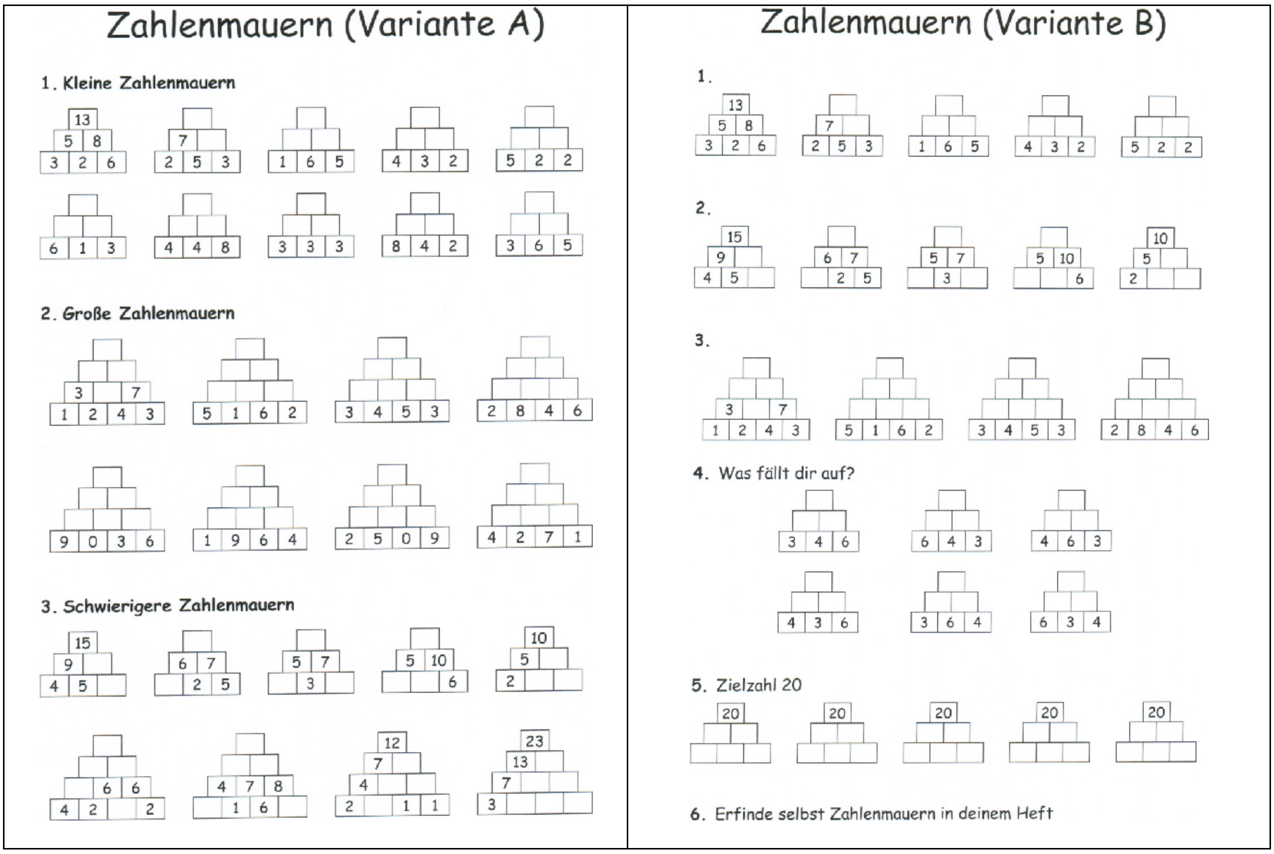
Christoph Selter, IEEM, TU Dortmund

Der neue Mathematiklehrplan für die Grundschule

Eine Illustration durch zehn Unterrichtsbeispiele

Wie die bundesweiten Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK 2005) geht auch der neue Mathematiklehrplan für die Grundschule in NRW davon aus, dass Mathematiklernen mehr umfasst als die Aneignung von *Kenntnissen,* wie beispielsweise die auswendige Verfügbarkeit der Resultate der Einmaleinsaufgaben, und von *Fertigkeiten,* wie etwa die geläufige Beherrschung des Normalverfahrens der schriftlichen Addition. Im Mathematikunterricht sind neben solchen *inhaltsbezogenen* immer auch *prozessbezogene* Kompetenzen wie Argumentieren oder Darstellen zu entwickeln. Der Mehrwert kann durch den Vergleich zweier Arbeitsblätter zu den sog. Zahlenmauern deutlich werden.

In die untere Steinreihe werden Zahlen eingetragen. In die versetzt darüber angeordneten Steine schreibt man jeweils die Summe der Zahlen in den darunter liegenden Steinen, so wie es das erste Beispiel bei Aufgabe 1 zeigt. Die ersten drei Aufgaben der Variante B sind auch in der Variante A enthalten. Bei A finden sich darüber hinaus lediglich weitere Aufgaben desselben Typs. Im Vordergrund steht hier also die Übung der Addition und der Subtraktion.

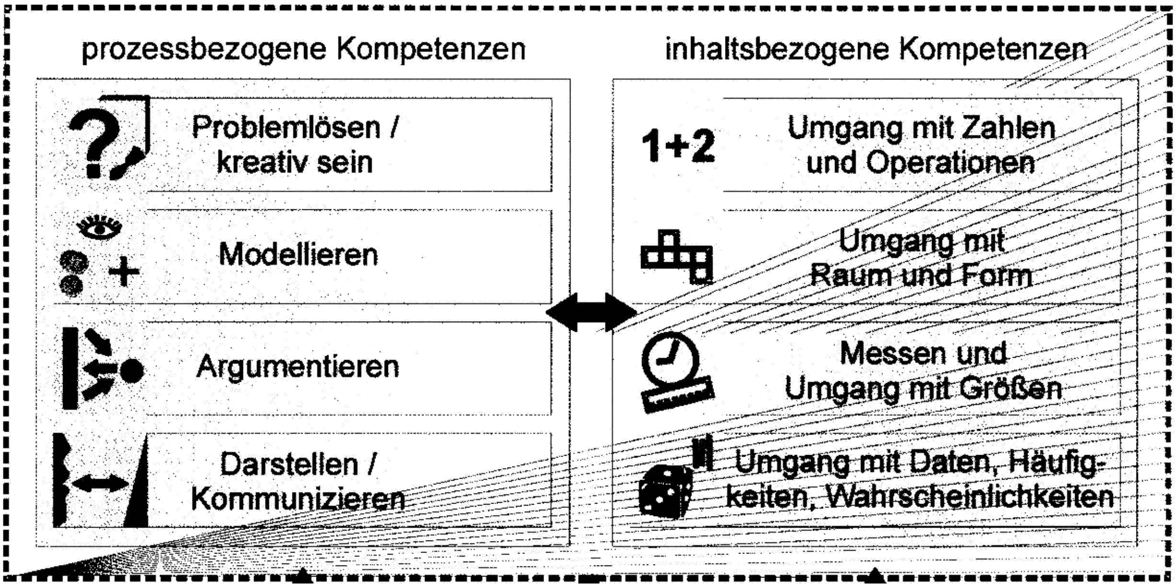


Darum geht es auch bei der Variante B, aber eben nicht nur. Bei der Nummer 4 sollen sich die Kinder damit befassen, wie sich die unterschiedliche Anordnung der 3, der 4 und der 6 auf die anderen Zahlen in der Mauer auswirkt. Bei der Aufgabe 5 sollen sie Mauern mit Zielzahl 20 notieren. Und schließlich sollen sie Zahlenmauern frei erfinden. Hier werden also sowohl *inhalts-* als *auch prozessbezogene* Kompetenzen angesprochen.

Nicht zuletzt die internationalen Vergleichsuntersuchungen wie PISA oder IGLU haben gezeigt, dass in Deutschland die Schulung der prozessbezogenen Kompetenzen – keineswegs nur in der Grundschule, aber dort eben auch – in der Vergangenheit nicht die erforderliche Beachtung gefunden hat. Deren zukünftig stärkere Berücksichtigung darf aber nun andererseits nicht zu einer Vernachlässigung der inhaltsbezogenen Kompetenzen führen. Wo möglich und sinnvoll, sollten beide

Kompetenzfelder integriert angesprochen werden – dies auch, weil Unterrichtszeit knapp und kostbar ist. Im Lehrplan Mathematik Grundschule für NRW heißt es demzufolge (S. 7):

> ***Grundlegende mathematische Bildung*** *zeigt sich in fachbezogenen Kompetenzen, d. h. durch das Zusammenspiel von Kompetenzen, die sich primär auf Prozesse beziehen (prozessbezogene Kompetenzen), und solchen, die sich primär auf Inhalte beziehen (inhaltsbezogene Kompetenzen). Sie entwickeln sich bei der aktiven Auseinandersetzung von Schülerinnen und Schülern mit mathematischen Situationen.*



Wie eine solche integrierte Förderung inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen möglich ist, soll in diesem Papier anhand von zehn Unterrichtsbeispielen dargestellt werden, anhand derer auch Aussagen des Lehrplans zu Kompetenzerwartungen in beiden Bereichen illustriert werden. Denn das ist die entscheidende Neuerung im Vergleich zur Erprobungsfassung von 2003: Es wird nicht nur beschrieben, welche *inhaltsbezogenen* Kompetenzen die Schülerinnen und Schüler erwerben können sollen, sondern entsprechende Aussagen werden auch für den Bereich der *prozessbezogenen* Kompetenzen formuliert.

Der Aufbau der folgenden zehn Kapitel ist identisch. Zunächst wird in einer tabellarischen Übersicht in Anlehnung an die obige Abbildung auf einen Blick verdeutlicht, welche der vier inhaltsbezogenen und welche der vier prozessbezogenen Kompetenzbereiche *in besonderer Weise* angesprochen werden. Dann folgt ein Kurzüberblick über den Hintergrund des beschriebenen Aufgabenfelds, bevor überblicksartig und illustrierend Einblicke in durchgeführten Unterricht gegeben werden. Abschließend wird detailliert ausgeführt, welche inhaltsbezogenen und welche prozessbezogenen Kompetenzen angesprochen werden. In den Formulierungen ist dabei das aus Platzgründen weggelassene ‚Die Schülerinnen und Schüler' stets mitzudenken. Aus dem gleichen Grund sind Abkürzungen für die Kompetenzbereiche verwendet worden: PL beispielsweise steht für ‚Problemlösen' oder RF für ‚Raum und Form'.

Im Einzelfall wären in der tabellarischen Auflistung sicherlich auch andere Zuordnungen denkbar gewesen. Die in den einzelnen Kapiteln angedeuteten Unterrichtsbeispiele sollten aber auch nicht als unmittelbar umzusetzende Vorgaben, sondern als Orientierungsangebote verstanden werden, die an die unterschiedlichen Gegebenheiten der eigenen Schule anzupassen sind.

Für die vier o. a. Inhaltsbereiche – Zahlen und Operationen, Raum und Form, Messen und Größen sowie Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten – werden jeweils zwei Unterrichtsbeispiele ausgeführt, bei denen prozessbezogene Kompetenzen gleichermaßen gefördert werden. Um zu verdeutlichen, dass die Inhaltsbereiche auch miteinander zu verschränken sind, befasst sich das dritte Beispiel im Schnittbereich von ‚Zahlen und Operationen' und ‚Raum und Form' damit, wie man mit Würfeln bauen und dabei Zahlenfolgen entdecken und beschreiben kann.

Wie bereits angedeutet, wäre es verfehlt, die Forderung nach einer stärkeren Berücksichtigung prozessbezogener Kompetenzen so zu verstehen, dass der Erwerb von Basiskompetenzen, der bisweilen auch ein *anschauungs- und verständnsibasiertes* Rechentraining erfordert, nachgeordnet erfolgen oder gar vernachlässigt werden könne. Wenn ein Kind nicht weiß, dass sich 399 in unmittelbarer Nähe der 400 befindet, wird es kaum beschreiben und begründen können, warum es bei der Addition von 399 erst 400 addiert und dann 1 subtrahiert.

Das Unterrichtsbeispiel in Kapitel 10 beschreibt in diesem Sinne, wie in einem geöffneten Unterricht die Kinder mit der individuellen Erarbeitung des Einmaleins mit dem Ziel der auswendigen Verfügbarkeit befasst sind, ohne dass dabei die prozessbezogenen Kompetenzen zu kurz kommen. Die folgende Übersicht gibt einen ersten Überblick darüber, welche inhaltsbezogenen und welche prozessbezogenen Kompetenzbereiche in den einzelnen Unterrichtsbeispielen angesprochen werden.

	Problemlösen/Kreativ sein	Modellieren	Argumentieren	Darstellen/Kommunizieren	Zahlen und Operationen	Raum und Form	Messen und Größen	Daten, Häufigk., Wahrsch.
1. Zahlengitter mit Zielzahl 20	X		X		X			
2. Im Kopf oder schriftlich?	X		X	X	X			
3. Mit Würfel bauen und Zahlenfolgen entdecken	X		X	X	X	X		
4. Bauen mit Holzwürfeln	X			X		X		
5. Zeichnen regelmäßiger Vielecke	X		X			X		
6. Kleine Hunde – große Hunde		X	X	X			X	
7. Über Textaufgaben nachdenken		X		X			X	
8. Daten aus der Zeitung		X	X					X
9. Zahlenschloss	X		X					X
10. Mit dem Arbeitsplan zum Einmaleinspass	X	X	X	X	X			

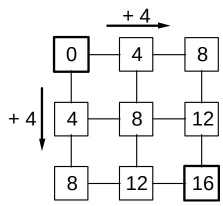
Für diesen Beitrag wurden überwiegend Beispiele aus dem dritten oder vierten Schuljahr gewählt, um die Zielperspektive anzudeuten („Das sollen die Kinder bis zum Ende des vierten Schuljahres lernen können.“). Selbstverständlich entwickeln sich Kompetenzen nur langfristig. Die integrierte Förderung prozess- und inhaltsbezogener Kompetenzen *von Anfang an* ist daher unverzichtbar. Auch aus diesem Grund wird im zehnten Kapitel ein Beispiel aus dem zweiten Schuljahr beschrieben. Es bleibt jedoch einem weiteren Papier vorbehalten, weitere illustrierende Beispiele für die Schuleingangsphase zusammenzustellen.

Ein letzter Aspekt sei abschließend noch erwähnt. In diesem Papier werden die inhalts- und die prozessbezogenen Kompetenzen nicht durch Testaufgaben, sondern durch dokumentierte Unterrichtsbeispiele illustriert, welche aus Sicht des Autors deutlich besser als Ausgangspunkte für die konkrete Unterrichtsentwicklung ‚vor Ort’ dienen können als Testaufgaben, die das, was Mathematik wirklich ist und was guten Mathematikunterricht ausmacht, nur recht eingeschränkt abbilden können.

1 Zahlengitter mit Zielzahl 20

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
Problemlösen / kreativ sein	Umgang mit Zahlen und Operationen
Modellieren	Umgang mit Raum und Form
Argumentieren	Messen und Umgang mit Größen
Darstellen / Kommunizieren	Umgang mit Daten, Häufigkeiten und Wahrsch.

