BILL – unser Regalsystem zum Selbstbau! - Lösungen und Anforderungsbeschreibungen

Skizzierung der Lösung

BILL – Fall 1

Problem: Wie viele Regale der Sorten Bill 1,2 und 3 können mit dem Lagerbestand hergestellt werden?

Tabelle:

	Bill 1	Bill 2	Bill 3	Lagerbestand
Regalträger	2	3	4	44
Querstangen	1	1	2	20
Regalbretter	5	10	15	150
Stifte	20	40	60	500

Gleichungssystem:

x_1, x_2, x_3 bezeichne die Anzahl der Regale Bill1, Bill 2, Bill 3

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 44 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 20 \\ 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 = 125 \end{array} \right|$$

Matrixschreibweise und Lösung durch Gauß'sches Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 44 \\ 1 & 1 & 2 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 125 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Anforderungsbeschreibung

- Die Aufgabe ist offen gestellt, die Schüler versuchen zunächst zu verstehen, welches Problem hier gelöst werden soll, suchen also zunächst eine Aufgabenstellung.
- S. legen zur Übersichtlichkeit eine Tabelle an
- S. erkennen, dass ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss.
- Evt. Lehrerimpuls: S. sollen zuerst denken, dann rechnen:
  Mit 500 Stiften können max. 125 Bretter verbaut werden! Wegen der linearen Abhängigkeit der letzten beiden Koeffizientenzeilen, können die Stifte zunächst außer Acht gelassen werden.
- Auftrag: S. sollen das GS nur mit Hilfe des Additionsverfahrens lösen! (hierbei rechts daneben Platz für eine Darstellung der Lösung mit Matrizen lassen!
- S. erkennen, dass die Variablen nicht mitgeführt werden müssen. Nun Begriff der Matrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix einführen.
- S. lernen das Gauß'sche Eliminationsverfahren kennen!

CAS

z.B. TI-89:

- S. lernen die Eingabe von Matrizen über den Data/Matrix-Editor kennen,
- erweiterte Koeffizientenmatrix auf reduzierte Treppenform bringen (je nach Zeit einzelne Operationen mit den Zeilen der Matrix (Befehle:*mrow, mrowadd, ref*) oder gleich der Befehl *rref(A|b)*
- Ablesen der eindeutigen Lösung

Skizzierung der Lösung

BILL – Fall 2

Problem: In Erweiterung von Fall 1 ist nun ein vierter Regaltyp BILL 4 geplant, der aus 5 Regalträgern, 4 Querstangen und 20 Regalbrettern besteht. Gibt es bei unverändertem Lagerbestand auch hier eine Lösung?

erweiterte Tabelle:

	Bill 1	Bill 2	Bill 3	Bill 4	Lagerbestand
Regalträger	2	3	4	5	44
Querstangen	1	1	2	4	20
Regalbretter	5	10	10	20	125

Lösung durch Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 44 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 125 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

x_4 bezeichne die Anzahl der Regale Bill 4, so liest man das neue (reduzierte) GS:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 14 - x_4 \\ x_2 = 4 + 3x_4 \\ x_3 = 1 - 3x_4 \end{array} \right|$$

mathematischer Lösungsraum:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : \quad t \in R \right\}$$

sinnvolle Lösung: wegen $x_1, x_3 \geq 0$, geht nur $x_4 = t = 0$.

Anforderungsbeschreibung

- S. stellen nun gleich die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und überführen diese mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren in die reduzierte Treppenform.
- Ablesen der Lösung ist nicht sofort möglich, es gibt mathematisch zunächst mehrere Lösungen.
- S. erkennen, dass sinnvoll aber nur die Lösung mit x_4=0 ist.

CAS

- S. geben neue Matrix in TR ein und berechnen wieder die reduzierte Treppenstufenform
- S. lernen, dass mehrdeutige Lösungen am TR nicht gleich ablesbar sind

<table>
<tr><th>Skizzierung der Lösung</th><th>Anforderungsbeschreibung</th><th>CAS</th></tr>
<tr>
<td>

BILL – Fall 3

Problem: Jedem Regaltyp werden 5 Ersatzstifte zugefügt. Gibt es hier bei unverändertem Lagerbestand eine Lösung?

Tabelle:

<table>
<tr><th></th><th>Bill 1</th><th>Bill 2</th><th>Bill 3</th><th>Lagerbestand</th></tr>
<tr><td>Regalträger</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>44</td></tr>
<tr><td>Querstangen</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>20</td></tr>
<tr><td>Regalbretter</td><td>5</td><td>10</td><td>10</td><td>150</td></tr>
<tr><td>Stifte</td><td>25</td><td>45</td><td>65</td><td>500</td></tr>
</table>

Lösung durch Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 44 \\ 1 & 1 & 2 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 150 \\ 25 & 45 & 65 & 500 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

In diesem Fall gibt es keine Lösung!

