Nullstellenbestimmung ganzrationaler Funktionen ohne Hilfsmittel

Material zum beispielhaften SiLP GOSt Mathematik NRW 2023

April 2024

Kurzbeschreibung

Das vorliegende Material kann als eigenständige Unterrichtssequenz oder als Ergänzung zum Unterrichtsvorhaben „Funktionsuntersuchung mit einem MMS“ eingesetzt werden. Zu Beginn der Unterrichtssequenz wird zunächst an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler angeknüpft und das Lösen quadratischer Gleichungen mit den bereits bekannten Lösungsverfahren an konkreten Beispielen wiederholt. Anschließend wird dieses Vorwissen strukturiert und schließlich auf die Nullstellenbestimmung ganzrationaler Funktionen übertragen.

Das Unterrichtsvorhaben im Überblick

Zeitbedarf: ca. 3 – 5 Unterrichtsstunden

	Thema	Unterrichtsverlauf	Material
Nullstellenbestimmung ganzrationaler Funktionen ohne Hilfsmittel			
1.	Vorwissen aktivieren	Bekannte Lösungsverfahren zum Lösen quadratischer Gleichungen wiederholen: • Satz vom Nullprodukt (Ablesen) • Wurzelziehen • Ausklammern • pq-Formel	**M1**
2.	Vorwissen strukturieren / verallgemeinern	Verschiedene Darstellungsformen quadratischer Funktionen und die Berechnung der Nullstellen	**M2**
3.	Vorwissen auf ganzrationale Funktionen anwenden	Übertragung bekannter Lösungsverfahren auf die Nullstellenbestimmung ganzrationaler Funktionen	**M3**
4.*	Nullstellen ganzrationaler Funktionen ohne Hilfsmittel bestimmen	Übungsmaterial zur Nullstellenberechnung ganzrationaler Funktionen	**M4***

Lehrplanbezug

Dieses Unterrichtsvorhaben konkretisiert eine mögliche Umsetzung des beispielhaften schulinternen Lehrplans Mathematik, der auf dem Kernlehrplan der gymnasialen Oberstufe Mathematik (Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2023) basiert.

Dieses Unterrichtsvorhaben kann als Teil des Unterrichtsvorhabens E-A1 des beispielhaften schulinternen Lehrplans dienen. Die aufgeführten Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans sind Schwerpunkte der Kompetenzentwicklung in diesem Unterrichtsvorhaben.

Kompetenzerwartungen

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler …*

EF-A(2) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler …

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,

Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,

Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,

Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur.

Material mit Erläuterungen/Didaktischen Hinweisen

Diese Unterrichtssequenz mit dem Titel „Nullstellenberechnung ganzrationaler Funktionen ohne Hilfsmittel“ kann als eigenständige Unterrichtseinheit oder als Ergänzung zum Unterrichtsvorhaben „Funktionsuntersuchung mit einem MMS“ eingesetzt werden.

Die Berechnung von Nullstellen ohne Hilfsmittel knüpft inhaltlich an die entsprechenden Berechnungen bei quadratischen Funktionen in der Sekundarstufe I an. Die zu verwendenden Verfahren sind somit vom Grundsatz her bekannt. Das Material wiederholt und vertieft diese Verfahren und überträgt sie anschließend auf ganzrationale Funktionen.

Um die händischen Rechenverfahren zu üben und zu festigen, bietet dieses Material an verschiedenen Stellen diverse Übungsaufgaben an. Abhängig vom Übungsbedarf der Schülerinnen und Schüler sollte jeweils situativ entschieden werden, ob und in welchem Umfang diese Übungsaufgaben und insbesondere das optionale Material M4* bearbeitet werden.

Das Material enthält sehr ausführliche Lösungen, sodass es sich auch gut als Selbstlernmaterial eignet. Jeder Zwischenschritt ist bei der Selbstkontrolle durch die Schülerinnen und Schüler gut nachvollziehbar. Die Ausführlichkeit der Lösungen dient somit insbesondere als Verständnishilfe. In Leistungsüberprüfungen werden in der Regel nicht so kleinschrittige Lösungen erwartet. Hier können auch einzelne Rechenschritte übersprungen bzw. weggelassen werden.