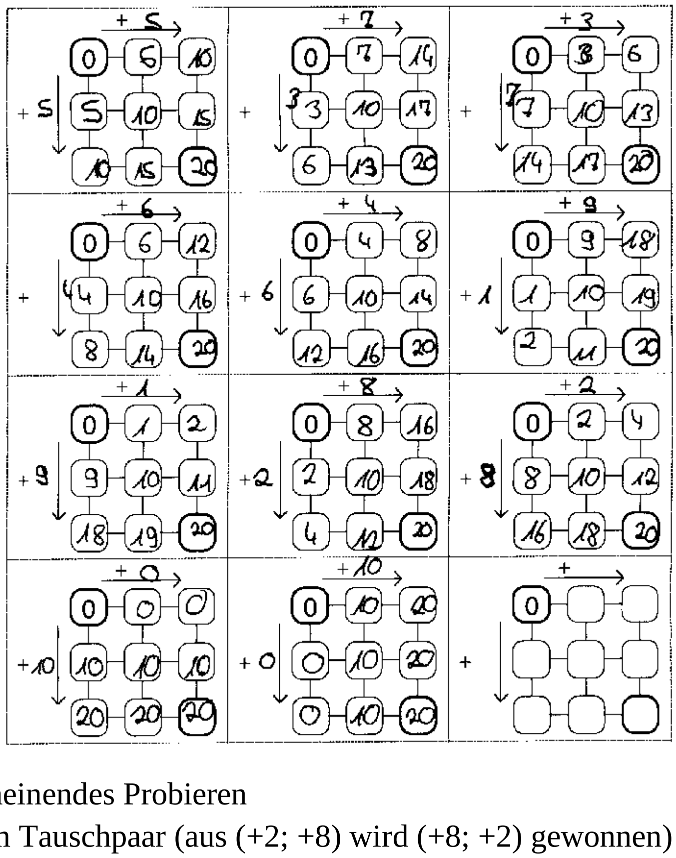
1.1 Kurzbeschreibung



Den Zahlengittern liegt folgende Aufgabenvorschrift zugrunde: Zunächst wird die sog. *Startzahl* (hier: 0) in das linke obere Feld eingetragen. Dann schreibt man fortlaufend in die benachbarten Felder die um die *linke* bzw. um die *obere Pluszahl* vermehrte Zahl. Die rechte untere Zahl heißt *Zielzahl*, die mittlere *Mittelzahl* und die anderen *Randzahlen*. Die Verwendung zweier gleicher Pluszahlen (+4; +4) ist ebenso möglich wie die der 0 (vgl. Selter 2004).

1.2 Umsetzung im Unterricht

In einem dritten Schuljahr wurden eingangs an einem Beispiel (+2, +5) an der Tafel die Aufgabenvorschrift sowie die oben genannten Begriffe eingeführt. Zwei Schüler haben dies daraufhin bei weiteren Beispielen (+8, +8) und (+5, +2) angewendet. An ihnen sollte deutlich werden, dass auch zwei gleiche Pluszahlen möglich waren und dass durch ein Pluszahl-Paar (+2; +5) sowie sein ‚Tauschpaar' (+5; +2) zwei verschiedene Zahlengitter gebildet wurden.

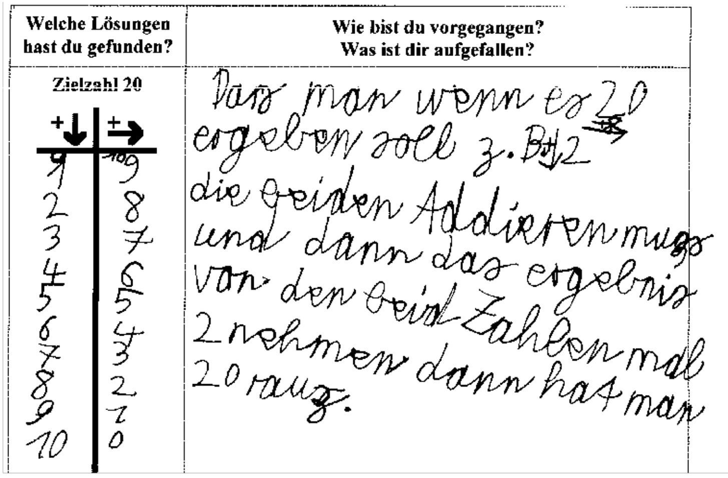


Dann wurde die Aufgabe gestellt, möglichst viele Pluszahl-Paare zu finden, die zur *Zielzahl 20* führten. Einige Kinder äußerten erste Vermutungen, von denen die am häufigsten genannte (+5; +5) zur Verdeutlichung der Aufgabenstellung festgehalten wurde.

Die Kinder erhielten ein Arbeitsblatt, auf dem sie alle gefundenen Möglichkeiten notieren sollten, und wurden dazu angeregt, die Pluszahl-Paare in einer Tabelle einzutragen. Zudem wurden sie gebeten, in einem Forscherbericht festzuhalten, wie sie vorgingen und was ihnen auffiel. Des Weiteren wurde gesagt, dass für die Schüler, die das Arbeitsblatt mit der Zielzahl 20 bearbeitet hätten, ein eben solches für die Zielzahl 22 zur Verfügung stand und dass der Arbeitsphase eine Sammlungs- und Reflexionsphase folgen würde. In der Arbeitsphase waren unterschiedliche Vorgehensweisen der Kinder zu beobachten, …

- unsystematisches oder unsystematisch erscheinendes Probieren
- Ableiten eines Pluszahlen-Paares aus seinem Tauschpaar (aus (+2; +8) wird (+8; +2) gewonnen)
- Zerlegen der Mittelzahl 10 in zwei Summanden, die dann als Pluszahlen dienen, und
- operatives Variieren der Pluszahlen (z. B. linke Pluszahl um 1 erhöhen, obere um 1 vermindern).

Einige Schüler waren nach knapp fünf Minuten der Meinung, dass keine weiteren Möglichkeiten mehr existieren; bei anderen war dieses nach rund 20 Minuten der Fall. Alle Kinder arbeiteten anschließend an ihrem Forscherbericht zur Zielzahl 20.



Welche Lösungen hast du gefunden?	Wie bist du vorgegangen? Was ist dir aufgefallen?
Zielzahl 20	Das man wenn es 20 ergeben soll z.B. 12 die beiden Addieren muss und dann das ergebnis von den beid Zahlen 2 nehmen mal 20 rauz. dann hat man

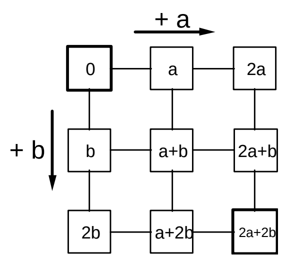
+ ↓	+ →
1	9
2	8
3	7
4	6
5	5
6	4
7	3
8	2
9	1
10	0

Eine ganze Reihe von Schülern befasste sich dann noch mit der Übertragung der Aufgabenstellungen auf die Zielzahl 22. Drei Kinder setzten sich in dieser Einführungsstunde sogar damit auseinander, die Anzahl der Möglichkeiten zu einer selbst gewählten Zielzahl kleiner gleich 30 zu finden.

Zum Abschluss wurde durch das geordnete Anhängen aller elf Zahlengitter das Nachdenken über deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede angeregt. Diese waren zur Zeitersparnis bereits während der Arbeitsphase von zwei Schülern auf vorbereiteten Zahlengittern notiert worden, die an der Tafel mit Hilfe von Haftstreifen flexibel umgeordnet werden konnten.

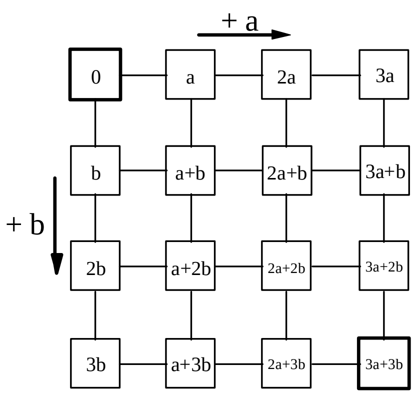
Die Kinder begründeten, warum sie alle Möglichkeiten gefunden hatten und lasen aus ihren Forscherberichten vor, wie sie vorgegangen waren und was ihnen aufgefallen war. In der Zusammenschau der Zahlengitter wurden diverse Auffälligkeiten benannt, wie etwa …

- Als Mittelzahl kommt immer die 10 (bzw. die 11) heraus.
- Wenn die linke Pluszahl um 1 größer wird, wird die obere Pluszahl um 1 kleiner.
- Rechts oben (bzw. links unten bzw. rechts unten (Zielzahl)) steht immer eine gerade Zahl.
- Die da (die rechte mittlere) und die da (die untere Mittelzahl) sind zusammen immer 30.
- Bei der Zielzahl 20 sind es immer 30, wenn man die Zahlen von links oben nach rechts unten (bzw. von rechts oben nach links unten) zusammenzählt.



Da die einzelnen Kinder natürlich unterschiedlich weit fortgeschritten waren, schloss sich eine Stunde an, in der sie individuell die Gelegenheit erhielten, die Aufgabenstellungen auf weitere Zielzahlen zu übertragen.

Dem 'allgemeinen' 3·3-Gitter kann man die Auffälligkeiten entnehmen, die die Kinder speziell für die Zielzahl 20 formuliert haben. Zählt man zum Beispiel die Zahlen in den Diagonalen zusammen, so erhält man stets 3a+3b. Oder man sieht an der Bauart der rechten oberen (2a), der linken unteren (2b) sowie der Zielzahl (2a+2b), dass hier nur gerade Zahlen auftreten können.



Am darauf folgenden Tag stand die Aufgabenstellung im Vordergrund, bestimmte Zielzahlen (30 bzw. 33) in einem *4·4-Zahlengitter* zu erreichen. Dabei ergibt sich als Zielzahl nicht 2a+2b, sondern 3a+3b. Also können nur Vielfache von 3 als Zielzahlen auftreten.

Abschließend wurden einige Auffälligkeiten des 4·4-Gitters besprochen. Interessant ist beispielsweise, dass die Anzahl der Pluszahlen-Paare für eine bestimmte Zielzahl – wie im Übrigen bei quadratischen Gittern beliebiger Größe – um eines größer als die Summe der beiden Zahlen ist.

Die folgende Auflistung weiterer Aufgabenvariationen für das 3·3-Gitter verdeutlicht dessen vielfältige Einsatzmöglichkeiten, einsetzbar ab dem 2. Schuljahr.

Trage die fehlenden Zahlen ein, …

a) gegeben sind die Startzahl und die beiden Pluszahlen
b) gegeben sind die Zielzahl und die beiden Pluszahlen
c) gegeben ist eine der beiden Diagonalen
d) gegeben sind jeweils zwei der drei folgenden Zahlen: Startzahl, Mittelzahl und Zielzahl
e) gegeben sind zwei (drei) beliebige Zahlen
f) keine Zahlen sind vorgegeben (Erfinden eigener Zahlengitter)

Forscheraufgaben

a) Was ändert sich wie, wenn eine der beiden Pluszahlen um 1 (2 etc.) erhöht bzw. vermindert wird?
b) Vergleiche die Mittelzahl mit der Start- und der Zielzahl!
c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Zahlengitter auszufüllen, wenn jeweils zwei der drei folgenden Zahlen gegeben sind: Startzahl, Mittelzahl und Zielzahl?
d) Welche Zusammenhänge bestehen zwischen Zahlengittern mit gleicher Start- und Zielzahl?
e) Welche Zahlen kann man als Zielzahlen erreichen, welche nicht?
f) Was ändert sich, wenn man die Startzahl verändert, aber die Zielzahl fix lässt?
g) Welche Zielzahlen ergeben sich, wenn als Pluszahlen nur bestimmte Zahlen zugelassen sind (z. B. Fünferzahlen)?

Addition im Zahlengitter

a) Addiere jeweils zwei gegenüberliegende Randzahlen
b) Addiere die Zahlen in den beiden Diagonalen
c) Addiere die Zahlen in jeder der drei Spalten (Zeilen)
d) Addiere alle acht Randzahlen und vergleiche sie mit der Mittelzahl, usw.

Sonderfälle wie beispielsweise gleiche Pluszahlen (a=b), benachbarte Pluszahlen (a=b+1) bzw. Vielfachenbeziehungen wie a=2b oder die Beschränkung auf bestimmte Pluszahlen (z. B. nur Vielfache von 5) führen zu weiteren interessanten Auffälligkeiten.

1.3 Kompetenzerwartungen

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
• probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (PL: lösen) • übertragen Vorgehensweisen auf ähnliche Sachverhalte (PL: übertragen) • stellen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten an (ARG: vermuten) • erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen und vollziehen Begründungen anderer nach (ARG: begründen)	• geben die Zahlensätze des kleinen Einspluseins automatisiert wieder und leiten deren Umkehrungen sicher ab) (ZO: schnelles Kopfrechnen) • lösen Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (ZO: Zahlenrechnen)

Die angeführten inhaltsbezogenen Kompetenzerwartungen entsprechen denen des zweiten Schuljahres. Diese sind in den allgemeiner formulierten Kompetenzerwartungen für das vierte Schuljahr enthalten. Beim Zahlenrechnen heißt es beispielsweise „lösen Aufgaben aller vier Grundrechenarten unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (auch unter Verwendung von Zwischenformen“. Hier wurde bewusst die eingeschränkte Formulierung verwendet, nicht nur da sie die Kompetenzerwartung in diesem Fall präziser beschreibt, sondern auch, um zu verdeutlichen, dass Basisfertigkeiten wie das Einspluseins auch noch im 3. oder 4. Schuljahr regelmäßig zu üben sind.

2 Im Kopf oder schriftlich?

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
Problemlösen / kreativ sein	Umgang mit Zahlen und Operationen
Modellieren	Umgang mit Raum und Form
Argumentieren	Messen und Umgang mit Größen
Darstellen / Kommunizieren	Umgang mit Daten, Häufigkeiten und Wahrsch.

2.1 Kurzbeschreibung

Bekanntlich unterscheidet man zwischen dem *Zahlenrechnen* einerseits, also dem mündlichem Rechnen, bei dem sämtliche Schritte zur Lösung einer Aufgabe ohne Notation erfolgen, und dem halbschriftlichem Rechnen, bei dem die Teilrechnungen aufgeschrieben, sowie dem *Ziffernrechnen* andererseits, also dem schriftlichem Rechnen, bei dem die Ergebnisse nach festgelegten Regeln (Algorithmen) ziffernweise ermittelt werden. Alle drei Methoden haben ihre Vor- und Nachteile. Schülerinnen und Schüler sollten im Verlauf der Grundschulzeit lernen, sie abhängig vom Zahlenmaterial, aber auch von eigenen Präferenzen *flexibel* einsetzen zu können (vgl. Selter 2003).

2.2 Umsetzung im Unterricht

Bei dem folgenden Unterrichtsbeispiel sollten die Kinder begründet entscheiden, *welche* Aufgaben sie *warum* mündlich bzw. schriftlich rechneten, und somit ihre Flexibilität im Rechnen steigern.

Kopfrechnen – schriftliches Rechnen: Zunächst wurden den Kindern folgende fünf Aufgaben zur Addition im Zahlenraum bis 1000 präsentiert, die so ausgewählt wurden, dass sie aus der Sicht geübter Rechner die Verwendung unterschiedlicher Rechenmethoden nahe legten.