</td>
<td>

- S. überlegen, ob man nun vom ursprünglichen Bestand (150 Bretter) ausgeht oder mit 125 Brettern arbeitet. Es läuft in diesem Fall auf dasselbe Ergebnis heraus.
- S. stellen fest, dass die Stifte nun mit einbezogen werden müssen
- S. stellen nun wieder die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und überführen diese mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren in die reduzierte Treppenform.
- Ablesen der Lösung, es ist wegen der letzten Zeile sofort einzusehen, dass es hier keine Lösung gibt.

</td>
<td>

- S. geben neue Matrix in TR ein und berechnen wieder die reduzierte Treppenstufenform
- S. müssen lernen, dass unlösbare Gleichungssysteme im TR durch die Einheitsmatrix (in erweiterter Koeffizientenmatrix) dargestellt werden.

</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">

An dieser Stelle kann man nun anhand der drei Beispiele den Rang einer Matrix, der erweiterten Koeffizientenmatrix und das Rangkriterium anführen. Ikonisierung z.B. in Lineare Algebra Wirtschaft, Cornelsen, S. 63.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Skizzierung der Lösung</th><th>Anforderungsbeschreibung</th><th>CAS</th></tr>
<tr><td>Mögliche Differenzierung z.B. für LK oder für leistungsstarke Schüler:</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>BILL – Fall 4
Problem: Wie viele Ersatzstifte x kann man den Packungen zufügen, damit es noch Lösungen gibt?
(Hinweise: Man probiere verschiedene Regalbrettanzahlen aus, z.B. 120, 125 und 150)
$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 44 \\ 1 & 1 & 2 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & a \\ 20+x & 40+x & 60+x & 500 \end{array}\right)$
Lösung durch Eliminationsverfahren zu Fuß:
a = 120 und x=1, ist das GS mehrdeutig lösbar, für $x \neq 1$ unlösbar,
für a = 125 und x=0, ist das GS eindeutig lösbar, für $x \neq 0$ unlösbar
für a = 150 ist das GS in jedem Fall unlösbar
dazu allgemeine Treppenstufenform:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 64-{}^{2a}\!/_{5} \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & {}^{a}\!/_{5}-24 \\ 0 & 0 & 0 & 500+{}^{a(x-20)}\!/_{5}-44x \end{array}\right)$
Zusatz: Ermittlung der Lösbarkeit durch Determinantenkriterium:
$\det(A \mid b) = -((a-220)\cdot x - 20(a-125))$</td><td>- S. müssen die Matrix jeweils handschriftlich auf die Treppenstufenform bringen
- S. erkennen bei der Normierung, dass sie Fälle unterscheiden müssen und nur für die Ausnahmefälle Lösungen erhalten</td><td>- S. geben Matrix mit Variablen in TR ein und erhalten über den Befehl rref die Einheitsmatrix als Lösung, würden also ablesen, dass das GS nicht lösbar ist. Hier werden die Grenzen der TR erkennbar. Der wichtige Fall x=0 wird nicht gesondert betrachtet.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Skizzierung der Lösung</th><th>Anforderungsbeschreibung</th><th>CAS</th></tr>
<tr><td>

BILL – Optimierung
Problem: Wie sollen die 4 Regalsorten zusammengestellt werden, dass nach Verkauf aller Regale ein möglichst hoher Erlös erzielt wird?
Lösung durch Eliminationsverfahren
$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 300 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 130 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 1000 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 30 \end{array}\right)$
mehrdeutiges Gleichungssystem, sinnvolle Lösungen durch:
$\left| \begin{array}{l} x_1 = 30 - x_4 \\ x_2 = 40 + 3x_4 \\ x_3 = 30 - 3x_4 \end{array} \right|$ und wegen $x_3 \geq 0$ folgt $x_4 \geq 10$ also $x_4 \in [0;10]$
Aufstellen der Zielfunktion:
$65x_1 + 120x_2 + 170x_3 + 230x_4 =$ maximal
$\Leftrightarrow 11850 + 15x_4$ = maximal
Also muss wie folgt gepackt werden:
$x_1 = 20$, $x_2 = 70$, $x_3 = 0$, $x_4 = 10$
Die Einnahmen betragen dann 12000 €.

</td><td>

- S. erkennen, dass Optimierungsaufgaben immer mehrdeutig lösbare Gleichungssysteme zugrunde liegen
- S. lösen das GS und stellen wieder die mathematische und ökonomische sinnvolle Lösungsmenge auf
- S. stellen die Zielfunktion zur Optimierung auf, setzen die Lösungen für x_1, x_2, x_3 ein und erhalten eine lineare Funktion in x_4 zur Maximierung.

</td><td>keine neuen Erkenntnisse in CAS</td></tr>
</table>