Ungleichungen Lehrerkommentare

Die Materialien zu den Ungleichungen bestehen aus vier Aufgabenblättern, die zur Differenzierung und individuellen Förderung im Unterricht gedacht sind. Das Anspruchsniveau in den Aufgabenblättern ist ansteigend. Daher sollten die Aufgabenblätter in der angebotenen Reihenfolge eingesetzt werden. Das Ziel der Sequenz ist die Bearbeitung von Betragsungleichungen. Da auch die einfachen Ungleichungen nicht mehr Bestandteil der Lehrpläne sind, müssen zunächst dafür die Lösungsverfahren erarbeitet werden. Dazu dienen die ersten drei Aufgabenblätter. Diese können auch ohne das abschließende Aufgabenblatt zu den Betragsungleichungen eingesetzt werden, wenn das Ziel der Einheit die einfachen Ungleichungen sind. In diesem Fall kann das letzte Aufgabenblatt zu einem späteren Zeitpunkt verwendet werden.

Da in den Aufgabenblättern immer der geometrische Aspekt bei der Lösung der Ungleichungen herangezogen wird, dient der Einsatz auch der Erweiterung der Unterrichtsinhalte zum Themenbereich der linearen Funktionen.

Die bereits erworbenen inhaltlichen Kompetenzen zu den linearen Funktionen werden trainiert und im neuen Kontext der Ungleichungen angewendet. Außerdem werden Termumformungen und Äquivalenzumformungen in einem neuen Zusammenhang angewendet.

Konkrete Voraussetzungen für den Einsatz der Materialien:

* Der Funktionsbegriff und die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen (Graph, Tabelle, Text, Term) müssen beherrscht werden.
* Geradengleichungen müssen bekannt sei.
* Die Bedeutung der Formvariablen in den Gleichungen (Steigung und Achsenabschnitt) muss bekannt sein.
* Die Schülerinnen und Schüler müssen mit einer DGS, zum Beispiel GeoGebra, umgehen können, so dass sie Geraden darstellen können.
* Die DGS sollte für die Unterrichtsstunden, in denen die Aufgabenblätter eingesetzt werden, zur Verfügung stehen.
* Die Schülerinnen und Schüler können Gleichungen geometrisch und algebraisch lösen.
* Die Schülerinnen und Schüler kennen Betragsfunktionen und können Betragsgleichungen lösen.

**Aufgabenblatt 1** nutzt die Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler zu den Graphen linearer Funktionen, um die Lösungsmengen von linearen Ungleichungen zu visualisieren.

In der ersten Aufgabe müssen sie zwei vorgegebene Geraden den ebenfalls gegebenen Gleichungen zuordnen und dann die Bereiche ablesen, in denen die Werte der einen Funktion größer sind als die der anderen.

In der zweiten Aufgabe sind Ungleichungen vorgegeben. Die Schülerinnen und Schüler müssen nun die Geraden zu den Termen auf den beiden Seiten der Ungleichung zeichnen und dadurch die Ungleichung lösen.

Aufgabe 1 kann als eine reine Übungsaufgabe zu den linearen Funktionen betrachtet werden. Sie knüpft damit direkt an die Unterrichtsinhalte an, die allen Schülerinnen und Schülern bekannt sein müssen. Aufgabe 2 sollte ebenfalls von allen Schülerinnen und Schülern gelöst werden.

In **Aufgabenblatt 2** wird zunächst an einem Beispiel vorgeführt, wie Ungleichungen durch Äquivalenzumformungen gelöst werden können. Im Beispiel und bei den nachfolgenden Übungsaufgaben ist darauf geachtet, dass keine Division durch negative Zahlen erforderlich wird, wenn so sortiert wird, dass die Anteile mit der Variablen auf der linken Seite und die absoluten Werte auf der rechten Seite der Ungleichung stehen.

Da in diesem Aufgabenblatt noch nicht über die Kenntnisse, die die Schülerinnen und Schüler beim Lösen von Gleichungen erworben haben, hinausgegangen wird, handelt es sich um eine Anwendung bekannter Inhalte im neuen Kontext der Ungleichungen.