Material 1: Wiederholung

Die Schülerinnen und Schüler sollen ihr Vorwissen zu den Lösungsverfahren quadratischer Gleichungen aus der Sekundarstufe I reaktivieren. Methodisch bietet sich hierbei ein Vorgehen nach der Think-Pair-Share Methode an.

Bei der anschließenden Besprechung der Lösungswege der Schülerinnen und Schüler sollte insbesondere thematisiert werden, dass oft verschiedene Lösungswege möglich sind. Zum Beispiel kann in allen Fällen ggf. nach vorherigen Umformungen die pq-Formel als Lösungsverfahren genutzt werden. Diese ist jedoch abhängig von der gegebenen Gleichung nicht immer das geschickteste Lösungsverfahren. In den Lösungen des Materials ist immer dasjenige Verfahren angegeben, welches mit dem wenigsten Rechenaufwand und der geringsten Fehleranfälligkeit durchführbar ist.

Der in den Lösungen verwendete Satz vom Nullprodukt bzw. das Ablesen der Nullstellen bei einer faktorisierten Darstellung wird in den Lösungen erläutert, sodass die Lösungen auch eingesetzt werden können, wenn dies nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann.

Material 2: Vorwissen strukturieren / verallgemeinern

Nach der ersten Reaktivierung des Vorwissens soll dieses nun strukturiert und geordnet werden. Dadurch sollen die Schülerinnen und Schüler dazu motiviert werden, beim Lösen von Gleichungen nicht einfach loszurechnen, sondern zunächst mittels differenzierter Betrachtung der zu lösenden Gleichung das geschickteste Lösungsverfahren zu ermitteln, um erst dann mit der Berechnung zu beginnen.

Mithilfe des Materials erarbeiten sich die Schülerinnen und Schüler eine tabellarische Übersicht aller möglichen Fälle, wie quadratische Gleichungen aussehen können und ordnen diesen Fällen passende Lösungsverfahren und Beispiele zu.

Das Material bietet auch die Möglichkeit arbeitsteilig vorzugehen. Hier könnte nach Schwierigkeitsgrad differenziert werden. Umsetzung und Gestaltung sollte abhängig von der jeweiligen Lerngruppe gewählt werden.
Je nach Lernvoraussetzung und Leistungsstärke der Lerngruppe kann im Anschluss an M2 der Einsatz von vertiefendem Wiederholungsmaterial zu einzelnen Lösungsverfahren sinnvoll sein oder es kann optional einzelnen Schülerinnen und Schülern Unterstützungsmaterial zum selbstständigen Wiederholen und Vertiefen der einzelnen Lösungsverfahren (Satz vom Nullprodukt bzw. Ablesen; Wurzelziehen; Ausklammern; pq-Formel) an die Hand gegeben werden. Hierzu findet sich Material bei diversen Schulbuchverlagen.

Material 3: Nullstellen ganzrationaler Funktionen

In Material 3 erfolgt nun die Übertragung der Kenntnisse zur Nullstellenberechnung quadratischer Funktionen auf die Berechnung der Nullstellen ganzrationaler Funktionen. Hierbei ist die wesentliche neue Erkenntnis, dass die bekannten Lösungsverfahren zur Berechnung der Nullstellen ganzrationaler Funktionen ggf. kombiniert angewendet werden müssen, sowie die Erkenntnis, dass es ganzrationale Funktionen gibt, deren Nullstellen nur mithilfe eines MMS berechnet werden können. Auch in diesem Material soll insbesondere auf den richtigen Blick auf

die zu lösenden Gleichungen fokussiert werden, um ein geschicktes Lösungsverfahren zu wählen. Erst im Anschluss soll mit der Berechnung begonnen werden.
Die Menge der Aufgaben kann je nach Bedarf und Zeit in Aufgabenteil b) angepasst werden.

Material 4*: Übungsaufgaben (optional)

Dieses Material bietet zum Abschluss der Unterrichtssequenz umfangreiche Übungsaufgaben zur hilfsmittelfreien Berechnung der Nullstellen ganzrationaler Funktionen und ist je nach Lerngruppe und Unterrichtszeit optional einsetzbar. Gegebenenfalls empfiehlt es sich, die Textaufgaben als erste Vorbereitung für Klausuraufgaben im Unterricht zu besprechen.