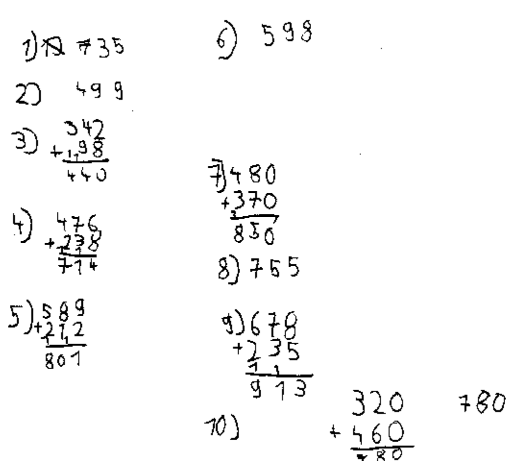
1) 278+199 2) 340+250 3) 280+200 4) 138+133 5) 721+247

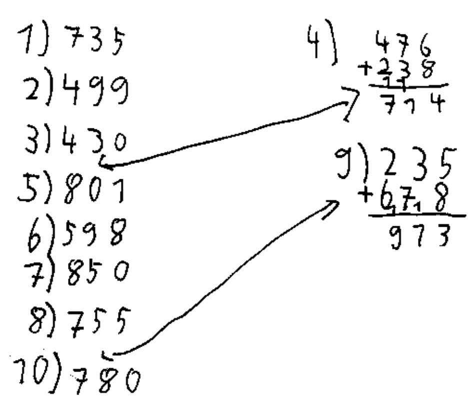
Die Schülerinnen und Schüler sollten im Unterrichtsgespräch für sich begründet und für andere nachvollziehbar festlegen, welche der folgenden Aufgaben sie im Kopf bzw. schriftlich rechnen würden. Kriterien, die hier genannt wurden, waren Nullen an der Einer- bzw. der Zehnerstelle ("glatte Zahlen"), die Anzahl der Überträge oder die Nähe zu einer 'glatten Zahl'.

Entscheide selbst: im Kopf oder schriftlich? Dann erhielten die Schülerinnen und Schüler zehn weitere Aufgaben, die sie allein oder in Partnerarbeit lösten. Sie sollten dabei jeweils entscheiden, ob sie schriftlich oder mündlich rechneten. Da manche Kinder dazu neigten, sämtliche Aufgaben entweder so oder so zu rechnen, gab es eine Zusatzbedingung: Jeweils mindestens zwei Aufgaben waren im Kopf bzw. schriftlich zu rechnen.

1) 700+ 35 2) 249+250 3) 342+ 98 4) 476+238 5) 589+212
6) 500+ 98 7) 480+370 8) 720+ 35 9) 235+678 10) 320+460

Dabei ergaben sich erwartungsgemäß unterschiedliche Verteilungen: Kinder, die jeweils die Hälfte der Aufgaben mit einer Methode lösten, solche, die fast alles schriftlich, aber auch solche, die nahezu alles im Kopf rechneten.





Warum im Kopf, warum schriftlich? Die Schülerinnen und Schüler wurden auch gebeten, aufzuschreiben, warum sie welche Aufgaben mit welcher Methode gerechnet hatten. Einige Kinder antworteten eher global („Weil es leicht / schwierig war.“). Der Kommentar von Bianca verdeutlicht, dass andere Kinder schon recht differenzierte Aufgabenkriterien als Entscheidungsgrundlage benannten. Selbstverständlich wäre es auch möglich gewesen, die Kinder diese Äußerungen vollständig oder auch teilweise mündlich machen zu lassen, denn es geht im Unterricht ja sowohl um die Schulung der mündlichen als auch der schriftlichen Ausdrucksfähigkeit.

Ich habe die 1) Aufgabe im Kopf gerechnet, denn 700+35
muss man nicht schriftlich rechmen, wenn man bei
Hundertern etwas dazuzählt muss man nur die Einer
und Zehner hinter den Hunderter setzen dann hat
man das Ergebnis. Die 4) Augabe habe ich schriftlich
gerechnet den Einer, Zehner und Hunderter sind sehr
schwer zum zusammenzurechnen.

Stelle deine Arbeit vor: Im Anschluss an die Phase der Einzel- bzw. Partnerarbeit präsentierten und diskutierten die Schülerinnen und Schüler ihre Vorgehensweisen und ihre Texte in kleineren Gruppen in sog. Rechenkonferenzen. Ausgewählte Aspekte wurden danach auch im Klassenverband besprochen.

Erfinde eigene Aufgaben: Abschließend sollten die Kinder fünf Aufgaben, die sich gut für das Kopfrechnen, und fünf weitere, die sich gut für das schriftliche Rechnen eignen, erfinden. Diese Eigenproduktionen erforderten noch einmal aus einer anderen Perspektive das Nachdenken über Aufgabenmerkmale, aber auch über eigene Präferenzen.

im Kopf

1) 200 + 300 = 500
2) 401 + 37 = 438
3) 150 + 140 = 290
4) 127 + 700 = 827
5) 150 + 149 = 299

schriftlich

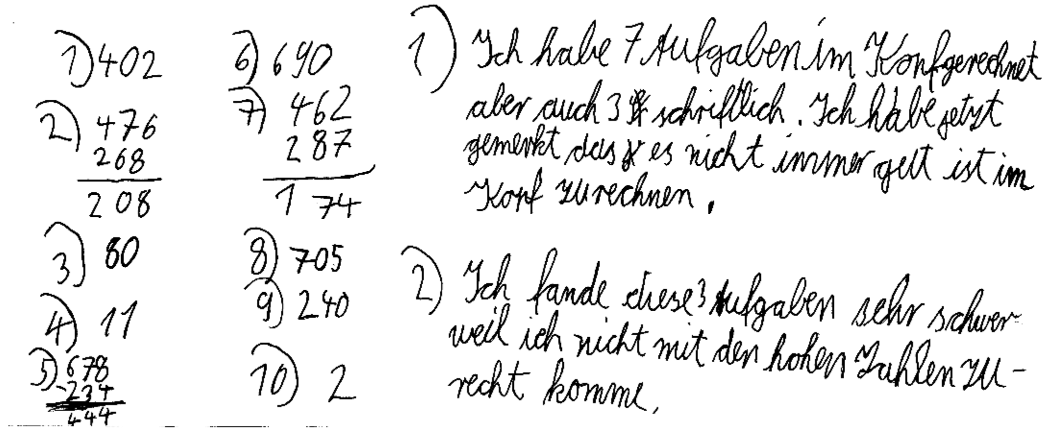
1) 237 + 588 = 825
2) 478 + 478 = 956
3) 483 + 216 = 699
4) 421 + 358 + 107 = 886
5) 153 + 264 = 417

In der folgenden Stunde bearbeiteten die Kinder ein analoges Aufgabenblatt zur Subtraktion, wie das Beispiel von Fabian veranschaulicht.

Was ist leichter? Entscheide zuerst. Dann rechne schriftlich oder im Kopf.
Rechne mindestens 2 Aufgaben im Kopf und mindestens 2 schriftlich!

1)	**500- 98**	**6)**	**800-110**
2)	**476-268**	**7)**	**462-287**
3)	**170- 90**	**8)**	**730- 25**
4)	**131-121**	**9)**	**360-120**
5)	**678-234**	**10)**	**101- 99**

Wie bei der Addition bestand eine Rahmenvorgabe darin, jeweils mindestens zwei Aufgaben im Kopf bzw. mit Hilfe des schriftlichen Algorithmus zu lösen und zu begründen, warum man sich für die eine oder die andere Rechenmethode entschieden hatte. Da diesbezügliche Kriterien am Beispiel der Addition zuvor wiederholt bzw. entwickelt worden waren, wurden die Begründungen vieler Schülerinnen und Schüler zunehmend ausführlicher und differenzierter.



2.3 Kompetenzerwartungen

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
• überprüfen Ergebnisse auf ihre Angemessenheit, finden und korrigieren Fehler, vergleichen und bewerten verschiedene Lösungswege (PL: reflektieren und überprüfen) • erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen und vollziehen Begründungen anderer nach (ARG: begründen) • entwickeln und nutzen für die Präsentation ihrer Lösungswege, Ideen und Ergebnisse geeignete Darstellungsformen und Präsentationsmedien wie Folie oder Plakat und stellen sie nachvollziehbar dar, z. B. im Rahmen von Rechenkonferenzen (DAR: präsentieren und austauschen)	• lösen Aufgaben aller vier Grundrechenarten unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (ZO: Zahlenrechnen) • nutzen Zahlbeziehungen und Rechengesetze (z. B. Distributivgesetz, Gesetz von der Konstanz der Summe) bei allen vier Grundrechenarten für vorteilhaftes Rechnen (ZO: Zahlenrechnen) • beschreiben und bewerten unterschiedliche Rechenwege unter dem Aspekt des vorteilhaften Rechnens und stellen sie übersichtlich schriftlich dar (ZO: Zahlenrechnen) • nutzen aufgabenbezogen oder nach eigenen Präferenzen eine Strategie des Zahlenrechnens, ein schriftliches Normalverfahren oder den Taschenrechner (ZO: flexibles Rechnen)

Nach zwei Beispielen zum Inhaltsbereich ‚Zahlen und Operationen' schließen sich in den Kapiteln 4 und 5 zwei Unterrichtsvorschläge zum Inhaltsbereich ‚Raum und Form' an. Zuvor soll in Kapitel 3 ein Beispiel aus dem Schnittbereich gegeben werden, das verdeutlichen soll, dass die einzelnen Inhaltsbereiche auch geeignet miteinander zu vernetzen sind.

3 Mit Würfeln bauen und Zahlenfolgen entdecken

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
Problemlösen / kreativ sein	Umgang mit Zahlen und Operationen
Modellieren	Umgang mit Raum und Form
Argumentieren	Messen und Umgang mit Größen
Darstellen / Kommunizieren	Umgang mit Daten, Häufigkeiten und Wahrsch.

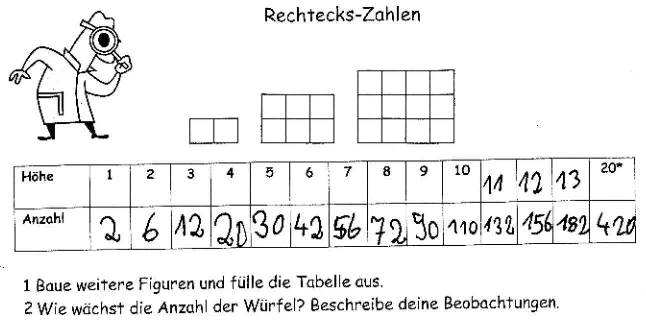
3.1 Kurzbeschreibung

Im folgenden Beispiel setzten Drittkläßler mit kleinen Holzwürfeln Gebilde fort, welche grundlegende Zahlenfolgen darstellen, wie die Folgen der Dreieckszahlen, der Quadratzahlen und Rechteckzahlen (vgl. Hengartner u. a. 2006, www.mathe-projekt.ch).

3.2 Umsetzung im Unterricht

Dabei sollte jeweils die Anzahl der benötigten Holzwürfel bestimmt und in eine Tabelle eingetragen werden. In einem sog. Forscherfeld schrieben die Kinder zudem auf, wie sie vorgegangen waren. Zunächst ging es um Rechteckszahlen, bei denen die Würfel in einem Rechteck angeordnet werden, dessen eine Seite immer genau einen Würfel mehr aufweist als die andere (rechts).

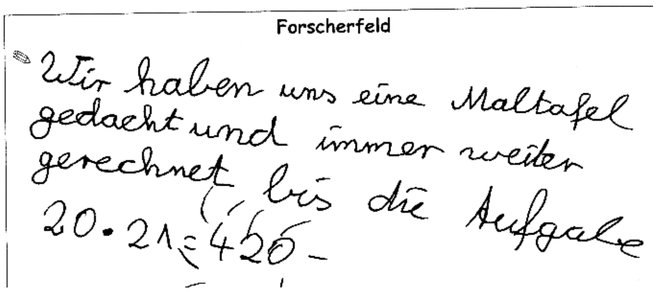
Es schlossen sich Treppenzahlen (1: 1+2: 1+2+3; …) und Doppeltreppenzahlen an (1; 1+2+1; 1+2+3+2+1; …) an.



Rechtecks-Zahlen

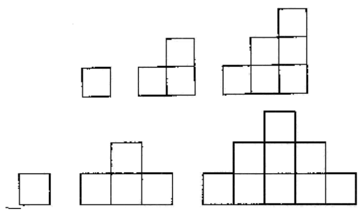
Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	20*
Anzahl	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	182	420

1 Baue weitere Figuren und fülle die Tabelle aus.
2 Wie wächst die Anzahl der Würfel? Beschreibe deine Beobachtungen.

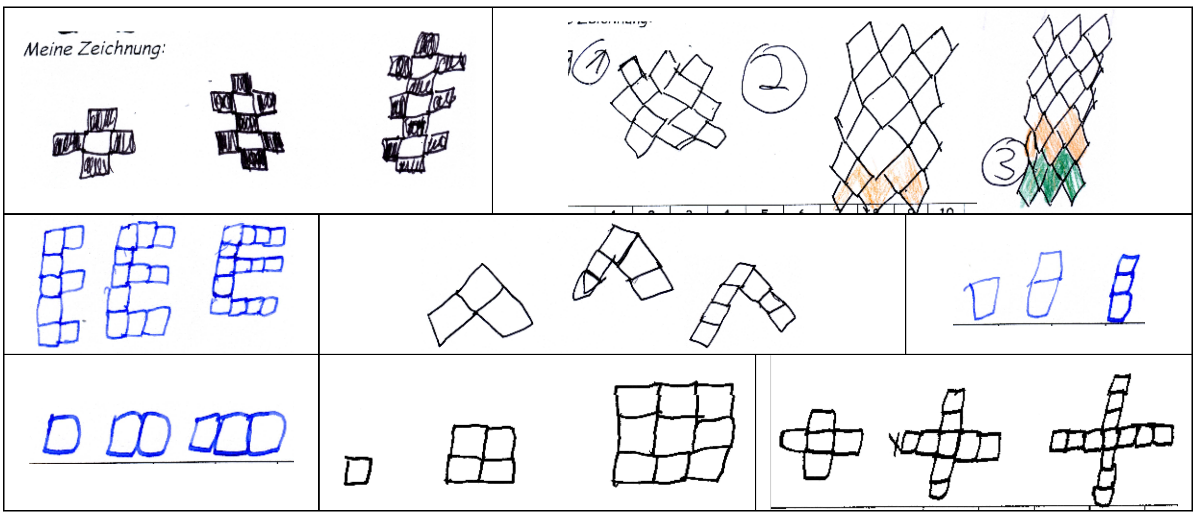


Forscherfeld

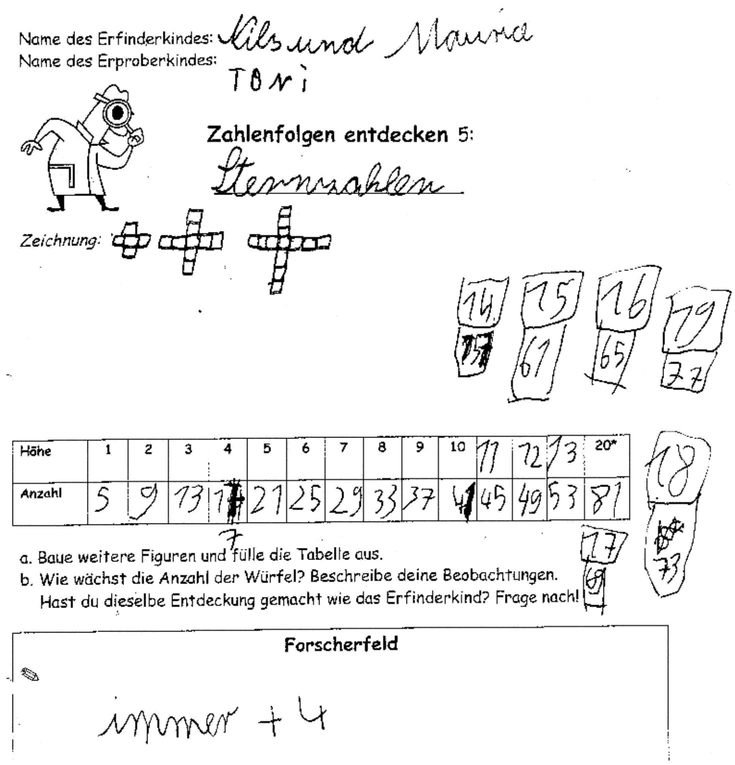
Wir haben uns eine Maltafel gedacht und immer weiter gerechnet bis die Aufgabe 20·21=420.