Die Problematik der Division durch negative Zahlen wird im **Aufgabenblatt 3** thematisiert. Zunächst werden zwei Lösungsansätze vorgeführt, die zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.

In der Aufgabe 1 sollen die Schülerinnen und Schüler die Lösungsschritte der vorgeführten Beispiele nachvollziehen.

In den Aufgaben 2 und 3 sollen sie mit unterschiedlichen Methoden entscheiden, welche der beiden Lösungen richtig ist. Die rechnerische Methode mit Einsetzen kann dabei nur die falsche Lösung herausfinden. Für die Richtigkeit der andern Lösung gibt sie allenfalls Indizien. Die graphische Darstellung liefert auch eine Verifikation.

Die Aufgaben 1 bis 3 nutzen nur bereits erworbene Kompetenzen und sollten von nahezu allen Schülerinnen und Schülern zu bewältigen sein.

In Aufgabe 4 soll der Fehler bei der falschen Vorgehensweise gefunden werden. Dazu erstellen die Schülerinnen und Schüler zu den einzelnen Umformungsschritten in der Lösung jeweils eine Graphik. Sie werden dabei feststellen, dass nach der Division durch die negative Zahl die Lösungsmenge nicht mehr mit der in den vorhergegangenen Schritten übereinstimmt.

Auch wenn in der Aufgabe die einzelnen zu zeichnenden Geraden benannt werden, ist hier doch eine größere Kreativität gefordert.

In den Aufgaben 5 und 6 wird eine Regel für die Division von Ungleichungen durch eine negative Zahl formuliert und an weiteren Beispielen die Gültigkeit der Regel überprüft. An dieser Stelle sollte durch die Lehrkraft geprüft werden, ob die Regel richtig formuliert wurde. Eventuell muss die Lehrkraft auch selber Beispiele zur Überprüfung der Regel vorgeben.

In der Aufgabe 7 wird die gefundene Regel angewendet. Die Schülerinnen und Schüler werden die Erfahrung machen, dass die Division durch negative Zahlen immer vermieden werden kann, wenn die Terme mit der Variablen und die ohne geeignet auf die Seiten der Ungleichung sortiert werden.

In Aufgabe 8 kann an der richtigen Lösung begründet werden, warum das Ungleichheitszeichen umgedreht werden muss. Diese Aufgabe hat ein hohes Anspruchsniveau und bleibt den leistungsstarken Schülerinnen und Schülern vorbehalten.

In **Aufgabenblatt 4** werden Betragsungleichungen gelöst. Dieses Aufgabenblatt fasst alles zusammen, was die Schülerinnen und Schüler bereits gelernt haben:

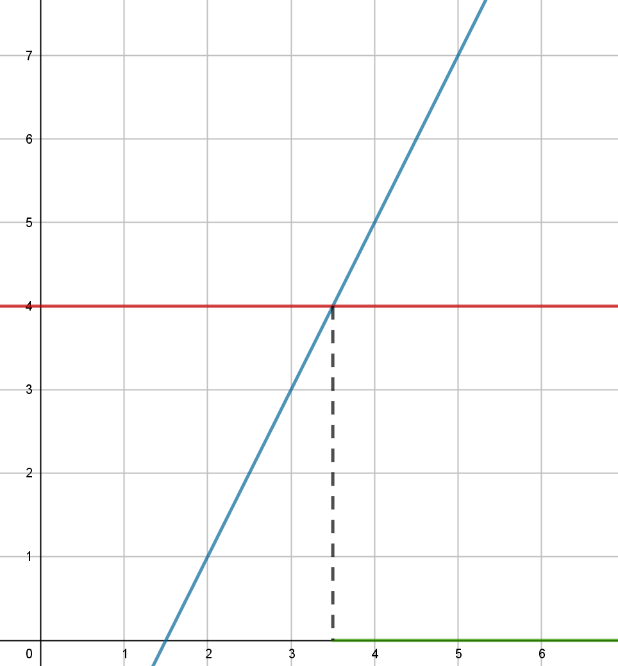
* Die Fallunterscheidungen sind von den Betragsgleichungen bekannt.
* In den einzelnen Fällen werden gewöhnliche Ungleichungen betrachtet.