M1: WIEDERHOLUNG

Lösungsverfahren zur Nullstellenbestimmung quadratischer Funktionen

Das Berechnen von Nullstellen quadratischer Funktionen ist Ihnen bereits aus dem Mathematikunterricht der Mittelstufe bekannt. Sie haben dort die Funktionsgleichung gleich null gesetzt und dann verschiedene Verfahren zum Lösen quadratischer Gleichungen kennengelernt.

Aufgabe

Nutzen Sie Ihre bisherigen Kenntnisse, um die Lösungen der angegebenen quadratischen Gleichungen ohne Hilfsmittel zu bestimmen und benennen Sie oder beschreiben Sie hierzu unter Ihrem Lösungsweg das von Ihnen verwendete Lösungsverfahren mit wenigen Worten.

$x^2 - 81 = 0$

$\Leftrightarrow$

Lösungsverfahren:

____

$x^2 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow$

Lösungsverfahren:

____

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow$

Lösungsverfahren:

____

$-3 \cdot (x-1)^2 + 12 = 0$

$\Leftrightarrow$

Lösungsverfahren:

____

$(x-5) \cdot (x+1) = 0$

$\Leftrightarrow$

Lösungsverfahren:

____

$-2x^2 + 8x = 0$

$\Leftrightarrow$

Lösungsverfahren:

____

M2: VORWISSEN STRUKTURIEREN / VERALLGEMEINERN: Lösungsverfahren zur Nullstellenbestimmung

Sie kennen bereits drei verschiedene Darstellungsformen einer quadratischen Funktion:

1. **Normalform** $f(x) = ax^2 + bx + c$, mit $a \neq 0$
2. **Scheitelpunktform** $f(x) = a \cdot (x-d)^2 + e$, mit $a \neq 0$
3. **Faktorisierte Form** $f(x) = a \cdot (x-r) \cdot (x-s)$, mit $a \neq 0$

Je nachdem, in welcher Darstellungsform eine quadratische Funktion gegeben ist, bieten sich bei der Nullstellenberechnung unterschiedliche Lösungsverfahren an, um den Rechenaufwand möglichst gering zu halten. Insgesamt können folgende ***5 Fälle*** unterschieden werden:

Allgemeine Fälle	Beispiele	Lösungsverfahren
1. Fall: Normalform mit $b \neq 0, c \neq 0$ $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$		
2. Fall: Normalform mit $b \neq 0, c = 0$ $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$		
3. Fall: Normalform mit $b = 0, c \neq 0$ $a \cdot x^2 + c = 0$ Scheitelpunktform mit $d = 0, e \neq 0$ $a \cdot x^2 + e = 0$		
4. Fall: Scheitelpunktform mit $d \neq 0, e \neq 0$ $a \cdot (x-d)^2 + e = 0$		
5. Fall: Scheitelpunktform mit $e = 0$ $a \cdot (x-d)^2 = 0$ Faktorisierte Form mit $r, s \in IR$ $a \cdot (x-r) \cdot (x-s) = 0$		

Aufgabe 1:

Ordnen Sie die sechs Beispiele den fünf Fällen zu und ergänzen Sie anschließend zu jedem Beispiel ein weiteres. Tragen Sie die Beispiele in die 2. Spalte der Tabelle ein.

$2x^2 - 4x = 0$ $2 \cdot (x-1)^2 - 8 = 0$

$0{,}5x^2 + x - 1{,}5 = 0$ $0{,}2 \cdot (x-4)^2 = 0$

$3 \cdot (x-7) \cdot (x+2) = 0$ $x^2 - 4 = 0$

Aufgabe 2:

Ordnen Sie den verschiedenen Fällen in der Tabelle jeweils das mit geringstem Aufwand anzuwendende Lösungsverfahren zu und notieren Sie dieses an entsprechender Stelle in der der 3. Spalte der Tabelle.

... wird durch **Normieren** (Division durch a) und mithilfe der ***pq-Formel*** gelöst.

... wird mittels ***Satz vom Nullprodukt (Ablesen)*** gelöst.

... wird durch Umformen und ***Wurzelziehen*** gelöst.