Anschließend wurden die Kinder selbst – adressatenbezogen für ihre Mitschülerinnen und Mitschüler – zum Teil mit Hilfe von sog. Würfelplättchen als Erfinder tätig. Dazu lösten sie ihre Aufgaben zunächst selbst, um zu gewährleisten, dass das erfundene Muster eindeutig fortsetzbar ist. Anschließend schrieben sie die Aufgabenstellung ohne Lösung für ihre Mitschüler ab.



Hier die Namen, die die Kinder vergaben: Quadratzahlen, Türmchenzahlen, Sternzahlen, Schlangenzahlen, Zopfzahlen, Leiterzahlen, Eckenzahlen. Können Sie diese den Abbildungen zuordnen? Die Schülerinnen und Schüler sollten abschließend als ‚Erproberkinder' die Zahlenfolgen der ‚Erfinderkinder' fortsetzen und beschreiben, wie die Anzahl der Würfel jeweils wuchs.



3.3 Kompetenzerwartungen

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
• probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (PL: lösen) • übertragen Vorgehensweisen auf ähnliche Sachverhalte (PL: übertragen) • erfinden Aufgaben und Fragestellungen (z. B. durch Variation oder Fortsetzung von gegebenen Aufgaben) (PL: variieren und erfinden) • stellen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten an (ARG: vermuten) • halten ihre Arbeitsergebnisse, Vorgehensweisen und Lernerfahrungen fest, z. B. im Lerntagebuch (DAR: dokumentieren) • entwickeln und nutzen für die Präsentation ihrer Lösungswege, Ideen und Ergebnisse geeignete Darstellungsformen und Präsentationsmedien und stellen sie nachvollziehbar dar (DAR: präsentieren und austauschen)	• entdecken Beziehungen zwischen einzelnen Zahlen und in komplexen Zahlenfolgen auf und beschreiben diese unter Verwendung von Fachbegriffen (ZO: Zahlvorstellungen) • lösen Aufgaben aller vier Grundrechenarten unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (ZO: Zahlenrechnen) • setzen Muster fort (z. B. Bandornamente, Parkettierungen), beschreiben sie und erfinden eigene Muster (RF: Ebene Figuren)

4 Bauen mit Holzwürfeln

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
Problemlösen / kreativ sein	Umgang mit Zahlen und Operationen
Modellieren	Umgang mit Raum und Form
Argumentieren	Messen und Umgang mit Größen
Darstellen / Kommunizieren	Umgang mit Daten, Häufigkeiten und Wahrsch.

4.1 Kurzbeschreibung

Die Schulung des Raumvorstellungsvermögens trägt nicht nur zur besseren Bewältigung von Alltagssituationen bei, sondern stellt auch eine wichtige Komponente der intellektuellen Entwicklung der Schülerinnen und Schüler dar. Ausgehend von Handlungen, die die Kinder nicht einfach nur durchführen, sondern über deren Rahmenbedingungen und Wirkungen sie nachdenken, werden sie in zunehmendem Maße fähig, von den konkreten Situationen zu abstrahieren und gedanklich zu operieren.

Von zentraler Wichtigkeit sind in diesem Zusammenhang Aktivitäten ‚rund um den Würfel'. Für das im Weiteren umrissene ‚Lernen an Stationen', in dessen Verlauf die Kinder eines 4. Schuljahres nach und nach zum ‚Würfelbaumeister' wurden, waren die ausgewählten Aufgaben für die Kinder erkennbar zu drei Aufgabengruppen zusammengefasst worden (vgl. Sundermann & Selter 2006a):

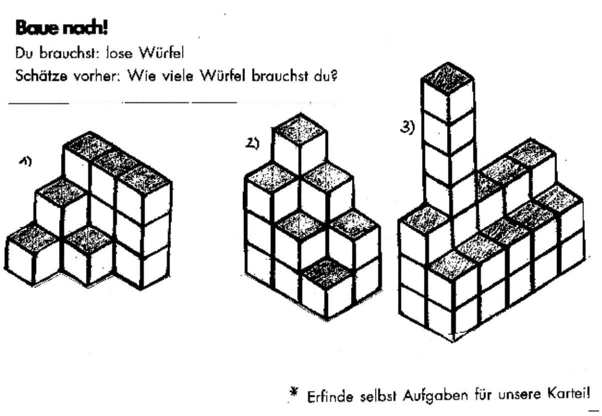
- Bauen mit losen Würfeln,
- Bauen mit Teilen des sog. Soma-Würfels sowie
- Zusatz-Aufgaben.

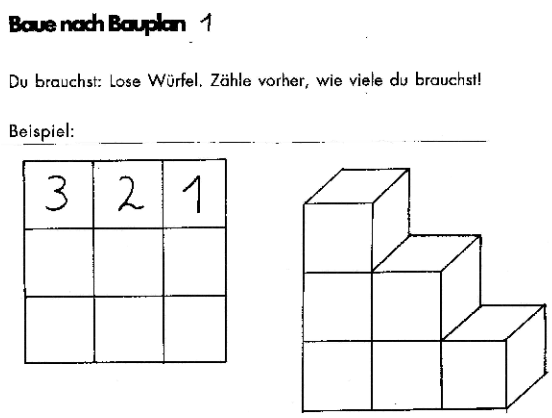
4.2 Umsetzung im Unterricht

Die ersten beiden Aufgabengruppen stellten den von allen Kindern zu bearbeitenden Pflichtbereich dar; die einzelnen Aufgaben waren hier genau vorgegeben. Das Bearbeiten der Zusatzaufgaben war freiwillig; das diesbezügliche Aufgabenangebot – zum Beispiel Spiele wie PotzKlotz (Spiegel & Spiegel 2003) – wird im Weiteren aus Platzgründen nicht weiter aufgeführt.

Zu Beginn erhielten die Kinder eine Übersicht auf einem DIN-A 4-Blatt, dessen Verwendungszweck sich im Verlauf der nächsten Unterrichtsstunden nach und nach von einem Laufzettel hin zu einer Urkunde wandelte, da hier das Bestehen von Einzelprüfungen sukzessive dokumentiert wurde. Zunächst befassten sich die Kinder über einige Stunden hinweg individuell mit Aktivitäten zum Bauen mit losen Würfeln, bevor in einer gemeinsamen Einheit von den Kindern alle Würfelvierlinge entwickelt wurden, um die für den Soma-Würfel erforderlichen Teile herzustellen (s. u.).

Dabei wurden in besonderer Weise auch prozessbezogene Kompetenzen wie das Begründen der Vollständigkeit oder das Beschreiben von Gemeinsamkeiten und Unterschieden der einzelnen Vierlinge angesprochen. Anschließend konnten die Kinder wieder individuell an den verschiedenen Aufgabenangeboten weiterarbeiten.

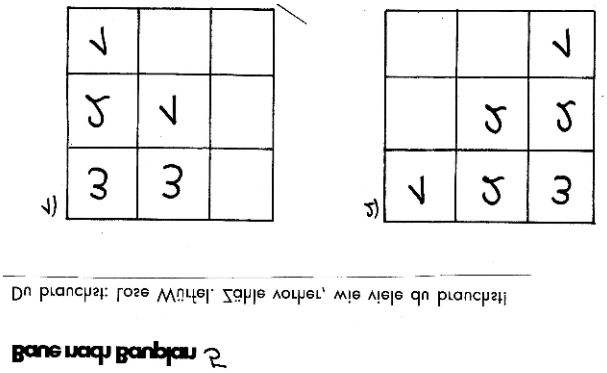


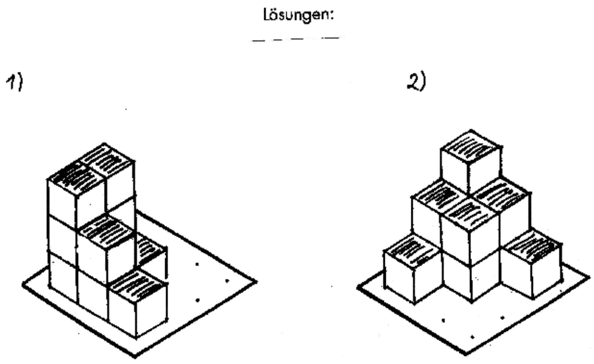


Das Material und die zugehörigen Aufgabenstellungen standen an Stationstischen bereit. Die Kinder konnten innerhalb des vorgegebenen Zeitrahmens selbst entscheiden, wann sie sich mit welcher Aufgabenstellung auseinandersetzen und sich nach erfolgreicher Bearbeitung der entsprechenden Prüfung unterziehen wollten. Bevor dieser Punkt näher beschrieben wird, sollen die einzelnen Aufgaben kurz dargestellt werden.

Bauen mit losen Würfeln: Beim Bauen mit losen Holzwürfeln kamen drei Aufgabentypen zum Einsatz. Beim Nachbauen von Würfelgebäuden sollten die Kinder ausgehend von einem Schrägbild (links) oder einem Bauplan (rechts) zunächst überlegen oder abzählend ermitteln, wie viele Würfel sie benötigen würden, und dann das vorgegebene Gebilde entstehen lassen.

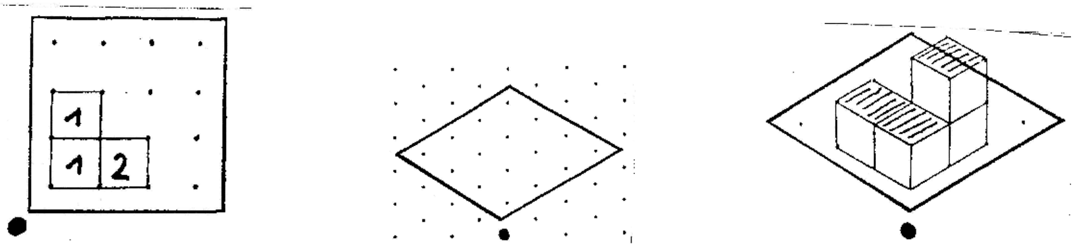
Dass die Schülerinnen und Schüler an verschiedenen Stationen selbstständig arbeiten konnten, wurde an dieser wie auch den anderen Stationen dadurch erleichtert, dass sie sich zunächst an einer Arbeitskarte mit einer Beispielaufgabe orientieren konnten. Daran schlossen sich einige weitere Arbeitsaufträge (links) an, deren Ergebnisse Expertenkinder mit Hilfe von Lösungsblättern (rechts) kontrollierten.



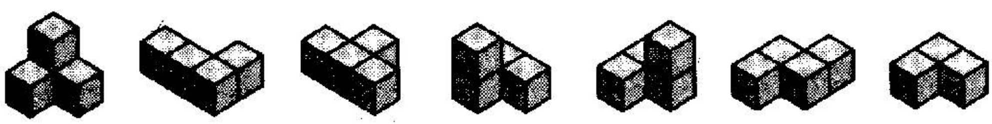


Beim zweiten Aufgabentyp wurden den Kindern Schrägbilder vorgegeben, und sie sollten die dazu passenden Baupläne zeichnen. Manche Kinder verwendeten hierzu die bereit liegenden Würfel, manche die bereit liegenden Würfelplättchen, andere operierten gedanklich.

Der dritte Typ innerhalb dieser Aufgabengruppe bestand darin, dass ausgehend von Bauplänen (links) auf Gitterpunktpapier (mittig) Schrägbilder (rechts) gezeichnet werden sollten. Zur leichteren Orientierung wurde ein dicker Punkt vorgegeben.



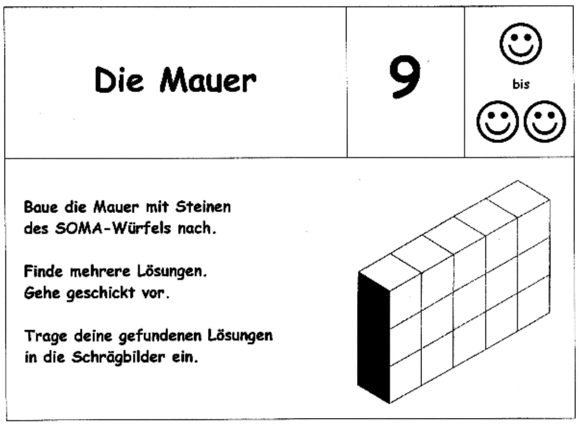
Bauen mit Soma-Teilen: Die zweite Aufgabengruppe befasste sich mit dem sog. Somawürfel, einem 3x3x3-Würfel, der aus sieben Einzelteilen besteht: einem Würfeldrilling sowie sechs aus jeweils vier Würfeln bestehenden Vierlingen.

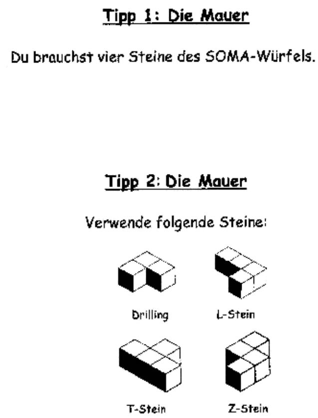


Zur besseren Unterscheidung, vor allem aber zur Erleichterung der Kommunikation kann man die einzelnen Soma-Teile unterschiedlich färben oder mit eigenen Namen versehen, z. B. in Analogie zu Buchstaben vom T- oder vom L-Stein sprechen.

Die Aufgabe, aus den sieben Somateilen den Ausgangswürfel oder andere Figuren zusammenzusetzen, ist durchaus anspruchsvoll, wenn auch für manche Grundschulkinder durchaus leistbar. Das untenstehende Beispiel zeigt, welche Soma-Teile Jennifer benutzte, um die ‚Zimmerecke' zu bauen, und gibt die Beschreibung ihrer Vorgehensweise an.

Gleichwohl wurden im Rahmen dieser Unterrichtsreihe weniger komplexe, aus einigen der Teile bestehende Gebilde nachgebaut. Innerhalb dieser Aufgabengruppe gab es insgesamt 11 Stationen, an denen jeweils eine Aufgabenkarte (links) auslag. Oberhalb der eigentlichen Aufgabenstellung waren der Titel, die Nummer der Station und die Angabe ‚Einzel- bzw. Partnerarbeit' ersichtlich.





Für jede Station lagen zudem zwei Tippblätter (rechts) – der besseren Unterscheidbarkeit wegen auf gelbes Papier kopiert – bereit, welche die Kinder heranziehen konnten, wenn sie sich längere Zeit erfolglos mit einer Aufgabenstellung auseinandergesetzt hatten.

Insgesamt gab es zehn Stationen, in denen andere Figuren wie zum Beispiel das Sofa oder der Turm nachzubauen waren. Die elfte Station schließlich trug den Titel ‚Architekturbüro'. Hier erhielten die Kinder folgende Aufträge:

- Denke dir ein eigenes Soma-Gebäude aus. Es soll aus mindestens zwei Soma-Teilen bestehen.
- Baue dein Gebäude.
- Zeichne dein Gebäude als Schrägbild auf Punktepapier oder baue es mit Würfelplättchen nach.
- Überlege dir auch einen Namen für dein Gebäude.
- Hefte dein Blatt in unseren Soma-Ordner für die Freiarbeit.

