Funktionsuntersuchung mit einem MMS

Material zum beispielhaften SiLP GOSt Mathematik NRW 2023

Juni 2023

# Kurzbeschreibung

Das vorliegende Unterrichtsvorhaben zeigt einen entdeckenden Einstieg in das Thema: „ganzrationale Funktionen“ und der daran anschließenden Funktionsuntersuchung auf. Hierbei sollen insbesondere die Vorteile eines MMS genutzt werden, um den Schülerinnen und Schülern das eigenständige Entdecken des neuen Funktionstyps zu ermöglichen. Die Unterrichtseinheit schließt unmittelbar an die Untersuchung von Potenzfunktionen an. Die Schülerinnen und Schüler kennen demnach bereits die wesentlichen Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und sollen nun in einer Funktionswerkstatt durch Addition von Potenzfunktionstermen mit natürlichen Zahlen als Exponenten neue Funktionsterme bauen und mithilfe des Grafikfensters des MMS (hier: GeoGebra) die Neuartigkeit der so entstehenden Graphen erforschen und einzelne Zusammenhänge zwischen Graph und Funktionsterm entdecken. Am Ende der Einheit soll ein Advance Organizer stehen, der bereits bekannte sowie noch nicht bekannte Lösungsansätze und -verfahren zur Untersuchung ganzrationaler Funktionen aufweist. Die rechnerische Bestimmung von Nullstellen ganzrationaler Funktionen ohne Hilfsmittel durch Ausklammern oder mithilfe der p-q-Formel muss im Anschluss an dieses Unterrichtsvorhaben erfolgen, sofern dies nicht ergänzend zu den folgenden Darstellungen in das Unterrichtsvorhaben integriert wird.

# [Das Unterrichtsvorhaben](file:///C:\Users\denishusemann\Downloads\Testergebn#_Das_Unterrichtsvorhaben_") im Überblick

Zeitbedarf: ca. 6 – 8 Unterrichtsstunden

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Thema | Unterrichtsverlauf | Material |
| **Neue Funktionen mithilfe des MMS entdecken und erforschen** | | | |
| 1. | Funktionswerkstatt: Neue Funktionen bauen  (Potenzfunktionen als Bausteine ganzrationaler Funktionen) | * + Neue Funktionen mittels Addition von Potenzfunktionen bauen (M1)   + Grafische Betrachtung der so entstehenden Funktionen mithilfe des MMS (M1)   + Erste Sammlung grafischer Eigenschaften / Besonderheiten (im Plenum)   + **Definition: ganzrationale Funktionen und Grad ganzrationaler Funktionen** | **M1**:  Funktionswerkstatt (1) |
| 2. | Ganzrationale Funktionen beschreiben | * + Verlauf eines vorgegebenen Graphen mit eigenen Worten beschreiben   (Welche Eigenschaften sind zur genauen Beschreibung eines Graphen wesentlich?) (M2a+b)   * + Sammlung / Ergänzung besonderer Eigenschaften und Punkte eines Graphen einer ganzrationalen Funktion (M3) | **M2a+b:**  Graphen unter der Lupe  **M3:**  ÜbersichtFachbegriffe |
| 3 | Ganzrationale Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften bauen  (insb. Symmetrie- und Verhalten im Unendlichen) | * Ganzrationale Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften bauen (M4) * Entdecken von Regeln zur Bestimmung des Verhaltens im Unendlichen und des Symmetrieverhaltens   (Ein allgemeiner Beweis kann hier eingeschoben werden oder ggf. später erfolgen.) | **M4:**  Funktionswerkstatt (2) |
| 4. | Funktionsanalyse mit dem MMS | * + Bearbeitung einer innermathematischen Aufgabe zur Funktionsuntersuchung mithilfe des MMS     - y-Achsenabschnitt (algebraisch mit CAS (Funktionswertbestimmung) / grafisch / hilfsmittelfrei)     - Nullstellen (algebraisch mit CAS (Gleichungslösung) / grafisch)     - Verhalten im Unendlichen (algebraisch mit CAS (Grenzwertbestimmung) / grafisch / hilfsmittelfrei)     - Bereiche, in denen der Graph steigt/fällt (grafisch)     - Extrempunkte (grafisch)     - Symmetrieverhalten (algebraisch mit CAS (Grenzwertbestimmung) / grafisch / hilfsmittelfrei)   + Optional: Rechnerische Bestimmung von Nullstellen ganzrationaler Funktionen in geeigneten Fällen ohne Hilfsmittel (Ausklammern, p-q-Formel) Alternativ muss dies im Anschluss an das Unterrichtsvorhaben erfolgen.   + Ergänzung des Advance Organizer     - Bisherige Lösungsmöglichkeiten (mit CAS / grafisch / hilfsmittelfrei) | **M5:**  Funktionsterme unter der Lupe  **M6:**  Mit der CAS-Ansicht arbeiten  **M7:**  Advance Organizer |
| 5. | Ganzrationale Funktionen beschreiben Sachzusammenhänge | * + Bearbeitung einer Aufgabe im Sachzusammenhang mithilfe des MMS   + Definitions- und Wertebereich im Sachkontext | **M8:**  Aufgabe im Sachzusammenhang |
| **Anmerkung:** *Im Anschluss an diese Unterrichtseinheit sollte die Nullstellenberechnung ganzrationaler Funktionen ohne Hilfsmittel behandelt werden, sofern diese nicht in 4. integriert wurde.* | | | |