... wird durch ***Ausklammern*** und ***Satz vom Nullprodukt (Ablesen)*** gelöst.

... wird durch Umformen und ***Wurzelziehen*** gelöst.

Aufgabe 3:

Lösen Sie die in Aufgabe 1 gegebenen Gleichungen ohne Hilfsmittel geschickt. Nutzen Sie dazu das passende Lösungsverfahren.

M3: NULLSTELLEN GANZRATIONALER FUNKTIONEN
– bekannte Lösungsverfahren nutzen –

Sie kennen bereits verschiedene Verfahren zur Berechnung der Nullstellen von quadratischen Funktionen. Überprüfen Sie im Folgenden, inwiefern Ihnen diese bereits bekannten Lösungsverfahren bei der Nullstellenberechnung von ganzrationalen Funktionen weiterhelfen können.

Hinweis: *Gegebenenfalls müssen auch mehrere der bekannten Verfahren hintereinander ausgeführt werden. Zudem gibt es auch ganzrationale Funktionen, bei denen die Nullstellen nur mithilfe digitaler Hilfsmittel (z.B. MMS) ermittelt werden können.*

Bekannte Lösungsverfahren bei der Nullstellenberechnung quadratischer Funktionen:

- Wurzelziehen ***(WZ)***
- Ausklammern ***(AK)***
- pq-Formel ***(PQ)***
- Satz vom Nullprodukt (Ablesen) ***(NP)***

Aufgabe:

a) Ordnen Sie zunächst, falls möglich, jeder der unten aufgelisteten ganzrationalen Funktion ein oder mehrere der bekannten Lösungsverfahren zu, die Ihrer Meinung nach zur Berechnung der Nullstellen genutzt werden müssen. Notieren Sie das bzw. die jeweiligen Kürzel (s.o.) hinter der jeweiligen Funktionsgleichung. Markieren Sie diejenigen Funktionen, bei denen Ihnen keines der bekannten Verfahren weiterhilft, sondern lediglich das MMS.

b) Berechnen Sie anschließend, falls ohne Hilfsmittel möglich, die Nullstellen der folgenden ganzrationalen Funktionen mit den von Ihnen zugeordneten Lösungsverfahren.

(1) $f(x) = x^3 - 9x$ ____________

(2) $f(x) = -3x^3 - 6x^2 + 9x$ ____________

(3) $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$ ____________

(4) $f(x) = (x^2 - 6x + 9) \cdot (x + 3)$ ____________

(5) $f(x) = 2x^6 - 12x^5 + 10x^4$ ____________

(6) $f(x) = x^5 - 9x^2 + 20$ ____________

(7) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ ____________

(8) $f(x) = (x^3 - 8) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 4x)$ ____________

M4*: NULLSTELLEN GANZRATIONALER FUNKTIONEN
– Übungsaufgaben (optional) –

1 Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen im Kopf und notieren Sie diese.

a) $(x-3)\cdot(5x+10)=0$ b) $(x^3+8)\cdot(x+7)=0$ c) $(x^2-9)\cdot(3x+1)=0$

$\Leftrightarrow$_______________ $\Leftrightarrow$_______________ $\Leftrightarrow$_______________

d) $x^3-2x^2=0$ e) $(2x-6)\cdot(6x+2)=0$ f) $x^6-27x^3=0$

$\Leftrightarrow$_______________ $\Leftrightarrow$_______________ $\Leftrightarrow$_______________

g) $(2+x^4)\cdot(6-x^2)=0$ h) $x^5+7x^4=0$ i) $3\cdot(x^2+2)=0$

$\Leftrightarrow$_______________ $\Leftrightarrow$_______________ $\Leftrightarrow$_______________

2 Bestimmen Sie ohne Hilfsmittel alle Nullstellen der jeweils gegebenen Funktion f. Geben Sie dabei auch die Rechenverfahren (pq-Formel (PQ); Ausklammern (AK); Satz vom Nullprodukt (NP); Wurzelziehen (WZ)) an, die Sie zur Berechnung nutzen.