Die Aufgabe, dass die Schülerinnen und Schüler selbst analoge Aufgaben für andere Kinder der Klasse erfinden sollten, wurde im Übrigen auch bei den Aufgaben zum Bauen mit losen Würfeln mehrfach gestellt, um durch solche Eigenproduktionen neben der organisatorischen auch eine inhaltliche Öffnung den Denkwegen der Kinder gegenüber zu ermöglichen.

4.3 Kompetenzerwartungen

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
• übertragen Vorgehensweisen auf ähnliche Sachverhalte (PL: übertragen) • erfinden Aufgaben und Fragestellungen (z. B. durch Variation oder Fortsetzung von gegebenen Aufgaben) (PL: variieren und erfinden) • entwickeln und nutzen für die Präsentation ihrer Lösungswege, Ideen und Ergebnisse geeignete Darstellungsformen und Präsentationsmedien und stellen sie nachvollziehbar dar (DAR: präsentieren und austauschen) • übertragen eine Darstellung in eine andere (DAR: zwischen Darstellungen wechseln)	• bewegen ebene Figuren und Körper in der Vorstellung und sagen das Ergebnis der Bewegung vorher (z. B. Kippbewegungen eines Würfels) (RF: Raumorientierung und Raumvorstellung) • stellen Modelle von Körpern (Kanten- und Flächenmodelle) und komplexere Würfelgebäude her (RF: Körper) • ordnen Bauwerken ihre zwei- oder dreidimensionalen Darstellungen zu und erstellen Bauwerke nach Plan (z. B. bauen Würfelgebäude nach Bauplan) (RF: Körper) • nutzen Gitter- und Punkteraster zum Zeichnen von ebenen Figuren und Würfelgebäuden (RF: Zeichnen)

5 Zeichnen regelmäßiger Vielecke

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
Problemlösen / kreativ sein	Umgang mit Zahlen und Operationen
Modellieren	Umgang mit Raum und Form
Argumentieren	Messen und Umgang mit Größen
Darstellen / Kommunizieren	Umgang mit Daten, Häufigkeiten und Wahrsch.

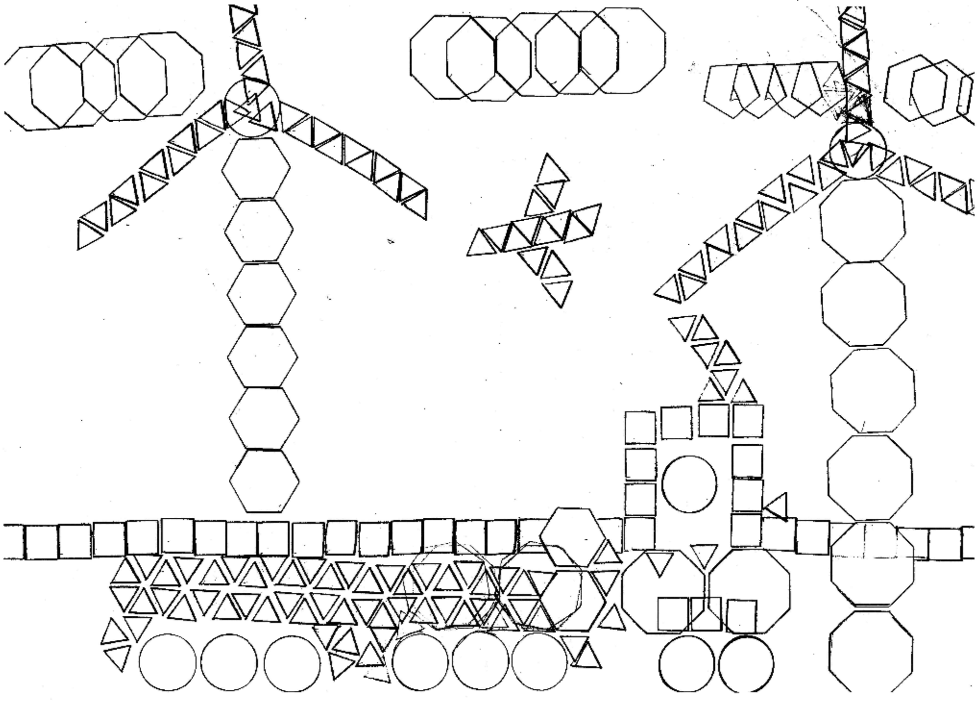
5.1 Kurzbeschreibung

Aufgrund ihrer Bauart üben regelmäßige Vielecke einen gewissen Reiz aus. Ein regelmäßiges Sechseck beispielsweise hat sechs Ecken, sechs gleich lange Seiten und sechs gleich große Innenwinkel. Die Ästhetik der Formen gilt es im Unterricht zu nutzen, wenn die Schülerinnen das Zeichnen mit Hilfsmitteln üben und dabei grundlegende Erfahrungen zu regelmäßigen Vielecken sammeln, die im weiterführenden Unterricht vertieft und in Fächer verbindenden Kontexten (Rezeption von Werken der bildenden Kunst) ausgeweitet werden.

5.2 Umsetzung im Unterricht

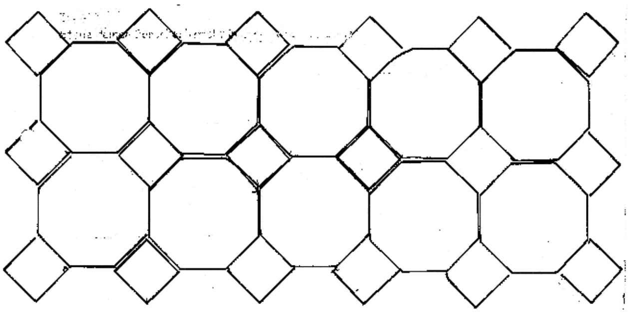
Da das Zeichnen regelmäßiger Figuren durchaus anspruchsvoll ist, kam im Unterricht eines dritten Schuljahres eine Schablone zum Einsatz (vgl. Wittmann & Müller 2005). Diese erhielten die Kinder zunächst zum freien Experimentieren. Vereinzelt entstanden kleine Kunstwerke wie dieses Bild von Felix, der einen Laster mit Kran zeichnete.

Die einzelnen Bilder wurden dann von den Kindern im Rahmen eines ‚Museumsrundgangs', bevor

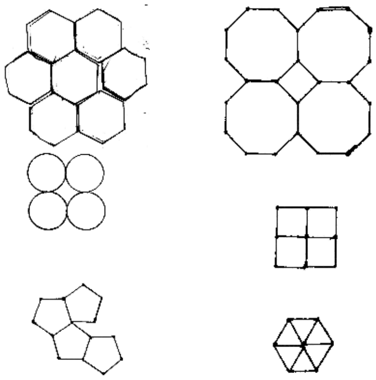


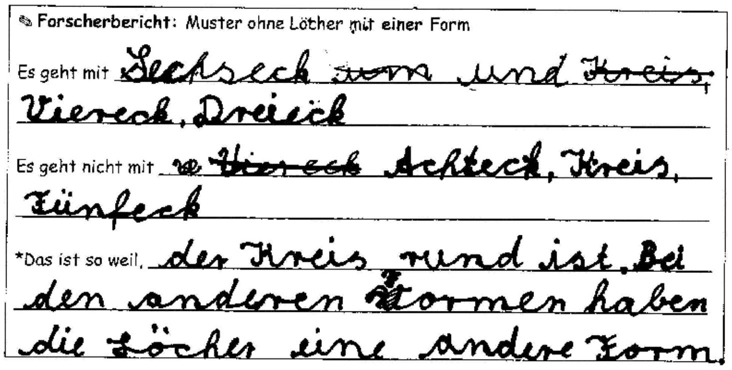
gemeinsam darüber gesprochen wurde, was beim genauen Zeichnen beachtet werden muss: exaktes Anlegen und gutes Festhalten. Außerdem wurde thematisiert, welche Figuren die Schablone enthält (Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, Achteck und Kreis) und dass alle Seiten gleich lang sind (1,5 cm), was es ermöglicht, verschiedene Vielecke ‚Seite an Seite' zu zeichnen.

Es schlossen sich Aktivitäten an, bei denen die Schülerinnen und Schüler vorgegebene Parkette nachzeichneten bzw. fortsetzten und auch selbst Parkettierungen erfanden. Tino beispielsweise parkettierte mit Hilfe von Achteck und Quadrat. Durch die stetige Übung des Zeichnens mit Hilfe der Schablone wurden die Schülerarbeiten im Laufe der Unterrichtsstunden zunehmend sauberer und genauer.



Ein weiterer Auftrag lautete: ‚Wähle eine Form aus. Kannst du mit ihr ein Muster ohne Löcher zeichnen? Probiere es mit allen Formen aus. Mit welchen Formen kannst du ein Muster ohne Löcher zeichnen?'




Forscherbericht: Muster ohne Löther mit einer Form

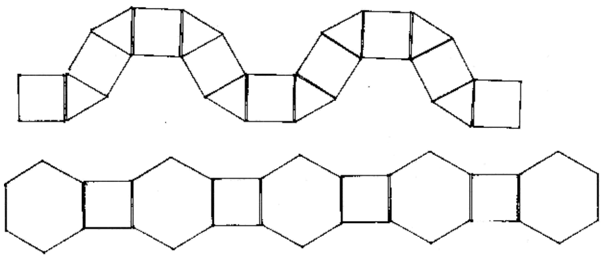
Es geht mit Sechseck ~~vom~~ und ~~Kreis~~, Viereck, Dreieck

Es geht nicht mit ~~Viereck~~ Achteck, Kreis, Fünfeck

*Das ist so weil, der Kreis rund ist. Bei den anderen Formen haben die Löcher eine andere Form.

Im Forscherbericht von Anna wird deutlich, dass sie herausgefunden hat, mit welchen der zur Verfügung stehenden Figuren die Ebene lückenlos parkettiert werden kann und mit welchen nicht. Außerdem beschreibt sie, dass bei Kreis, Achteck und Fünfeck nicht zu füllende Löcher entstehen.

Außerdem zeichneten die Kinder ‚Bänder' aus regelmäßigen Vielecken, also solche Figuren, bei denen in der Regel zwei unterschiedliche Vielecke wiederholt Seite an Seite aneinander gesetzt werden.



5.3 Kompetenzerwartungen

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
• erfinden Aufgaben und Fragestellungen (z. B. durch Variation und Fortsetzung von gegebenen Aufgaben) (PL: variieren und erfinden) • stellen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge und Auffälligkeiten an (ARG: vermuten) • erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen und vollziehen Begründungen anderer nach (ARG: begründen)	• untersuchen weitere ebene Figuren, benennen sie und verwenden Fachbegriffe zu deren Beschreibung (RF: Ebene Figuren) • setzen Muster fort (z. B. Bandornamente, Parkettierungen), beschreiben sie und erfinden eigene Muster (RF: Ebene Figuren) • zeichnen Linien, ebene Figuren und Muster aus freier Hand oder mit Hilfsmitteln wie Lineal, Schablone, Gitterpapier (RF: Zeichnen)

6 Kleine Hunde – große Hunde

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
Problemlösen / kreativ sein	Umgang mit Zahlen und Operationen
Modellieren	Umgang mit Raum und Form
Argumentieren	Messen und Umgang mit Größen
Darstellen / Kommunizieren	Umgang mit Daten, Häufigkeiten und Wahrsch.

6.1 Kurzbeschreibung

Größen ordnen bzw. sortieren zu können, sind wichtige Kompetenzen für einen verständigen Umgang mit ihnen. Im Folgenden wird ein Beispiel gegeben, wie diese Kompetenzen im Rahmen einer etwas komplexeren Lernumgebung innerhalb eines Fächer verbindenden Kontext (Thema Haustiere im Sachunterricht) geschult werden können.

6.2 Umsetzung im Unterricht

Den Drittklässlern standen Datenblätter für sieben Hunderassen zur Verfügung, die so aufgebaut waren wie die folgenden Beispiele.

Yorkshire Terrier

Der Yorkshire Terrier wurde für die Jagd auf Ratten unter der Erde gezüchtet.

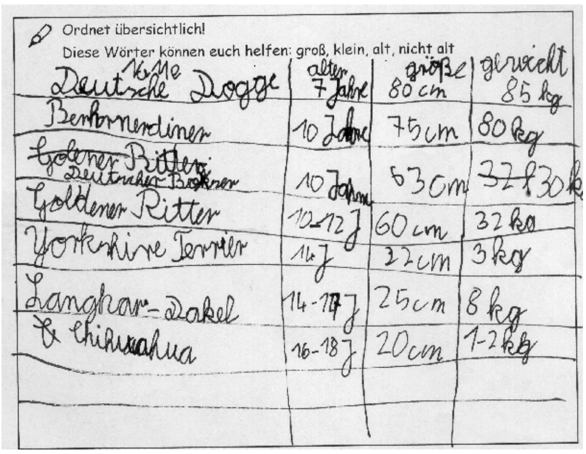
Gewicht: etwa 3 kg (Kilogramm)
Schulterhöhe: 22 cm
Alter: 14 Jahre und älter

Golden Retriever

Der Golden Retriever wurde für die Jagd auf Enten gezüchtet. Er holt die geschossene Ente aus dem Wasser heraus und bringt sie dem Jäger.

Gewicht: etwa 32 kg (Kilogramm)
Schulterhöhe: 60 cm
Alter: 10 bis 12 Jahre

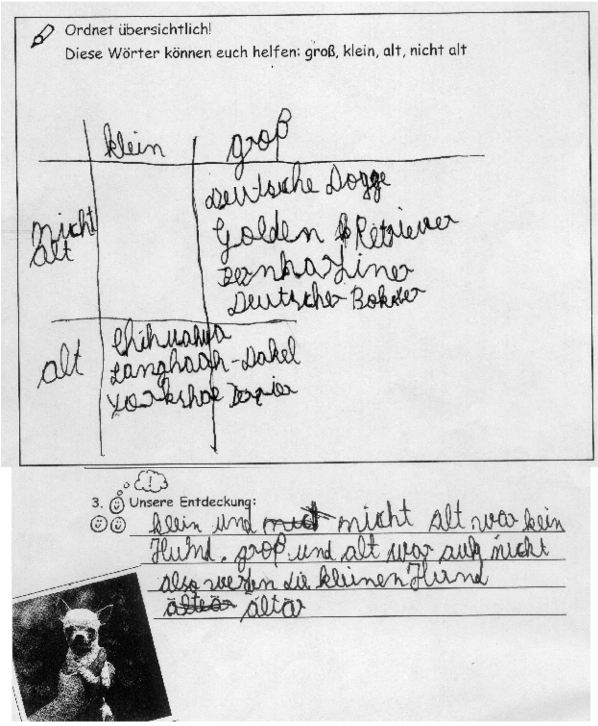
Die Größenangaben sollten herangezogen werden, um in Gruppenarbeit die Frage zu beantworten, ob große Hunde älter werden als kleine. Den Kindern wurde der Tipp gegeben, dass ihnen das Ordnen der Angaben bei der Beantwortung dieser Frage behilflich sein konnte. Naturgemäß gingen sie dabei unterschiedlich vor. Eine Gruppe erstellte eine herkömmliche Tabelle, in deren Spalten sie Alter, Größe und Gewicht eintrug. So kam sie zu der Schlussfolgerung: ‚Kleine Hunde werden älter als große Hunde'. (Achten Sie einmal auf die Individualschreibung für den ‚Golden Retriever' im obigen Beispiel: mindestens so kreativ wie ‚Golden Red River'.)