# Lehrplanbezug

Dieses Unterrichtsvorhaben konkretisiert eine mögliche Umsetzung des beispielhaften schulinternen Lehrplans Mathematik, der auf dem Kernlehrplan der gymnasialen Oberstufe Mathematik (Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2023) basiert.

Dieses Unterrichtsvorhaben kann als Teil des Unterrichtsvorhabens E-A1 des beispielhaften schulinternen Lehrplans dienen. Die aufgeführten Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans sind Schwerpunkte der Kompetenzentwicklung in diesem Unterrichtsvorhaben.

|  |
| --- |
| **Kompetenzerwartungen**  Die Schülerinnen und Schüler …  **Inhaltsbezogene Kompetenzen**  EF-A(1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen,  EF-A(2) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel,  **Prozessbezogene Kompetenzen**  Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,  Ope-(2) übersetzen formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,  Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,  Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,  Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Erkunden und Kontrollieren,  Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS)   * zum Lösen von Gleichungen, * Erstellen von Graphen von Funktionen,   Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,  Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,  Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,  Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,  Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,  Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,  Arg-(1) stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,  Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,  Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,  Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,  Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,  Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,  Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen aus,  Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,  Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,  Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter. |

**Abbildungsnachweis:**

Die Bilder und Piktogramme in diesen Materialien sind selbst erstellt oder aus Pixabay entnommen (<https://pixabay.com/de/>) und ggf. modifiziert.

# Material mit Erläuterungen/didaktischen Hinweisen

## Ein Bild, das Text, Screenshot, Schrift, parallel enthält. Automatisch generierte BeschreibungMaterial 1:

Die Schülerinnen und Schüler erzeugen durch Addition der ihnen bereits aus dem Unterricht bekannten Potenzfunktionen „neue“ (bisher unbekannte) zusammengesetzte Funktionen und erforschen die Neuartigkeit der Graphen dieser Funktionen mithilfe des MMS.

Anschließend werden beispielhaft einige Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler präsentiert und die genannten Besonderheiten/Neuartigkeiten gesammelt. Insbesondere sollten hier die Begriffe „Hoch- und Tiefpunkt“ der Einfachheit halber ohne Differenzierung zwischen lokal und global eingeführt werden. Am Ende dieser Unterrichtseinheit werden ganzrationale Funktionen als neue Funktionsklasse und der Grad einer ganzrationalen Funktion eingeführt und definiert. Außerdem wird eine übliche Darstellung des Funktionsterms (Reihenfolge der Summanden) thematisiert.