(1) $f(x)=2x^3+6x^2-20x$ Lösungsverfahren: _______________

(2) $f(x)=-10x^4-100x^2$ Lösungsverfahren: _______________

(3) $f(x)=3x^5-\frac{1}{27}x^3$ Lösungsverfahren: _______________

(4) $f(x)=(x^3-3x^2)\cdot(x^2-4x+10)$ Lösungsverfahren: _______________

3 Lösen Sie die beiden Aufgaben ohne Hilfsmittel.

Nach starken Regenfällen im Gebirge steigt der Wasserspiegel in einem Stausee an. Die Zuflussgeschwindigkeit des Wassers in den Stausee lässt sich näherungsweise beschreiben durch die Funktion f mit

$$\boldsymbol{f(t)=t^3-24t^2+144t}$$

(t Zeit nach Regenbeginn in Stunden, $f(t)$ Zuflussgeschwindigkeit in m^3/h). Berechnen Sie, wann kein Wasser mehr in den Stausee fließt.

Die Höhe h eines Heißluftballons über dem Boden (in m) wird näherungsweise durch die Funktion

$$\boldsymbol{h(t)=-0{,}4t^3+6t^2},$$

t in min, beschrieben.

Berechnen Sie die Dauer der Ballonfahrt.

4* (Zusatzaufgabe)

Lösen Sie die nebenstehende Aufgabe mit den Funktionalitäten eines WTR.

Die Anzahl der Besucher eines Schnellrestaurants, das um 10 Uhr öffnet, kann näherungsweise durch die Funktion f mit

$$\boldsymbol{f(x)=(-0{,}04x^2+0{,}1x+16)\cdot(x-10)}$$

beschrieben werden. Dabei gibt x die Uhrzeit in Stunden und $f(x)$ die Besucheranzahl an.

Berechnen Sie, wann keine Besucher mehr im Restaurant sind.

M1 – Lösungen

Hinweis: „∨“ ist eine mathematische Kurzschreibweise für „oder“

$$x^2 - 81 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 81$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{81} \lor x = -\sqrt{81}$$
$$\Leftrightarrow x = 9 \lor x = -9$$

Lösungsverfahren:

Umformen und Wurzelziehen

$$x^2 + 3x = 0$$
$$\Leftrightarrow x \cdot (x+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \lor x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \lor x = -3$$

Lösungsverfahren:

Ausklammern und Satz vom Nullprodukt[1]

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} + \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} \lor x = -\frac{5}{2} - \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \lor x = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} \lor x = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \lor x = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \lor x = -3$$

Lösungsverfahren:

pq-Formel

$$-3 \cdot (x-1)^2 + 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow -3 \cdot (x-1)^2 = -12$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 2 \lor x - 1 = -2$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \lor x = -1$$

Lösungsverfahren:

Umformen und Wurzelziehen

$$(x-5) \cdot (x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 5 = 0 \lor x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 5 \lor x = -1$$

Lösungsverfahren:

Satz vom Nullprodukt[1]

$$-2x^2 + 8x = 0$$
$$\Leftrightarrow -2x \cdot (x-4) = 0$$
$$\Leftrightarrow -2x = 0 \lor x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \lor x = 4$$

Lösungsverfahren:

Ausklammern und Satz vom Nullprodukt[1]

Hinweis:

Die in den Lösungen angegebenen Verfahren sind so gewählt, dass sie in der Regel den geringsten Aufwand erfordern. Andere Lösungsverfahren sind ebenfalls möglich.

---

[1] Ist eine Funktionsgleichung in einer faktorisierten Form angegeben, so können die Nullstellen der Funktion (als Nullstellen der Faktoren) direkt abgelesen werden.

Es gilt: *Ein Produkt ist genau dann null, wenn einer der Faktoren null ist.*

Beispiel: $f(x) = (x-7)(x+5)(3x-12)$

$$(x-7)(x+5)(3x-12) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-7) = 0 \lor (x+5) = 0 \lor (3x-12) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 7 \lor x = -5 \lor x = 4$$

Diese Vorgehensweise wird hier kurz „Satz vom Nullprodukt“ genannt.