Ordnet übersichtlich!
Diese Wörter können euch helfen: groß, klein, alt, nicht alt

Name	alter	größe	gewicht
Deutsche Dogge	7 Jahre	80 cm	85 kg
Bernbernerdiner	10 Jahre	75 cm	80 kg
~~Golener Ritter~~ Deutscher Boxer	10 Jahre	63 cm	~~32~~ 30 kg
Goldener Ritter	10-12 J	60 cm	32 kg
Yorkshire Terrier	14 J	22 cm	3 kg
Langhar-Dakel	14-17 J	25 cm	8 kg
Chihuahua	16-18 J	20 cm	1-2 kg

Eine andere Gruppe erinnerte sich an die in einem anderen Zusammenhang kennen gelernte Vierfeldertafel und ordnete die Hunderassen entsprechend ein.



Die Ergebnisse (‚Was habt ihr heraus gefunden?’) und die unterschiedlichen Herangehensweisen (‚Wie seid ihr vorgegangen) wurden dann in einer abschließenden Reflexionsphase von den Schülerinnen und Schülern im Klassengespräch vorgestellt.

6.3 Kompetenzerwartungen

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
• entnehmen Sachsituationen und Sachaufgaben Informationen und unterscheiden dabei zwischen relevanten und nicht relevanten Informationen (MOD: erfassen) • übersetzen Problemstellungen aus Sachsituationen in ein mathematisches Modell (z. B. Gleichung, Tabelle, Zeichnung) und lösen sie mithilfe des Modells (MOD: lösen) • beziehen ihr Ergebnis wieder auf die Sachsituation und prüfen es auf Plausibilität (MOD: validieren) • testen Vermutungen anhand von Beispielen und hinterfragen, ob ihre Vermutungen, Lösungen, Aussagen, etc. zutreffend sind (ARG: überprüfen) • bearbeiten komplexere Aufgabenstellungen gemeinsam, treffen dabei Verabredungen und setzen eigene und fremde Standpunkte in Beziehung (DAR: kooperieren und kommunizieren)	• vergleichen und ordnen Größen (GM: Größenvorstellungen und Umgang mit Größen) • nutzen selbstständig Bearbeitungshilfen wie Tabellen (z. B. zur Darstellung funktionaler Beziehungen), Skizzen, Diagramme, etc. zur Lösung von Sachaufgaben (GM: Sachsituationen)

7 Über Textaufgaben nachdenken

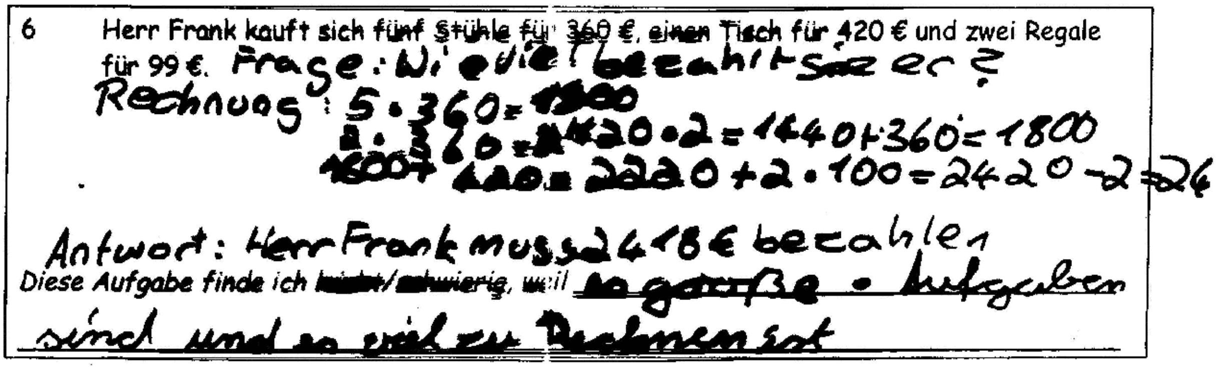
Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
Problemlösen / kreativ sein	Umgang mit Zahlen und Operationen
Modellieren	Umgang mit Raum und Form
Argumentieren	Messen und Umgang mit Größen
Darstellen / Kommunizieren	Umgang mit Daten, Häufigkeiten und Wahrsch.

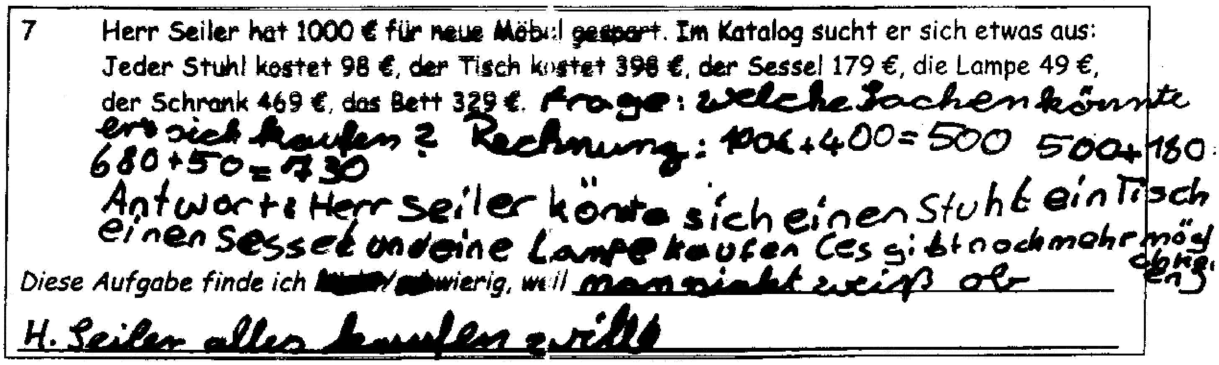
7.1 Kurzbeschreibung

Schülerinnen und Schüler reagieren häufig auf die sog. Kapitänsaufgaben (‚Auf einem Schiff sind 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?'), indem sie die Antwort ‚36 Jahre alt' geben – zumindest dann, wenn sich im Unterricht keine Kultur des kritischen Hinterfragens von gegebenen und auch von selbst ermittelten Daten etabliert hat. Die Forschung hat gezeigt, dass die Kinder im Kontext Unterricht zur o. a. Antwort neigen, während sie in außerschulischen Kontexten oder aber auch bei einer veränderten Unterrichtskultur durchaus ‚vernünftigere' Verhaltensweisen zeigen. Insofern gilt es, im Unterricht das Nachdenken der Kinder über Textaufgaben anzuregen. Hierzu im Weiteren einige Anregungen für den Unterricht …

7.2 Umsetzung im Unterricht

Zunächst wurden den Kindern Textaufgaben unterschiedlicher Komplexität und verschiedenen Schwierigkeitsgrades zur Bearbeitung vorgelegt, in denen die Lehrerinnen und Lehrer der Schule stets eine gewisse Rolle spielten.


6 Herr Frank kauft sich fünf Stühle für 360 €, einen Tisch für 420 € und zwei Regale für 99 €. Frage: Wie viel bezahlt er?
Rechnung: 5 · 360 = 1800
2 · 360 = 1420 · 2 = 1440 + 360 = 1800
1800 + 420 = 2220 + 2 · 100 = 2420 − 2 = 2418
Antwort: Herr Frank muss 2418 € bezahlen
Diese Aufgabe finde ich ~~leicht/schwierig~~, weil es große Aufgaben sind und es viel zu Rechnen ist

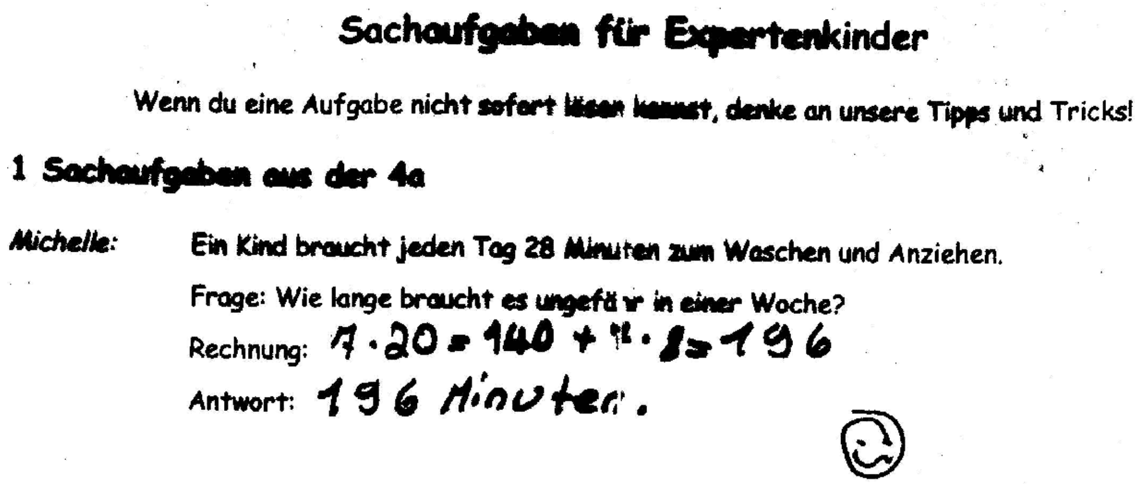

7 Herr Seiler hat 1000 € für neue Möbel gespart. Im Katalog sucht er sich etwas aus: Jeder Stuhl kostet 98 €, der Tisch kostet 398 €, der Sessel 179 €, die Lampe 49 €, der Schrank 469 €, das Bett 329 €. Frage: Welche Sachen könnte er sich kaufen? Rechnung: 100 + 400 = 500 500 + 180
680 + 50 = 730
Antwort: Herr Seiler könnte sich einen Stuhl ein Tisch einen Sessel und eine Lampe kaufen (es gibt noch mehr Möglichkeiten)
Diese Aufgabe finde ich ~~leicht~~/schwierig, weil man nicht weiß ob H. Seiler alles kaufen will

Nachdem sie diese Aufgaben individuell gelöst hatten, wurden sie gebeten anzugeben, ob es für sie eine leichte oder eine schwere Textaufgabe war und ihre diesbezügliche Entscheidung zu begründen. Lili beispielsweise bezeichnete diese beiden Aufgaben als schwierig (s. o.), während sie Aufgaben wie ‚Herr Matterstock hat einen rechteckigen Garten, er ist 45 m lang und 27 m breit. Herr Matterstock möchte einen Zaun darum machen. Wie viel Meter Zaun benötigt er ungefähr?' als leicht bezeichnete, weil man nur 2 mal 45 plus 2 mal 27 rechnen musste.

Die Kinder kamen nun in Rechenkonferenzen zusammen und verglichen sowohl ihre Lösungen als auch ihre Einschätzungen des Schwierigkeitsgrads der Aufgaben. Im Plenum wurden anschließend ausgewählte Aufgabenstellungen und die gewählten Lösungswege im Klassengespräch besprochen. Hierbei wurden gemeinsam Kriterien entwickelt, die zur Entscheidung herangezogen werden konnten, ob es sich um eine leichte oder eine schwierige Aufgabe handelte, wie zum Beispiel Textlänge, Zahlengröße, Verständlichkeit, Anzahl der Rechenschritte, usw. Es wurde vereinbart, dass zukünftig mindestens eines dieser Kriterien beachtet werden musste.

Die Schülerinnen und Schüler wurden auch gebeten, selbst einfache und schwierige Textaufgaben zu erfinden, wie zum Beispiel: ‚Du hast 50 € und willst dir eine CD für 10,95 € und ein Buch für 13,99 € kaufen. Reicht das Geld?' So wurden die Kinder erneut dazu angeregt, darüber nachzudenken, was eine Aufgabe zu einer leichten bzw. zu einer schwierigen macht. Die Aufgaben wurden dann von Mitschülerinnen bzw. Mitschülern gelöst, und erneut wurden einige von ihnen in der Klasse vorgestellt, gemeinsam bearbeitet und in Bezug auf den Schwierigkeitsgrad bewertet. Außerdem wurden Strategien zur Lösung der Aufgaben besprochen.

Aus den verschiedenen selbst erfundenen Textaufgaben stellte die Lehrerin ein Arbeitsblatt zusammen. Jedes Kind durfte hierzu eine Aufgabe auswählen, was erneute Reflexion anregte. Dieses (mehrseitige) Arbeitsblatt wurde im Verlauf der kommenden Stunden von den Kindern gelöst, wobei die Erfinderkinder, ggf. mit Unterstützung durch die Lehrerin, schwierigere Aufgaben als den weiterführenden Anforderungen zugehörig gekennzeichnet hatte. Diese Sternchen-Aufgaben mussten also nicht von allen Kindern bearbeitet werden. Der Name jedes Kindes wurde der jeweiligen Aufgabe vorangestellt.


Sachaufgaben für Expertenkinder

Wenn du eine Aufgabe nicht sofort lösen kannst, denke an unsere Tipps und Tricks!

1 Sachaufgaben aus der 4a

Michelle: Ein Kind braucht jeden Tag 28 Minuten zum Waschen und Anziehen.

Frage: Wie lange braucht es ungefähr in einer Woche?

Rechnung: 7 · 20 = 140 + 7 · 8 = 196

Antwort: 196 Minuten.

Im Anschluss der Aufgaben gingen die Kinder – in dafür eigens reservierten Zeitfenstern – zu dem Aufgaben-Erfinderkind, um von diesem die Korrektheit der Lösung überprüfen zu lassen. Die Experten nutzten Smilies zur Bewertung (☺,K,L). Es ergaben sich interessante Diskussionen zwischen den Kindern über die Richtigkeit der Lösungen, die Unterschiedlichkeit der Lösungswege sowie den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben. Das Arbeitsblatt enthielt den Hinweis: Wenn du nicht weißt, wie du weiter machen sollst, schaue auf unsere Liste mit Tipps und Tricks zum Lösen von Sachaufgaben.

Hierzu hing großes Plakat an der Seitentafel, auf dem Tipps und Tricks zum Lösen von Textaufgaben eingetragen worden waren. Es entstand, weil am Ende nahezu jeder Stunde einige Zeit für die gemeinsame Reflexion der Arbeit an den Textaufgaben reserviert worden war.

Dieses Plakat wurde nicht nur bei der Arbeit an den Aufgaben verwendet, sondern auch für die gemeinsame Diskussion und das Nachdenken sowohl in kleineren Gruppen als auch im Unterrichtsgespräch. Die Kinder trugen die einzelnen Punkte zudem in ihre eigene Liste ein, die sie als oberstes Blatt in ihre Mathe-Mappe eingeheftet hatten. Außerdem trugen die Kinder die für sie persönlich bedeutsamen Tipps und Tricks in ihr Lernwegebuch (vgl. Sundermann & Selter 2006, S. 62 ff.) Einige der Tipps und Tricks aus Linas Lernwegebuch mögen als Illustration genügen:

1. *Zuerst muss man die Aufgabe genau durchlesen und gucken, ob alle Zahlen wichtig sind.*
2. *Manchmal muss man sich die Frage selbst überlegen.*

3. *Du musst dir gut überlegen, ob die Aufgabe logisch ist. Manche Aufgaben sind nicht lösbar.*
4. *Manchmal ist es schlau, eine Zeichnung zu machen.*

Man beachte, dass diese Liste den Kindern nicht vorab gegeben wurde, sondern das Resultat intensiver gemeinsamer, von der Lehrerin moderierter Diskussionen über Textaufgaben war.