Zu Beginn wird in dem Aufgabenblatt die Lösung einer Betragsungleichung vorgeführt. Anschließend sollen Betragsungleichungen von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden. Wegen der Komplexität ist diese Aufgabe auch eher nur für die leistungsstarken Schülerinnen und Schüler machbar.

Die beiden abschließenden Aufgaben, in denen es um unlösbare oder allgemeingültige Ungleichungen geht, können die Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge herstellen und damit zeigen, dass Sie ein tieferes Verständnis erworben haben.

Ungleichungen Lösungsbeispiele

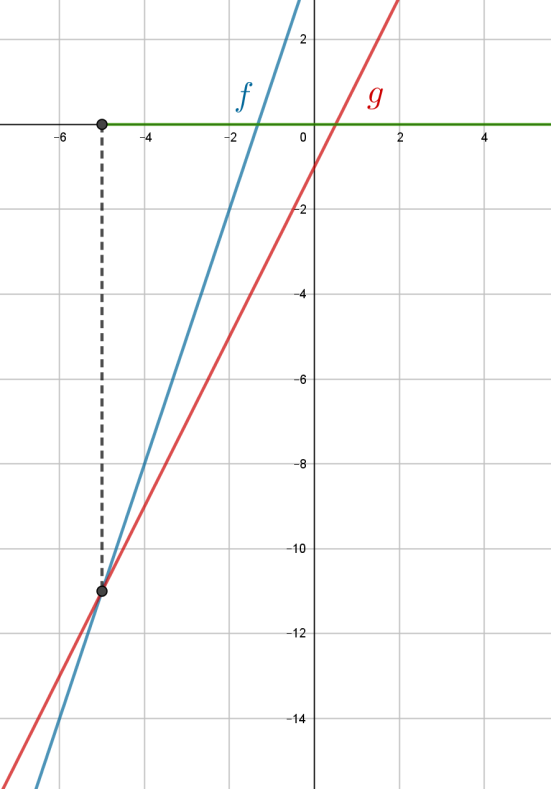
**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 1**

Aufgabe 1:

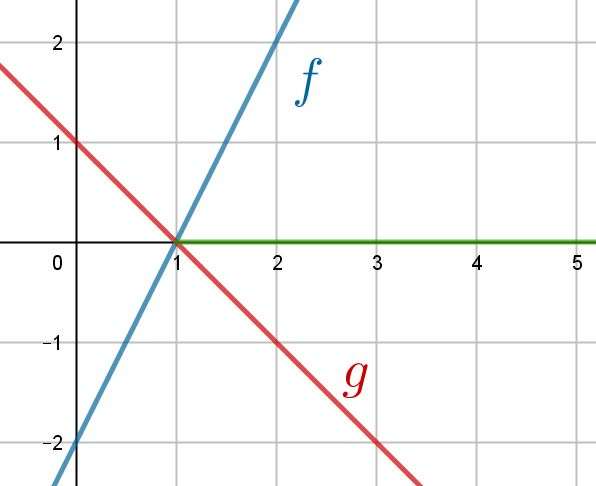
a) Die blaue Gerade gehört zur Funktion , die rote zu . Für die -Werte, die größer als sind, liegt die blaue Gerade über der roten Geraden, dort ist . Die grüne Markierung auf der -Achse stellt das dar.

b) Ale Zahlen, die größer als sind, sind Lösungen der Ungleichung .

Aufgabe 2:

a) Gezeichnet werden die Geraden mit den Gleichungen und .