M2 – Lösungen

Allgemeine Fälle	**Beispiele** (Aufgabe 1)	**Lösungsverfahren** (Aufgabe 2)
1. Fall: Normalform mit $b \neq 0, c \neq 0$ $\boldsymbol{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$	$0{,}5x^2 + x - 1{,}5 = 0$ z.B.: $x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$	… wird durch **Normieren** (Division durch a) und mithilfe der ***pq-Formel*** gelöst.
2. Fall: Normalform mit $b \neq 0, c = 0$ $\boldsymbol{a \cdot x^2 + b \cdot x = 0}$	$2x^2 - 4x = 0$ z.B.: $x^2 - x = 0$	… wird durch ***Ausklammern*** und ***Satz vom Nullprodukt (Ablesen)*** gelöst.
3. Fall: Normalform mit $b = 0, c \neq 0$ $\boldsymbol{a \cdot x^2 + c = 0}$ Scheitelpunktform mit $d = 0, e \neq 0$ $\boldsymbol{a \cdot x^2 + e = 0}$	$x^2 - 4 = 0$ z.B.: $-\frac{1}{2}x^2 + 8 = 0$	… wird durch Umformen und ***Wurzelziehen*** gelöst.
4. Fall: Scheitelpunktform mit $d \neq 0, e \neq 0$ $\boldsymbol{a \cdot (x - d)^2 + e = 0}$	$2 \cdot (x - 1)^2 - 8 = 0$ z.B.: $(x + 0{,}1)^2 + 4 = 0$	… wird durch Umformen und ***Wurzelziehen*** gelöst.
5. Fall: Scheitelpunktform mit $e = 0$ $\boldsymbol{a \cdot (x - d)^2 = 0}$ Faktorisierte Form mit $r, s \in IR$ $\boldsymbol{a \cdot (x - r) \cdot (x - s) = 0}$	$0{,}2 \cdot (x - 4)^2 = 0$ z.B.: $(x + 0{,}75)^2 = 0$ $3 \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) = 0$ z.B.: $-\frac{5}{6} \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \sqrt{3}\right) = 0$	… wird mittels ***Satz vom Nullprodukt (Ablesen)*** gelöst.

Aufgabe 3

$0{,}5x^2 + x - 1{,}5 = 0$

$$
\begin{aligned}
& 0{,}5x^2 + x - 1{,}5 = 0 \quad | \cdot 2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 2x - 3 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = -\frac{2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)} \quad \vee \quad x = -\frac{2}{2} - \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)} \\
\Leftrightarrow\ & x = -1 + \sqrt{1 + 3} \quad \vee \quad x = -1 - \sqrt{1 + 3} \\
\Leftrightarrow\ & x = -1 + \sqrt{4} \quad \vee \quad x = -1 - \sqrt{4} \\
\Leftrightarrow\ & x = -1 + 2 \quad \vee \quad x = -1 - 2 \\
\Leftrightarrow\ & x = 1 \quad \vee \quad x = -3
\end{aligned}
$$

$2x^2 - 4x = 0$

$$
\begin{aligned}
& 2x^2 - 4x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2x \cdot (x - 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2x = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \quad \vee \quad x = 2
\end{aligned}
$$

$x^2 - 4 = 0$

$$
\begin{aligned}
& x^2 - 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt{4} \quad \vee \quad x = -\sqrt{4} \\
\Leftrightarrow\ & x = 2 \quad \vee \quad x = -2
\end{aligned}
$$

$2 \cdot (x - 1)^2 - 8 = 0$

$$
\begin{aligned}
& 2 \cdot (x - 1)^2 - 8 = 0 \quad | + 8 \\
\Leftrightarrow\ & 2 \cdot (x - 1)^2 = 8 \quad | : 2 \\
\Leftrightarrow\ & (x - 1)^2 = 4 \\
\Leftrightarrow\ & x - 1 = 2 \quad \vee \quad x - 1 = -2 \\
\Leftrightarrow\ & x = 3 \quad \vee \quad x = -1
\end{aligned}
$$

$3 \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) = 0$

$$
\begin{aligned}
& 3 \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x - 7 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 7 \quad \vee \quad x = -2
\end{aligned}
$$

$0{,}2 \cdot (x - 4)^2 = 0$

$$
\begin{aligned}
& 0{,}2 \cdot (x - 4)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x - 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 4
\end{aligned}
$$

