Die Umkehrfunktion der Normalverteilung im CAS Derive 21.05.07/ ZGH

Die Standardnormalverteilung Φ ist im Computeralgebra-System (CAS) bereits eingebaut und kann mit dem Namen NORMAL( ) als Funktion genutzt werden. Leider steht die Umkehrfunktion Φ^{-1} zur Normalverteilung nicht zur Verfügung, kann jedoch mit elementaren Derivebefehlen selbst definiert werden, wie im folgenden gezeigt wird.

Beispiel: Zum Zielwert 0.95 soll der Ausgangs-x-Wert bestimmt werden,
was auf folgende Gleichung führt: NORMAL(x) = 0.95

Der naheliegende Versuch, diese Gleichung mit dem in DERIVE eingebauten „Löse-Befehl" zu bearbeiten, führt leider zu einer komplizierten Gleichung, in der die Fehlerfunktion ERF auftaucht.

Wird das Lösen genauer definiert, nämlich durch **SOLVE(NORMAL(x) = 0.95, x)**
schreibt DERIVE (unter Windows*) als Ergebnis die Gleichung: **x = 1.64485.**

Diese Gleichung ist aber mathematisch gesehen ein anderes Objekt als eine Zahl, die dann als Ergebnis der Umkehrfunktion genommen werden könnte. Allerdings bietet DERIVE die wenig bekannte Funktion **RHS( )** an, die die rechte Seite einer beliebigen Relation herausgibt:
RHS(x = 1.64485) liefert also endlich den gewünschten x-Wert **1.64485.**

Die Abstraktion vom konkreten Zielwert 0.95 auf einen beliebigen Wert w führt dann zur selbstdefinierten Inversfunktion zur Normalverteilung, die hier mit **invnormal(w)** bezeichnet wird.

invnormal(w) := RHS(SOLVE (NORMAL(x) = w, x))

Das Ausgangsbeispiel: **invnormal(0.95)** = **1.64485**.
Weitere Beispiele, wie sie z.B. beim Signifikanz-Test in der Stochastik benötigt werden:
invnormal(0.90) = **1.28158** **invnormal(0.975)** = **1.95999** **invnormal(0.99)** = **2.32635**

Das reine Bestimmen von x-Werten zu vorgegebenen w-Werten ist jedoch nur die einfachste Möglichkeit der neuen Berechnungsmethode, die aber eine **vollwertige Funktion** darstellt, also insbesondere in Termen eingesetzt und mit anderen Funktionen verknüpft werden kann, wodurch die Möglichkeiten in der Stochastik erheblich erweitert werden. Insbesondere können Formeln aus der Mathematik, in der die Umkehrfunktion Φ^{-1} der Normalverteilung Φ vorkommt, nun analog in DERIVE geschrieben werden. Für häufig vorkommende Berechnungen, wie z.B. das Bestimmen des Signifikanzradius' beim Signifikanztest können selbstdefinierte Funktionen erzeugt werden, die einfach, schnell und sicher die gewünschten Werte liefern, wie im folgenden demonstriert wird.

Für den Signifikanzradius r beim Signifikanztest bei zugrundeliegender Binomialverteiltung $B_{n,p}$ und vorgegebener Risikowahrscheinlichkeit α gilt:

$$r \approx \sqrt{np(1-p)} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

In DERIVE: **signiradius(n, p, a) := sqrt(n p (1-p)) * invnormal(1 – a)**

Der Aufruf von z.B**. signiradius(120, 1/6, 0.05)** liefert gerundet 6.7: Weicht also bei einem Würfel die Anzahl von Sechsen um 7 oder mehr vom Erwartungswert 120/6 = 20 nach oben ab, liefert der Würfel signifikant zu viele Sechsen und kann bei einem Risiko von höchstens 5 % für manipuliert gehalten werden.

---

* Hinweise zur DOS-Version von DERIVE:

In der DOS-Version erzeugt DERIVE als Lösung den **Vektor [x = 1.64485]**, es muss also ein weiterer Befehl zwischengeschaltet werden, der die Gleichung als einzige Komponente dieses Vektors liefert. Der Zugriff auf Komponenten eines Vektors **v** geschieht in DERIVE durch Indizierung, also ist $\mathbf{v_1}$ z.B. die 1.Komponente des Vektors. Der Einbau dieser Indizierung in den Term oben erzeugt auch für die DOS-Version die gewünschte Inversfunktion zur Normalverteilung

invnormal(w) := RHS((SOLVE (NORMAL(x) = w, x) $)_1$)

Autor: Heinz Ziegeldorf, Fritz-Steinhoff-Gesamtschule, Am Bügel 20, 58099 Hagen
Email: H.Ziegeldorf (bei) web.de