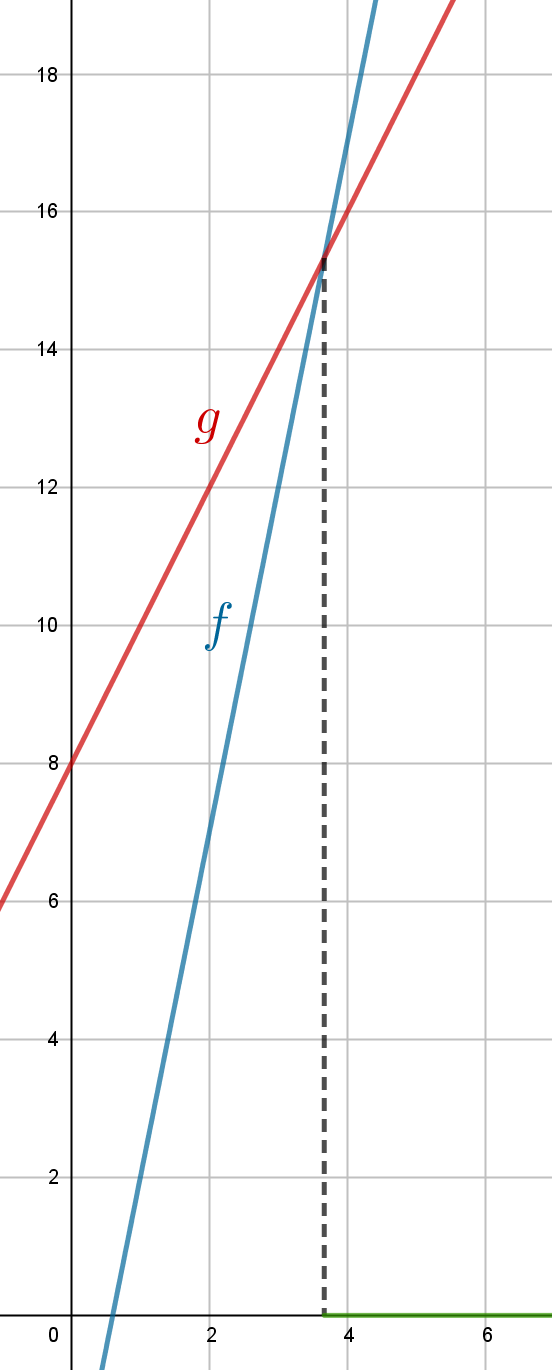
Für alle -Werte, die größer als sind, gilt .

b) Gezeichnet werden die Geraden mit den Gleichungen   
 und .

Für alle -Werte, die größer als sind, gilt .

****c) Gezeichnet werden die Geraden mit den Gleichungen   
 und .

Für alle -Werte, die kleiner als sind, gilt .

d) Gezeichnet werden die Geraden mit den Gleichungen   
 und .

Für alle -Werte, die größer als sind, gilt .

**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 2**

Aufgabe 1:

a) ; b) ; c) ; d) ; e) f) g) h)

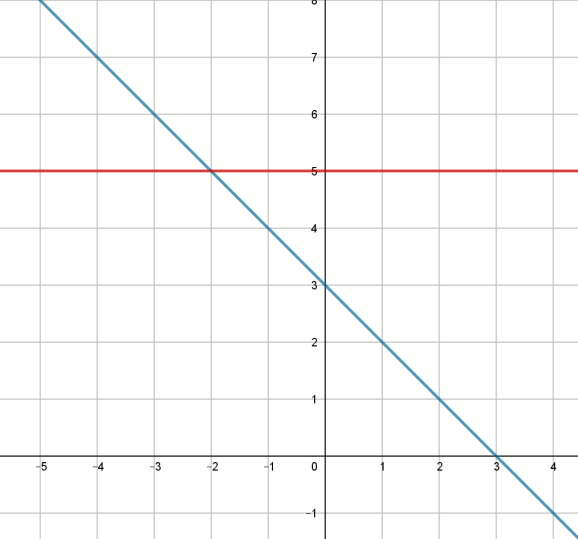
**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 3**

Aufgabe 1:

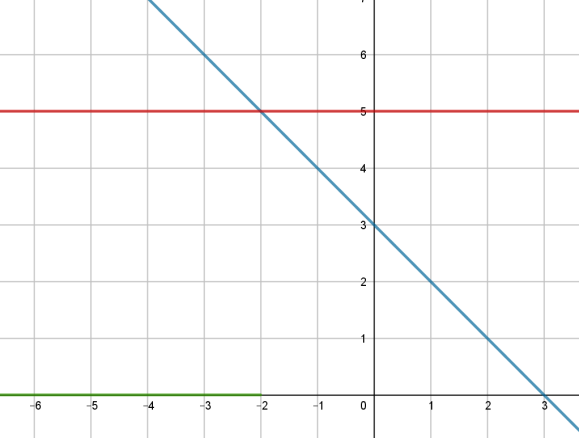
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Umformungen von Anna: | | Umformungen von Bernd: | |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  | rechte Seite vereinfachen |
|  | linke Seite vereinfachen |  |  |
|  | Ungleichung umdrehen |  |  |
|  |  |  |  |

Aufgabe 2:

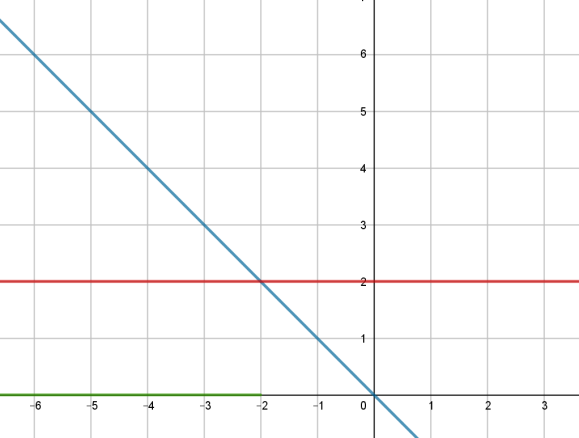
Setzt zum Beispiel in die Ungleichung ein. Es ergibt sich , was eine falsche Aussage ist. Der Wert gehört zu den „Lösungen“, die Bernd gefunden hat, denn . Daher müssen die Umformungen von Bernd falsch sein.

Aufgabe 3:

Im Graphen ist zu erkennen, dass für die blaue Gerade mit der Gleichung über der roten Geraden liegt. Somit ist die Lösung von Anna richtig

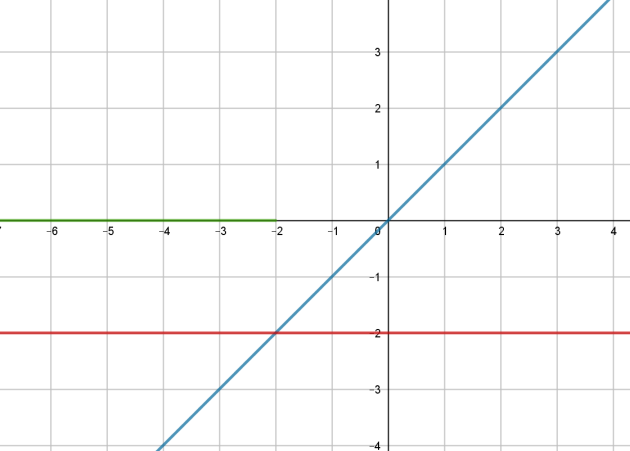
Aufgabe 4:

a)

b)

Die Subtraktion von auf beiden Seiten muss richtig sein, denn der grün markierte Bereich stimmt noch.

Jetzt stimmt der grün markierte Bereich nicht mehr, denn dort ist jetzt die rote Gerade über der blauen. Daher muss der Fehler bei der Division beider Seiten durch passiert sein.

c)

Aufgabe 5:

Wenn man eine Ungleichung auf beiden Seiten durch eine negative Zahl dividiert, muss man das Ungleichheitszeichen umdrehen.

Aufgabe 6:

Die Schülerinnen und Schüler bilden selbständig Ungleichungen, lösen diese und kontrollieren mit den Graphen.