M3 – Lösungen

(1) $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 9x}$ <u>AK, NP und WZ</u>

$$\begin{aligned} & x^3 - 9x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x \cdot (x^2 - 9) \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x^2 - 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x^2 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x = 3 \ \lor\ x = -3 \end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{f(x) = -3x^3 - 6x^2 + 9x}$ <u>AK, NP und PQ</u>

$$\begin{aligned} & -3x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -3x \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -3x = 0 \ \lor\ x^2 + 2x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x = -1 + \sqrt{1^2 + 3} \ \lor\ x = -1 - \sqrt{1^2 + 3} \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x = -1 + \sqrt{4} \ \lor\ x = -1 - \sqrt{4} \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x = 1 \ \lor\ x = -3 \end{aligned}$$

(3) $\boldsymbol{f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2}$ <u>AK, NP, WZ und PQ</u>

$$\begin{aligned} & x^4 + x^3 - 2x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 \cdot (x^2 + x - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 0 \ \lor\ x^2 + x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x^2 + x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 2} \ \lor\ x = -\tfrac{1}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 2} \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{8}{4}} \ \lor\ x = -\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{8}{4}} \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{9}{4}} \ \lor\ x = -\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{9}{4}} \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} \ \lor\ x = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x = 1 \ \lor\ x = -2 \end{aligned}$$

(4) $\boldsymbol{f(x) = (x^2 - 6x + 9) \cdot (x + 3)}$ <u>NP und PQ</u>

$$\begin{aligned} & (x^2 - 6x + 9) \cdot (x + 3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 6x + 9 = 0 \ \lor\ x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 3 + \sqrt{3^2 - 9} \ \lor\ x = 3 - \sqrt{3^2 - 9} \ \lor\ x = -3 \\ \Leftrightarrow\ & x = 3 \ \lor\ x = -3 \end{aligned}$$

(5) $\boldsymbol{f(x) = 2x^6 - 12x^5 + 10x^4}$ <u>AK, NP, WZ und PQ</u>

$$\begin{aligned} & 2x^6 - 12x^5 + 10x^4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^4 \cdot (x^2 - 6x + 5) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^4 = 0 \ \lor\ x^2 - 6x + 5 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x = 3 + \sqrt{3^2 - 5} \ \lor\ x = 3 - \sqrt{3^2 - 5} \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x = 3 + \sqrt{4} \ \lor\ x = 3 - \sqrt{4} \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \ \lor\ x = 5 \ \lor\ x = 1 \end{aligned}$$

(6) $\boldsymbol{f(x) = x^5 - 9x^2 + 20}$ <u>nur mit MMS lösbar</u>

(7) $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6}$ <u>nur mit MMS lösbar</u>

(8) $\boldsymbol{f(x) = (x^3 - 8) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 4x)}$ <u>NP, AK und WZ</u>

$$\begin{aligned} & (x^3 - 8) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 4x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 - 8 = 0 \ \lor\ x^2 + 1 = 0 \ \lor\ x^2 + 4x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 = 8 \ \lor\ x^2 = -1 \ \lor\ x \cdot (x + 4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = \sqrt[3]{8} \ \lor\ x = 0 \ \lor\ x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 2 \ \lor\ x = 0 \ \lor\ x = -4 \end{aligned}$$

| für $x^2 = -1$ gibt es keine Lösung (in $I\!R$)

M4* – Lösungen

1

a) $(x-3)\cdot(5x+10)=0$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=3} \ \vee \ \boldsymbol{x=-2}$

b) $(x^3+8)\cdot(x+7)=0$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=-2} \ \vee \ \boldsymbol{x=-7}$

c) $(x^2-9)\cdot(3x+1)=0$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=3} \vee \boldsymbol{x=-3} \vee \boldsymbol{x=-\frac{1}{3}}$

d) $x^3-2x^2=0$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=0} \ \vee \ \boldsymbol{x=2}$

e) $(2x-6)\cdot(6x+2)=0$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=3} \ \vee \ \boldsymbol{x=-\frac{1}{3}}$

f) $x^6-27x^3=0$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=0} \ \vee \ \boldsymbol{x=3}$

g) $(2+x^4)\cdot(6-x^2)=0$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=\sqrt{6}} \vee \boldsymbol{x=-\sqrt{6}}$