Ein Bild, das Text, Diagramm, Reihe, parallel enthält.

Automatisch generierte Beschreibung**Material 2a+b:**

Ein Bild, das Text, Screenshot, Quittung, Schrift enthält.

Automatisch generierte BeschreibungDie Schülerinnen und Schüler beschreiben jeweils mit vertauschten Rollen mithilfe zweier Arbeitsblätter den Verlauf der Graphen zweier ganzrationaler Funktionen und zeichnen auf der Grundlage ihrer Beschreibungen die jeweiligen Graphen. Auf diese Weise erkennen Sie durch gegenseitige Kontrolle, welche Eigenschaften und besonderen Punkte für die Beschreibung eines Graphen wesentlich sind.

Diese charakteristischen Eigenschaften und besonderen Punkte werden abschließend von den Schülerinnen und Schülern in Partnerarbeit in einer Liste zusammengetragen und im Plenum gesammelt. Fehlende Fachbegriffe, wie z.B. Sattelpunkt können ggf. bei Bedarf von der Lehrperson ergänzt werden.

**Material 3:**

Ein Bild, das Text, Diagramm, Reihe, Schrift enthält.

Automatisch generierte BeschreibungIn der Übersicht über Fachbegriffe wird das Konzept der Monotonie über die Begriffe „fallend“ und „steigend“ eingeführt. Die Übersicht verzichtet jedoch bewusst auf den Begriff der Monotonie sowie auf die Unterscheidung zwischen lokalen und globalen Extrempunkten. Diese Begrifflichkeiten sollen in einem späteren Unterrichtsvorhaben im Rahmen der Differentialrechnung ausdifferenziert werden.

## Material 4:

Ein Bild, das Text, Screenshot, Schrift enthält.

Automatisch generierte BeschreibungDie Schülerinnen und Schüler vertiefen ihre ersten Eindrücke zu den Eigenschaften und Besonderheiten ganzrationaler Funktionen, indem sie in Form einer arbeitsteiligen Gruppenarbeit (alternativ: Gruppenpuzzle) mithilfe des Grafikfensters des MMS passende Funktionen zu vorgegebenen Eigenschaften konstruieren und die Funktionsgleichungen angeben. Dabei erkennen sie auf unterschiedlichem Leistungsniveau Muster und Zusammenhänge und greifen ggf. auf Vorwissen zurück.

Ein Bild, das Text, Screenshot enthält.

Automatisch generierte BeschreibungJede Gruppe beschäftigt sich dabei mit unterschiedlichen Eigenschaften bzw. besonderen Punkten ganzrationaler Funktionen und schließt die jeweilige Untersuchung mit einer „Weiterdenken“-Aufgabe ab, welche insbesondere bei den Gruppen C und D bereits den Zusammenhang zwischen dem Symmetrieverhalten bzw. dem Verhalten im Unendlichen und dem zugehörigen Funktionsterm entdecken lässt.

In der Präsentationsphase beschreiben die Schülerinnen und Schüler ihre Lösungsansätze sowie Vermutungen zu ggf. vorliegenden Zusammenhängen. Diese können in Form von Hypothesen gesammelt werden, die im Folgenden diskutiert und für alle gesichert werden. Eine allgemeine Herleitung der Zusammenhänge kann in diesem Rahmen, später oder direkt im Anschluss an die Gruppenarbeit erfolgen.

Das Material fördert durch seine offene Aufgabenstellung insbesondere eine leistungsdifferenzierte Herangehensweise.

Ein Bild, das Text, Screenshot, Schrift, Dokument enthält.

