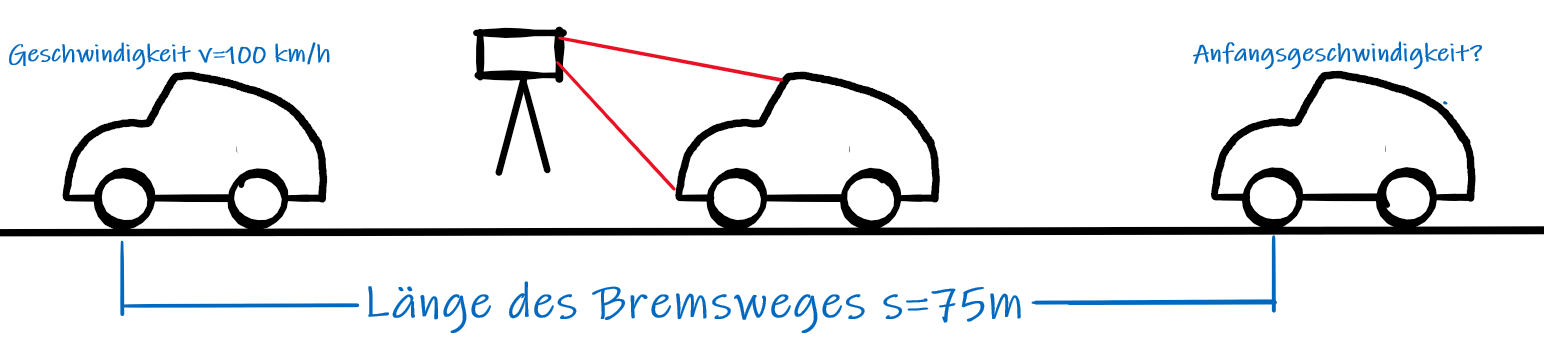
Herbert, der rasende Busfahrer

**Lösungsvorschläge**

1. Herbert fährt mit seinem Auto über die Autobahn und ist viel zu schnell unterwegs. In der Ferne sieht er eine Radarkontrolle und tritt sofort auf die Bremse. Leider wird er dennoch geblitzt und bricht seine Vollbremsung ab. Zu diesem Zeitpunkt beträgt seine Geschwindigkeit v=100 km/h, erlaubt waren 120 km/h. Als er seine Vollbremsung noch einmal abfährt, schätzt er die Länge s des Bremswegs auf 75 m.

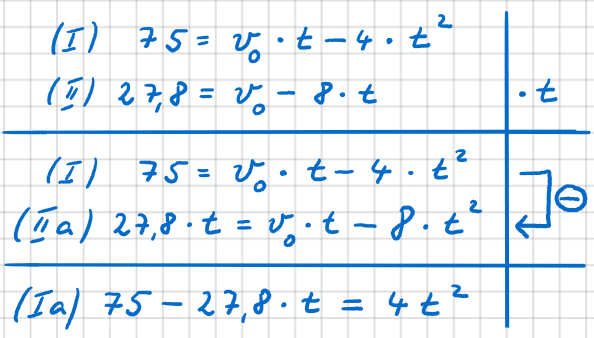
Nun fragt er sich, wie schnell er war, als er geblitzt wurde.

Skizze:



1. Um von km/h in m/s umzuwandeln, muss durch 3,6 dividiert werden: .

Also gilt: .

1. Mithilfe des Additionsverfahrens erhält man die Herberts Gleichung (Ia):
2. a) .

Die im Sachkontext sinnvolle Lösung lautet: .

Der Bremsvorgang dauerte also ca. 2,1 Sekunden.

b)

Die Anfangsgeschwindigkeit betrug also ungefähr .

Interpretation: Herbert muss sich keine Sorgen machen, da erst ab einer „geblitzten“ Geschwindigkeit von über 160 km/h ein Fahrverbot verhängt wird. Aufgrund des Bremsvorgangs sollte diese Geschwindigkeit aber deutlich weniger betragen.

1. a) .

Da der Unterschied über 100 m beträgt, ist nicht davon auszugehen, dass Herbert sich derart vermessen hat.

b) Siehe Excel-Datei „01\_Umkehrfunktionen\_Messfehler“.

c) Hier wird der Zusammenhang der drei Variablen , und der Gleichung dargestellt.