h) $x^5+7x^4=0$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=0} \ \vee \ \boldsymbol{x=-7}$

i) $3\cdot(x^2+2)=0$
$\Rightarrow$ ***keine Lösung***

2

(1) $\boldsymbol{f(x)=2x^3+6x^2-20x}$ Lösungsverfahren: AK, NP und PQ

$$2x^3+6x^2-20x=0$$
$$\Leftrightarrow 2x\cdot(x^2+3x-10)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x=0 \ \vee \ x^2+3x-10=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=-\frac{3}{2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+10} \ \vee \ x=-\frac{3}{2}-\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+10}$$
$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{40}{4}} \ \vee \ x=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{40}{4}}$$
$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}} \ \vee \ x=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}}$$
$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=-\frac{3}{2}+\frac{7}{2} \ \vee \ x=-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=2 \ \vee \ x=-5$$

(2) $\boldsymbol{f(x)=-10x^4-100x^2}$ Lösungsverfahren: AK, NP und WZ

$$-10x^4-100x^2=0$$
$$\Leftrightarrow -10x^2\cdot(x^2+10)=0$$
$$\Leftrightarrow -10x^2=0 \ \vee \ x^2+10=0$$
$$\Leftrightarrow x^2=0 \ \vee \ x^2=-10$$
$$\Leftrightarrow x=0$$

(3) $\boldsymbol{f(x)=3x^5-\frac{1}{27}x^3}$ Lösungsverfahren: AK und WZ

$$3x^5-\frac{1}{27}x^3=0$$
$$\Leftrightarrow 3x^3\cdot\left(x^2-\frac{1}{81}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 3x^3=0 \ \vee \ x^2-\frac{1}{81}=0$$
$$\Leftrightarrow x^3=0 \ \vee \ x^2=\frac{1}{81}$$
$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=\frac{1}{9} \ \vee \ x=-\frac{1}{9}$$

(4) $\boldsymbol{f(x)=(x^3-3x^2)\cdot(x^2-4x+10)}$ Lösungsverfahren: NP, AK und PQ

$$(x^3-3x^2)\cdot(x^2-4x+10)=0$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2=0 \ \vee \ x^2-4x+10=0$$
$$\Leftrightarrow x^2\cdot(x-3)=0 \ \vee \ x=2+\sqrt{2^2-10} \ \vee \ x=2-\sqrt{2^2-10}$$
$$\Leftrightarrow x^2=0 \ \vee \ x-3=0 \ \vee \ x=2+\sqrt{-6} \ \vee \ x=2-\sqrt{-6}$$
$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=3$$

3 Aufgaben zur Nullstellenberechnung

ORANGE

$$f(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow t^3 - 24t^2 + 144t = 0$$
$$\Leftrightarrow t \cdot (t^2 - 24t + 144) = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 0 \quad \vee \quad t^2 - 24t + 144 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 0 \quad \vee \quad t = 12 + \sqrt{12^2 - 144} \quad \vee \quad t = 12 - \sqrt{12^2 - 144}$$
$$\Leftrightarrow t = 0 \quad \vee \quad t = 12$$

Es fließt 12 Stunden nach Regenbeginn kein Wasser mehr in den Stausee.

GRÜN

$$h(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow -0{,}4t^3 + 6t^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow -0{,}4t^2 \cdot (t - 15) = 0$$
$$\Leftrightarrow -0{,}4t^2 = 0 \quad \vee \quad t - 15 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 0 \quad \vee \quad t = 15$$

Die Ballonfahrt dauert 15 Minuten.

4* Zusatzaufgabe

LILA

$$f(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (-0{,}04x^2 + 0{,}1x + 16) \cdot (x - 10) = 0$$
$$\Leftrightarrow -0{,}04x^2 + 0{,}1x + 16 = 0 \quad \vee \quad x - 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2}x - 400 = 0 \quad \vee \quad x - 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{4} + \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 400} \quad \vee \quad x = \frac{5}{4} - \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 400} \quad \vee \quad x = 10$$
$$\Rightarrow x \approx 21{,}29 \quad \vee \quad x \approx -18{,}79 \quad \vee \quad x = 10$$

Um ca. 21:17 Uhr sind keine Besucher mehr im Schnellrestaurant.