Automatisch generierte Beschreibung**Material 5:**

Nachdem die Schülerinnen und Schüler sich nun ausführlich mit den Eigenschaften ganzrationaler Funktionen auf graphischer Ebene auseinandergesetzt haben und bereits wesentliche Zusammenhänge zwischen Graph und zugehörigem Funktionsterm entdeckt haben, geht es nun darum die Eigenschaften rechnerisch zu untersuchen.

Die Schülerinnen und Schüler differenzieren bei der vorliegenden Funktionsuntersuchung insbesondere zwischen den ihnen zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln zum Auffinden einer Lösung. Hierbei kann es sinnvoll sein, auch bereits auf die „Operatorenübersicht“ hinzuweisen und insbesondere auf den Unterschied der Operatoren „berechnen“, „bestimmen“ und „angeben“ hinzuweisen. Im Sinne der Anlage von M5 werden dort Operatoren verwendet, die alle Vorgehensweisen zulassen.

**Modelllösung zu M5:**

1. Am Graphen abgelesen:

**Hinweis**: Es wird nicht erwartet, dass die Schülerinnen und Schüler mit ihren bisherigen Kenntnissen die biquadratische Gleichung ohne Hilfsmittel (MMS) exakt lösen können. Im LK wird dies später in der Qualifikationsphase thematisiert; im GK wird dies grundsätzlich nicht erwartet.

2. Am Graphen abgelesen, daher ungefähre Werte:

Graph fällt:

Graph steigt:

1. Am Graphen abgelesen, daher ungefähre Werte:

1. Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | ungefähre Lösung  (mit Grafikfenster) | exakte Lösung  (mit CAS-Fenster) | exakte Lösung (ohne MMS) |
| a) | x | x | x |
| b) | x | x |  |
| c) | x | x | x |
| d) | x |  |  |
| e) | x |  |  |
| f) | x | x | x |

Ein Bild, das Text, Screenshot, Schrift, Zahl enthält.

Automatisch generierte Beschreibung**Material 6:**

Falls in dieser Stunde das CAS-Fenster des MMS zum ersten Mal genutzt wird, kann den Schülerinnen und Schülern dieses Übersichtsblatt mit den zunächst wichtigsten Befehlen an die Hand gegeben werden.

**Material 7:**

Ein Bild, das Text, Screenshot, Diagramm, Reihe enthält.

Automatisch generierte BeschreibungDies ist ein Beispiel für einen möglichen Advance Organizer für die kommenden Unterrichtseinheiten, der sich aus den Ergebnissen dieses Unterrichtsvorhabens ergeben kann.

Ein Bild, das Text, Screenshot, Brief, Diagramm enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Ein Bild, das Text, Screenshot, Schrift, Diagramm enthält.

Automatisch generierte Beschreibung**Material 8:**

Zum Abschluss des Unterrichtsvorhabens wird das bisher Neuentdeckte und Gelernte zu ganzrationalen Funktionen im Sachzusammenhang angewendet. Hier soll es zudem auch um die Interpretation der Eigenschaften und besonderen Punkte im vorliegenden Sachzusammenhang gehen.

Insbesondere der Definitions- und Wertebereich, der bisher innermathematisch aus der Unterrichtsreihe zu Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten bekannt ist, wird hier nun dem Sachzusammenhang entsprechend sinnvoll eingeschränkt. Bei der Einschränkung des Definitionsbereichs auf einen im Sachzusammenhang sinnvollen Bereich sollte immer auch darauf hingewiesen werden, dass die gegebene ganzrationale Funktion innermathematisch gesehen für alle reellen Zahlen definiert ist. Dies ist wichtig, da die Funktion in späteren Kontexten der Differentialrechnung ansonsten an den Rändern des passend zum Sachzusammenhang eingeschränkten Bereichs nicht mehr differenzierbar wäre. Ggf. wird daher bei späteren Aufgaben in einigen Fällen nicht der Definitionsbereich, sondern der Modellierungsbereich eingeschränkt, sodass die Funktion auf (ganz) IR definiert ist aber nur in einem eingeschränkten Bereich zur Modellierung verwendet wird.