7.3 Kompetenzerwartungen

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
• entnehmen Sachsituationen und Sachaufgaben Informationen und unterscheiden dabei zwischen relevanten und nicht relevanten Informationen (MOD: erfassen) • übersetzen Problemstellungen aus Sachsituationen in ein mathematisches Modell (z. B. Gleichung, Tabelle, Zeichnung) und lösen sie mithilfe des Modells (MOD: lösen) • beziehen ihr Ergebnis wieder auf die Sachsituation und prüfen es auf Plausibilität (MOD: validieren) • bearbeiten komplexere Aufgabenstellungen gemeinsam, treffen dabei Verabredungen und setzen eigene und fremde Standpunkte in Beziehung (DAR: kooperieren und kommunizieren)	• rechnen mit Größen (auch mit Dezimalzahlen) (GM: Größen) • formulieren zu realen oder simulierten Situationen (auch zu projektorientierten Problemkontexten) und zu Sachaufgaben mathematische Fragen und Aufgabenstellungen und lösen sie (GM: Sachsituationen)

8 Daten aus der Zeitung

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
Problemlösen / kreativ sein	Umgang mit Zahlen und Operationen
Modellieren	Umgang mit Raum und Form
Argumentieren	Messen und Umgang mit Größen
Darstellen / Kommunizieren	Umgang mit Daten, Häufigkeiten und Wahrsch.

8.1 Kurzbeschreibung

Eine Möglichkeit, insbesondere Prozesse des Modellierens anzuregen, besteht in der Auseinandersetzung mit Texten, die sowohl zum Lesen als auch zum Rechnen ‚verlocken' – z. B. Gebrauchstexte wie Rezepte, Prospekte, Kassenzettel, Fernsehprogramme, Sachtexte, Lexika, Witze oder auch Zeitungsartikel.

8.2 Umsetzung im Unterricht

Im Rahmen einer ‚Zeitungsmathematik' sind vielfältige Aktivitäten denkbar, so etwa auch Aufgaben des Typs: ‚Kann das denn stimmen?'.

Bei diesem Aufgabenformat soll die Frage *begründet* beantwortet werden, ob ein vorgegebenes Ergebnis den Tatsachen entsprechen kann. Hier wird die für den Alltag sicherlich zentrale Kompetenz angesprochen, Zahlenangaben durch eine grobe Schätzrechnung auf ihre Plausibilität zu überprüfen, ohne das genaue Resultat ermitteln zu müssen.

Um den Wahrheitsgehalt aufzudecken, mussten die Kinder dem vorliegenden Text (vgl. van den Heuvel-Panhuizen 2001, 196) die relevanten Informationen entnehmen und andere Daten vernachlässigen, zum Beispiel die Information, dass es neun Schulen in Gevelsberg gebe.

Dann war ein mathematisches Modell zu bilden, das im vorliegenden Beispiel darin bestand, die Zahl der Schüler und die Zahl der Klassen durch eine Division zueinander in Beziehung zu setzen und dabei geeignete Überschlagswerte zu verwen-

Kann das denn stimmen? 4

Welche Zeitungsmeldungen enthalten ganz bestimmt einen Fehler? Du brauchst gar nicht genau zu rechnen. Es reicht eigentlich, wenn du das Ergebnis abschätzt.

a **1000. Sendung**

Heute wird zum 1000. Mal die Kindersendung Blinky ausgestrahlt. Sie läuft seit knapp 10 Jahren einmal pro Woche, jeweils am Donnerstag Nachmittag.

b **Mehr als 1000 Besucher beim Kinder-Circus**

Der Kinder-Circus Remmi Demmi hat am vergangenen Wochenende bei vier Auftritten insgesamt mehr als 1000 Besucher gehabt. Am Samstag kamen 210 und 249 Besucher in die Vorstellungen um 11 Uhr und um 16 Uhr. Am Sonntag waren vormittags 199 Personen und nachmittags 291 Personen zu Gast.

c **100 mal so groß**

Wussten Sie schon, dass das größte Landsäugetier etwa 100 Mal so groß ist wie der kleinste Landsäuger? Der afrikanische Großohr-Elefant kann bis zu 3,96 m groß werden, die weißzähnige Spitzmaus hat eine Körperlänge von 36 bis 48 mm.

d **Riesen-Lottogewinn**

Über einen Riesen-Lottogewinn von 352 675 € können sich 9 Lotto-Spieler freuen. Jeder von ihnen gewinnt fast 4000 €.

Welche Zeitungsmeldungen enthalten ganz bestimmt einen Fehler? Begründe deine Entscheidung! Erfinde selbst richtige und fehlerhafte Meldungen! Sachbücher oder Kinderzeitschriften können dir dabei helfen.

4000 Schüler in 48 Schulklassen

Gevelsberg – Die Sommerferien neigen sich dem Ende zu. Die vielen Kinder, die zu Fuß zur Schule unterwegs sind, sind ein Zeichen, dass die 9 Schulen in Gevelsberg wieder geöffnet sind.

Dieses Schuljahr sind es fast 4000 Schüler, die zusammen 48 Schulklassen besuchen. Für manche Schüler waren die Ferien viel zu kurz, aber die meisten freuen sich darauf, ein neues Schuljahr zu beginnen.

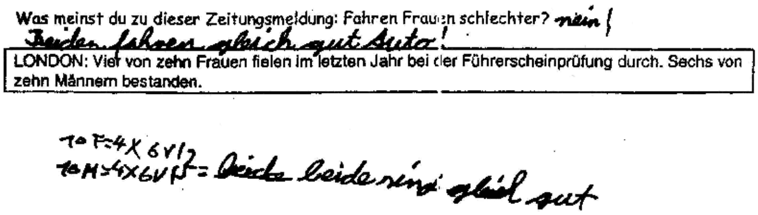
~~50:11=5~~ 4000:50=~~200~~ 80

Nein, es gibt keine Klasse in der 80 Kinder sind ...

den (4000:50). Nach zwei fehlgeschlagenen Anläufen kam Nico zu dem numerisch korrekten Ergebnis ‚80' (mit Hilfe eines Modells lösen). Diese Lösung musste er dann noch auf die Ausgangssituation zurück beziehen (‚Es gibt keine Klasse, in der 80 Kinder sind.').

In einem weiteren Beispiel, bei dem die Kinder dazu angeregt wurden, über ‚Zahlen aus der Zeitung' unter der Leitfrage ‚Fahren Frauen schlechter?' nachzudenken, wurde behauptet, dass vier von zehn Frauen im letzten Jahr bei der Führerscheinprüfung durchgefallen waren, während sechs von zehn Männern bestanden. Tim antwortete, beide wären gleich gut gewesen.

Er begründete seine Antwort, indem er angab ‚10 F=' (10 Frauen) und dahinter ‚4x' schrieb, was ‚4 Personen durchgefallen' heißen sollte. Hinter die ‚6' machte er ein Häkchen, was bedeuten sollte, dass sechs Personen bestanden hätten. Dann notierte er analog ‚10 M=' und gab dort ebenfalls die Anzahl der bestandenen bzw. nicht bestandenen Prüfungen an.


Was meinst du zu dieser Zeitungsmeldung: Fahren Frauen schlechter? nein!
Beiden fahren gleich gut Auto!

LONDON: Vier von zehn Frauen fielen im letzten Jahr bei der Führerscheinprüfung durch. Sechs von zehn Männern bestanden.

10 F=4X 6V/✓
10M=4X6V✓ = beide beide sind gleich gut

Seine Darstellung wurde dann in der Klasse auf allgemeine Verständlichkeit hin ebenso diskutiert, wie andere Schülerantworten, etwa …

- Nein. Frauen fahren nicht schlechter, weil 10-4=6 Frauen haben bestanden. Und 6 Männer haben bestanden, weil 4 Frauen sind durchgefallen.
- Nein, weil 4 Männer und 4 Frauen haben nicht bestanden.
- Es hängt davon ab, wie viel die Frauen in den Fahrstunden lernen.
- Das weiß man nie so genau, weil jeder Mensch unterschiedlich gut fahren kann.

8.3 Kompetenzerwartungen

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
• entnehmen Sachsituationen und Sachaufgaben Informationen und unterscheiden dabei zwischen relevanten und nicht relevanten Informationen (MOD: erfassen) • übersetzen Problemstellungen aus Sachsituationen in ein mathematisches Modell (z. B. Gleichung, Tabelle, Zeichnung) und lösen sie mithilfe des Modells (MOD: lösen) • beziehen ihr Ergebnis wieder auf die Sachsituation und prüfen es auf Plausibilität (MOD: validieren) • testen Vermutungen anhand von Beispielen und hinterfragen, ob ihre Vermutungen, Lösungen, Aussagen, etc. zutreffend sind (ARG: überprüfen)	• entnehmen Kalendern, Diagrammen und Tabellen Daten und ziehen sie zur Beantwortung von mathematikhaltigen Fragen heran (DHW: Daten und Häufigkeiten)

9 Zahlenschloss

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
Problemlösen / kreativ sein	Umgang mit Zahlen und Operationen
Modellieren	Umgang mit Raum und Form
Argumentieren	Messen und Umgang mit Größen
Darstellen / Kommunizieren	Umgang mit Daten, Häufigkeiten und Wahrsch.

9.1 Kurzbeschreibung

Bei diesem Unterrichtsbeispiel geht es zunächst darum, möglichst viele bzw. alle verschiedenen Möglichkeiten zu finden, eine dreistellige Zahl aus drei verschiedenen Ziffern zu bilden, z. B. der 2, der 5 und der 7. Systematisches Ausprobieren liefert insgesamt sechs Möglichkeiten, hier der Größe nach geordnet: 257, 275, 527, 572, 725 und 752. Auch bei anderen Auswahlen von drei unterschiedlichen Ziffern ergeben sich wieder sechs Möglichkeiten.

Das kann man sich auch so überlegen: Für die erste Ziffer hat man drei Möglichkeiten, die 2, die 5 oder die 7. Wenn man sich entschieden hat, zum Beispiel für die 2, bleiben für die zweite Ziffer noch zwei Möglichkeiten, hier: die 5 oder die 7. Die dritte Ziffer ist dann festgelegt: Nimmt man als zweite Ziffer die 5, ist es die 7 – und umgekehrt. Das gilt natürlich nicht nur für die 2 als erste Ziffer, sondern für jede der drei Ziffern. Es gibt also $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten.

Im zweiten Teil der Unterrichtseinheit haben die Schülerinnen und Schüler *vier* verschiedene Ziffern zur Verfügung, aus denen dreistellige Zahlen gebildet werden sollen. Systematisches Aufschreiben hilft auch hier, sich zu überlegen, warum es 24 verschiedene Möglichkeiten gibt: Für die erste Ziffer gibt es vier Möglichkeiten, dann bleiben für die zweite noch drei und für die dritte noch zwei. Es gibt also $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ verschiedene Möglichkeiten, aus vier verschiedenen Ziffern dreistellige Zahlen zu bilden.

9.2 Umsetzung im Unterricht

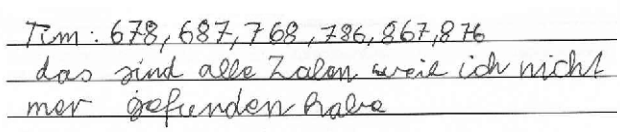
Als Kontext wurde das Zahlenschloss gewählt, ein Gegenstand, den viele Kinder kennen bzw. in dessen Funktionsweise sie sich leicht hinein denken können. Zu Beginn der Unterrichtseinheit wurden die Schülerinnen und Schüler anhand eines echten Zahlenschlosses mit diesem Kontext (wieder) vertraut gemacht. Dann wurde die erste Aufgabe gemeinsam bearbeitet, auch um die Aufgabenbedingungen zu verdeutlichen.

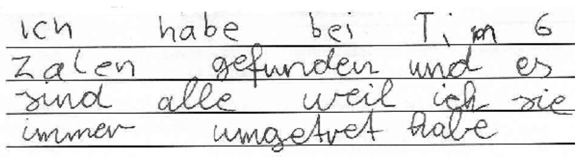
Sven möchte eine neue Geheimzahl an seinem Zahlenschloss einstellen. Die soll aus seinen Lieblingszahlen 2, 5 und 7 bestehen. Finde alle Möglichkeiten. Gibt es einen Trick, wie du das möglichst schlau heraus finden kannst?

Anschließend bearbeiteten die Kinder analoge Aufgaben für andere Ziffern (Nina 2, 3, 6 bzw. Tim 6, 7, 8) in Partnerarbeit, um weitere Erfahrungen mit dem (systematischen) Bestimmen aller Möglichkeiten zu machen. Die nächste Aufgabe diente dann dazu, die Schüler zum Argumentieren anzuregen:

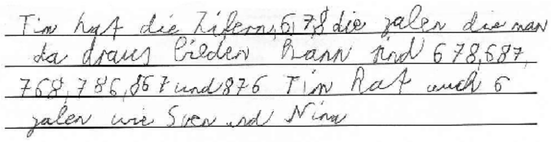
Schreibe zu einem der drei Schüler Sven, Nina oder Tim auf, wie viele Möglichkeiten du für das Zahlenschloss gefunden hast. Warum sind das alle?

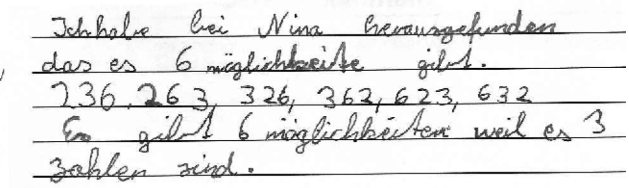
Sebastian (links) beispielsweise schrieb einen Text über Tims Zahlenschloss. Die meisten Schüler, wie etwa Tobias, gaben an, sie hätten Zahlen oder Ziffern ‚umgedreht' oder ‚vertauscht'.





Julius schrieb, dass er bei allen Schülern sechs Möglichkeiten gefunden hat. Auch Hanna fand sechs Möglichkeiten, die sie auf die Anzahl der Ziffern bezog.

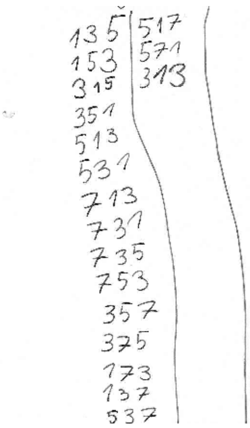

Tim hat die Zifern 6 7 8 die zalen die man da draus bilden kann sind 678, 687, 768, 786, 867 und 876 Tim hat auch 6 zalen wie Sven und Nina

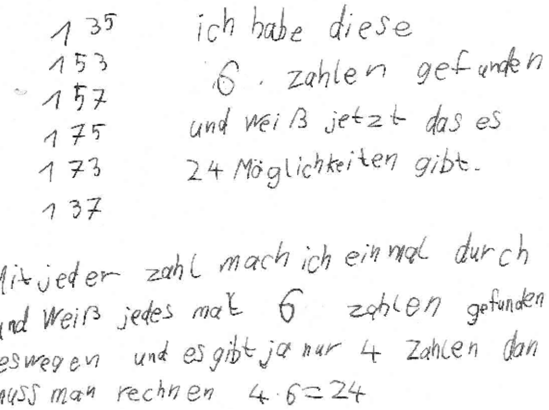

Ich habe bei Nina herausgefunden das es 6 möglichkeite gibt. 236, 263, 326, 362, 623, 632 Es gibt 6 möglichkeiten weil es 3 zahlen sind.