Aufgabe 7:

Bei der Entscheidung, ob durch eine negative Zahl dividiert wurde, wird hier immer davon ausgegangen, dass die Terme so sortiert werden, dass die mit der Variablen auf der linken Seite stehen.

a) , es wurde durch dividiert; b) , keine Division durch negative Zahl;

c) , es wurde durch dividiert; d) , es wurde durch dividiert;

e) , es wurde durch dividiert; f) , keine Division durch negative Zahl;

g) , es wurde durch dividiert bzw. mit multipliziert;

h) , es wurde durch dividiert bzw. mit multipliziert.

Aufgabe 8:

Im letzten Schritt liest Anna die vorletzte Ungleichung von rechts nach links und schreibt sie in der Form auf. Dadurch dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

**Lösungsbeispiele zu den Aufgaben von Aufgabenblatt 4**

Aufgabe 1:

a) oder ; b) ; c) oder ; d) ;

e) oder ; f) ; g) ; h) .

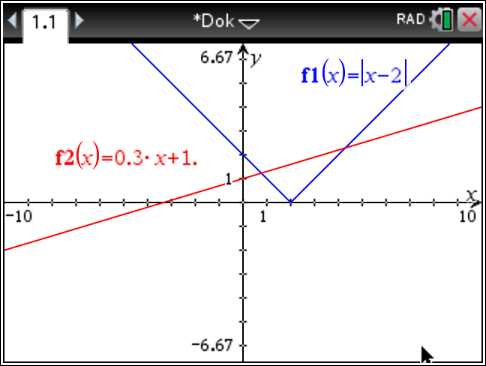
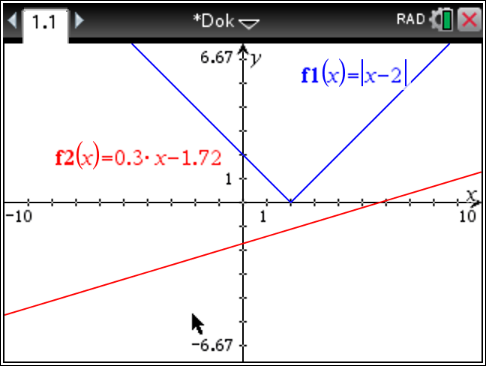
Aufgabe 2:

Die einfachsten Beispiele sind von der Gestalt .

Möglich ist auch eine Lösung mit Hilfe des DGS, indem die Schülerinnen und Schüler zunächst zwei Funktionen eingeben und diese anschließen so verziehen, dass keine Schnittpunkte der Graphen entstehen.

Die Ungleichung hat Lösungen.

Nachdem die Gerade verschoben wurde, gibt es keine Schnittpunkte mehr. Daher ist die Ungleichung unlösbar.



Aufgabe 3:

Die unlösbare Ungleichung kann einfach umgedreht werden. Beispiel .

Betragsfunktionen: Zusammenstellung der Kompetenzen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Arbeitsblatt** | **Aufgabe** | **Kompetenz** |
| 1 | 1 | Informationen aus Funktionsgraphen ermitteln |
|  | 2 | Funktionsgraphen zu Termen erstellen; Informationen aus Graphen ermitteln |
| 2 | 1 | Äquivalenzumformungen zur Lösung von Ungleichungen |
| 3 | 1 | Analyse von Schülerlösungen |
|  | 2 | Verifizierung von Lösungen durch Probe |
|  | 3 | Funktionsgraphen zu Termen erstellen; Informationen aus Graphen ermitteln |
|  | 4 | Fehleranalyse |
|  | 5 | Mustererkennung zur Formulierung einer Regel |
|  | 6 | Verifizierung einer Regel |
|  | 7 | Äquivalenzumformungen zur Lösung von Ungleichungen |
|  | 8 | Argumentationskompetenz: Begründung einer Regel |
| 4 | 1 | Fallunterscheidungen; Lösen von Betragsungleichungen |
|  | 2, 3 | Umkehrung: Erstellen von Betragsungleichungen |