Das Material beinhaltet zwei verschiedene Aufgaben im Sachzusammenhang, aus denen ggf. auch eine ausgewählt werden kann.

**Modelllösungen zu M8:**

**Aufgabe 1**

* 1. ***Exakte Berechnung mithilfe des CAS-Fensters von GeoGebra:***
  2. ***Exakte Berechnung mithilfe des CAS-Fensters von GeoGebra:***

Der Ball berührt nach 21 m wieder den Boden.

* 1. ***Näherungsweise Berechnung mithilfe des CAS-Fensters von GeoGebra:***

Der Freistoß wurde aus einer Entfernung von ca. 26 m geschossen.

Ca. 1,75 m und 14,26 m entfernt vom Freistoßpunkt befand der Ball sich auch in einer Höhe von 1,50 m.

* 1. ***Ablesen der ungefähren Koordinaten des Hochpunktes mithilfe des Grafikfensters von GeoGebra:***

Der Ball erreicht ca. 19 m vor der Torlinie seine maximale Höhe von ca. 3,18 m.

* 1. ***Begründete Angabe der entsprechenden Bereiche mithilfe des Grafikfensters von GeoGebra:***

Begründung:

: Die Entfernung zum Freistoßpunkt kann nicht negativ sein. Die Entfernung

der Torlinie zum Freistoßpunkt beträgt ca. 26 m. Wie die Flugbahn des Balls hinter der Torlinie verläuft, ist uninteressant.

: Der maximale Funktionswert der Funktion f im angegebenen Definitionsbereich ist

ca. 3,18 und der minimale Funktionswert in diesem Definitionsbereich ist 0.

*(Anmerkung: Als obere Grenze eines sinnvollen Definitionsbereichs im Sachzusammenhang kann alternativ die Entfernung der Torlinie + Durchmesser eines Fußballs oder die Entfernung des Tornetzes zum Freistoßpunkt angegeben werden.)*

**Aufgabe 2**

1. ***Ermittlung der entsprechenden Bereiche mittels Nullstellen- und Maximumbestimmung mithilfe des Grafikfensters von GeoGebra:***

(*Der Definitionsbereich beginnt mit dem durch x = 0 beschriebenen Beginn der Befüllung und er muss enden, bevor die Funktion f negative Werte annimmt. Der maximale Funktionswert im Definitionsbereich am Graphen wird abgelesen.*)

1. ***Exakte Berechnung mithilfe des CAS-Fensters von GeoGebra:***

Die Füllmenge beträgt zu Beginn und nach einem dreiviertel Tag .

1. ***Exakte Berechnung mithilfe des CAS-Fensters von GeoGebra:***

Das Becken ist 2 Stunden und 20 Stunden nach Beginn der Befüllung leer.

1. ***Ermittlung der entsprechenden Bereiche mithilfe des Grafikfensters von GeoGebra:***

Zunahme der Wassermenge:

Abnahme der Wassermenge:

Im Zeitraum zwischen 2 Stunden und 14 Stunden nach Beginn der Befüllung nimmt die Wassermenge im Becken zu, d.h. innerhalb dieses Zeitraums muss mehr Wasser ins Becken fließen als abfließen. Innerhalb der ersten beiden Stunden nach Beginn der Befüllung sowie im Zeitraum zwischen 14 Stunden und 20 Stunden nach Beginn Befüllung nimmt die Wassermenge im Becken ab, somit muss in diesen beiden Zeiträumen mehr Wasser abfließen als zufließen.

1. ***Ablesen der Koordinaten des Hochpunktes mithilfe des Grafikfensters von GeoGebra:***

*(Alternativ kann hier auch auf die entsprechenden Ergebnisse aus Aufgabenteil a) bzw. d) verwiesen werden.)*

Die maximale Füllmenge des Beckens wird nach 14 Stunden erreicht. Sie beträgt 43,2 m3.