Im Anschluss daran fand eine kurze Reflexions- und Besprechungsphase statt. Die Lehrerin hatte mit Hilfe einzelner Schüler magnetische Kärtchen mit je einer Zahlenkombination beschriftet und diese an die Tafel gehängt. Ein Schüler ordnete die Kärtchen dann der Größe nach unter den jeweiligen Namen Sven, Nina oder Tim. Es wurde besprochen, wie viele Möglichkeiten gefunden worden waren, wie die Zahlen an der Tafel geordnet wurden und warum es keine weiteren Möglichkeiten mehr geben konnte. Zum Abschluss sollten dreistellige Zahlen aus vier verschiedenen Ziffern gebildet werden.

Meike hat auch ein Zahlenschloss mit drei Ziffern. Ihre Lieblingszahlen sind 1, 3, 5 und 7. Finde alle Möglichkeiten. Tipp: Es gibt mehr als 20 Möglichkeiten.

Zwei typische Schülerbeispiele sollen die Bandbreite der Schülerlösungen illustrieren. *Tatjana* hat die Möglichkeiten nicht durchgängig der Größe nach aufgeschrieben, jedoch immer die Zahlen mit vertauschten Zehner- und Einerziffern hintereinander aufgelistet. Insgesamt findet sie so 18 Möglichkeiten. Vladimir hingegen fand mit einer noch ausgereifteren Systematik alle 24 Möglichkeiten und begründete die Vollständigkeit wie folgt.


135
153
315
351
513
531
713
731
735
753
357
375
173
137
537
517
571
313


135
153
157
175
173
137
ich habe diese 6 zahlen gefunden und weiß jetzt das es 24 Möglichkeiten gibt.
Mit jeder zahl mach ich einmal durch und weiß jedes mal 6 zahlen gefunden deswegen und es gibt ja nur 4 Zahlen dan muss man rechnen 4·6=24

Abschließend wurden dann die verschiedenen Möglichkeiten, der Systematik von Vladimir folgend, an der Tafel sortiert und die Vollständigkeit durch geordnetes Notieren begründet.

9.3 Kompetenzerwartungen

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
• probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (PL: lösen) • übertragen Vorgehensweisen auf ähnliche Sachverhalte (PL: reflektieren und übertragen) • erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen und vollziehen Begründungen anderer nach (ARG: begründen)	• bestimmen die Anzahl verschiedener Möglichkeiten im Rahmen einfacher kombinatorischer Aufgabenstellungen (DHW: Wahrscheinlichkeiten)

10 Mit dem Arbeitsplan zum Einmaleinspass

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
Problemlösen / kreativ sein	Umgang mit Zahlen und Operationen
Modellieren	Umgang mit Raum und Form
Argumentieren	Messen und Umgang mit Größen
Darstellen / Kommunizieren	Umgang mit Daten, Häufigkeiten und Wahrsch.

10.1 Kurzbeschreibung

Wie bereits einleitend erwähnt, wäre es verfehlt, die Forderung nach einer stärkeren Berücksichtigung prozessbezogener Kompetenzen so zu verstehen, dass der Erwerb von Basiskompetenzen, der ein verständnisbasiertes Rechentraining erfordert, nachgeordnet erfolgen oder gar vernachlässigt werden könne. Das Unterrichtsbeispiel in diesem Kapitel beschreibt in diesem Sinne, wie in einem geöffneten Unterricht, indem auch prozessbezogene Kompetenzen angesprochen werden, die Kinder mit der individuellen Erarbeitung des Einmaleins bis hin zur auswendigen Verfügbarkeit befasst sind.

10.2 Umsetzung im Unterricht

In dem zweiten Schuljahr gab es Kinder, die das Einmaleins schon vollständig beherrschten, bevor es im Unterricht thematisiert wurde, und andere, die noch nicht über die Grundvorstellungen des Multiplizierens zu verfügen schienen. Da die Multiplikation und die Division ein recht umfangreiches Themenfeld darstellen, entschied die Lehrerin sich zu einer Zweiteilung des Arbeitspensums. Phase 1 diente der Grundlegung des multiplikativen Rechnens, hier befassten sich die Schülerinnen und Schüler u. a. mit ausgewählten Situationen, bildlichen Darstellungen und Kontextaufgaben, die als ‚Ausgangspunkte' des Lernprozesses dienten. Außerdem wurde die Basis für die Ausbildung tragfähiger Grundvorstellungen geschaffen, indem die Schüler die *wesentlichen* wechselseitigen Zusammenhänge zwischen Zahlensatz, Handlung, Bild und Text ausbildeten bzw. vertieften.

Die Kinder mussten alle Aufgaben des Pflichtbereichs bearbeiten, sie konnten dieses aber in ihrer eigenen Geschwindigkeit tun. Phase 1 schloss mit einer Zwischenprüfung ab, zu der sich diejenigen anmelden konnten, die ihr Pensum erfüllt hatten. Hierzu verschaffte sich die Lehrerin einen Überblick über die von den Kindern einzureichenden Arbeiten. Außerdem sollten die Kinder anhand einiger Prüfaufgaben nachweisen, dass sie die Anzahl der Punkte in rechteckigen Punktfelddarstellungen strukturiert, also nicht zählend, ermitteln konnten.

Im Anschluss daran erhielten sie – wie auch in Phase 1 – einen Arbeitsplan für die zweite Phase, der in der ersten Spalte die von den Kindern im Verlauf der nächsten drei Wochen zu behandelnden Aufgabengruppen angab. Die Aufgabengruppen 6 bis 9 bildeten den Pflichtbereich des zweiten Arbeitsplans. Durch die Angabe eines Sternchens wurden die Aufgaben der weiterführenden Anforderungen kenntlich gemacht.

In der ersten Spalte erhielten die Kinder zudem Informationen, wo sie die zugehörigen Aufgaben im Mathematikbuch (Mb; verwendet wurde aufgrund seiner konzeptionellen Ausgereiftheit das ‚Zahlenbuch') bzw. im Arbeitsheft (AH) finden konnten. Des Weiteren finden sich Hinweise, welche Aufgaben aus dem Forscherheft (Sammlung von Arbeitsblättern) erledigt werden sollten und der Hinweis, dass einige Forscherblätter auf dem Mathe-Tisch bereit lagen. In den Spalten 2 und 3 machten die Kinder Kreuze, wenn sie die Aufgaben begonnen bzw. erledigt hatten, so dass sie eine Übersicht über ihr Arbeitspensum hatten. Nach Abschluss der jeweiligen Arbeiten trugen sie zum Zwecke der Erhöhung der Transparenz bezüglich ihres eigenen Lernprozesses in einer Zielscheibe ein, wie gut sie ihres Erachtens die jeweilige Aufgabe bewältigt hatten. In das Leerfeld in der letzten Zeile konnten die Kinder dann noch eine selbst gewählte Zusatzaufgabe eintragen.

Lernbericht Teil 2

Einmaleins-Forscherheft

von: ______________________

Aufgaben	angefangen	erledigt	Lernbericht
			Das kann ich
6. Einmaleins-Plan a) *mal 10, mal 5, mal 2:* Mb., S. 70, S. 71 und AH., S. 36, *S. 37 b) *mal 3, mal 6, mal 9:* Mb., S. 72, S. 73 und AH., S. 38, S. 39 c) *mal 4, mal 8, mal 7:* Mb., S. 74, S. 75 und AH., S. 40, S. 41	❑	❑	
7. Üben für den Einmaleins-Pass Forscherheft S. 8 bis S. 22	❑	❑	
8. Schulbuchseiten erfinden Diese Forscherblätter liegen auf dem Mathetisch aus.	❑	❑	
9. Geteiltaufgaben Mb., S. 78, S. 79 und AH., S. 42, S. 43 Mb., S. 80, S. 81 und AH., S. 44, S. 45, Nr. 1, 2 *3 Forscherheft S. 23 bis S. 26	❑	❑	
*** Forscheraufträge** Diese Forscherblätter liegen auf dem Mathetisch aus.	❑	❑	
*** Entdeckungen an der Einmaleins-Tafel** Mb., S. 98, S. 99 und AH., S. 54, S. 55 Diese Forscherblätter liegen auf dem Mathetisch aus.	❑	❑	
*** Die Einmaleins-Ergebnis-Tafel** Diese Forscherblätter liegen auf dem Mathetisch aus.	❑	❑	
*	❑	❑	

Bist du bereit für die Prüfung zum Einmaleins-Pass? ❑ ja ❑ nein, ich möchte noch üben

Die Kinder konnten nun – wie in Phase 1 – innerhalb des grob vorgegebenen Zeitrahmens die Reihenfolge und den Zeitpunkt der Behandlung selbst bestimmen. Ebenso war ihnen frei gestellt, ob sie die Sternchen-Aufgaben bearbeiteten oder nicht. Auch hier bildete eine Prüfung den Abschluss. Insbesondere in einem geöffneten Unterricht, in dem nicht alle Kinder zur gleichen Zeit und in gleichem Tempo mit den gleichen Aufgaben befasst sind, tragen solche Kristallisationspunkte zur Information für die Lehrerin (Wer kann was, wer was noch nicht?) und als Orientierung und Motivation für die Kinder dazu bei, dass der Unterricht nicht in Beliebigkeit und damit ‚Leistungsschwäche' abdriftet.

Die Beschreibung einer typischen Unterrichtsstunde soll nun illustrieren, wie die Kinder und die Lehrerin arbeiteten. Es soll deutlich werden, dass die Kinder nicht nur ‚beschäftigt' sind, sondern ausgehend von ihren individuellen Vorerfahrungen Lernfortschritte machen können.

> Die Stunde beginnt mit einer Blitzrechenübung zum Einmaleins am Hunderterpunktefeld. Die Lehrerin erläutert daran anschließend, dass die Kinder in ihrem Einmaleinsheft weiter arbeiten, aber darüber hinaus sich auch mit weiterführenden Forschungsaufgaben oder Blitzrechenübungen am Computer (nicht auf das Einmaleins beschränkt) befassen können.
>
> Nachdem einige kleinere organisatorische Fragen geklärt worden sind, holen sich die Kinder ihr Material und beginnen individuell oder zu zweit zu arbeiten. Dabei benutzen sie auch Seitentische, einige von ihnen arbeiten auf dem Boden. Zu Beginn der Arbeitsphase kommen einige Kinder zur Lehrerin, um ihr etwas zu zeigen oder sie etwas zu fragen. Bei einem Gang durch die Klasse kann man feststellen, was die einzelnen Kinder tun. Einige Beispiele:
>
> Timo und Lili befassen sich mit Knobelaufgaben, die zu den weiterführenden Anforderungen gehörten. Sie rechnen jeweils zwei zusammengehörige Aufgaben aus (1+3 und 2·2; dann 3+5 und 2·4; dann 5+7 und 3·4; dann 7+9 und 4·4), sollen dann die nächsten beiden Aufgabenpaare finden, ebenfalls berechnen und aufschreiben, was ihnen auffällt. Sie notieren, dass es bei beiden Aufgaben stets die Ergebnisse der Viererreihe seien, außerdem: dass bei den untereinander stehenden Plusaufgaben beide Summanden immer um 2 größer würden und dass bei den ebenfalls untereinander stehenden Malaufgaben der zweite Faktor ebenfalls stets um 2 wachse: „2, 4, 6, 8, 10, und so weiter."
>
> René sitzt mit seinem Mathematikbuch auf dem Boden und berechnet bzw. erinnert die Aufgaben der sog. kurzen Reihen (auch Kernaufgaben genannt), z. B. 1·3, 2·3, 5·3 und 10·3, die den Kindern als Stützpunktaufgaben dienen können, um die anderen Aufgaben des Einmaleins abzuleiten. Davor hat eine andere Aufgabe behandelt, bei der es jeweils um das Berechnen von Aufgabe und Tauschaufgabe ging.
>
> Nina und Patricia sitzen an einem Seitentisch und arbeiten zum selbst gewählten Thema Geheimschriften. Sie wollen in einigen Tagen eine Schatzsuche organisieren und haben zu dem Zweck aus Kindersachbüchern, von der Lehrerin zur Verfügung gestellten Unterrichtsmaterialien (Sundermann & Selter 2003) sowie dem Internet eine Reihe von Geheimschriften zusammen getragen und davon ausgehend selbst welche erfunden (zum Beispiele eine, bei der jeder Buchstabe durch eine bestimmte Farbe codiert wird), mit deren Hilfe sie ihre Geheimbotschaften verschlüsseln. Sie haben zu dem Zeitpunkt die Einmaleins-Zwischenprüfung bereits bestanden und auch schon einige Aufgaben aus dem zweiten Teil des Forscherheftes bearbeitet. Die beiden Kinder haben das Einmaleinslernen für den Moment beiseite gestellt.
>
> Lukas ermittelt die Anzahlen von Punkten, die im Rechtecksmuster (als Teile des Hunderter-Punktefeldes) angeordnet sind, also zum Beispiel in der 6·7 Anordnung. Die Lehrerin sieht beim Herumgehen – keinesfalls zu ihrer Überraschung –, dass Lukas noch häufig dazu neigt, die Anzahlen durch Abzählen einzelner Punkte zu ermitteln. Die Lehrerin hat Zeit, sich zu ihm zu setzen, und ihn dazu anzuregen, wieder verstärkt die Strukturen der Punktefelder auszunutzen.
>
> Murat fragt Mehmet: „Wie geht das?" „Du musst immer einen Strich machen von der Aufgabe zum Ergebnis, so!" Murat geht wieder zu seinem Platz und arbeitet an einer Aufgabe, bei der Malaufgaben und Ergebnisse der Aufgaben miteinander zu verbinden sind. Er verrechnet sich einmal und verbindet demzufolge zwei Felder falsch miteinander. Somit bleiben eine Aufgabe und ein Ergebnis übrig, die nicht zueinander passen. Daraufhin geht er wieder zu Mehmet. Murat weiß, dass Mehmet als Expertenkind für die Aufgaben fungiert. Die Kinder haben sich für Aufgaben, bei denen sie sich sicher fühlten, als Expertenkinder in einem Plakat eingetragen, das für alle Kinder einsehbar an der Tür hängt.
>
> Sarah und Anna sitzen an einer Aufgabe, bei der sie ausgehend von den kurzen Reihen die Ergebnisse von anderen Aufgaben ermitteln können. So steht zum Beispiel die Aufgabe 6·3 unter 5·3 oder 9·7 unter 10·7. Die Lehrerin bittet sie, dieses am Ende der Stunde allen Kindern vorzustellen und zu erklären.
>
> Sven sitzt am Rechner und übt das Blitzrechnen (Wittmann & Müller 2007). Er hat aber keine Aufgaben des Einmaleins ausgewählt, sondern er rechnet rückwärts in Zweierschritten (48, 46, 44, …). Neben ihm sitzt Marc an einem anderen Computer und befasst sich mit Aufgaben des Typs ‚346 000 plus wie viel ist eine Million?' „Das Einmaleins kann ich schon lange."

Timo und Dennis sitzen an der Aufgabe, möglichst viele Malaufgaben mit dem Ergebnis 100 zu finden. Nach einiger Zeit sind sie sich sicher, alle Möglichkeiten gefunden zu haben, weil „zu 3, 6, 7, 8 und 9 gibt es keine Malaufgabe, die 100 ergibt.“

Steffi und Mira haben sich zur Prüfung für den Einmaleinspass angemeldet. Die Lehrerin sichtet ihre Mathe-Mappen und stellt ihnen eine Reihe von Aufgaben. Da sie diese schnell und richtig beantworten können, unterschreibt sie ihren Pass und versieht ihn mit einem Stempel.

Cem und Peter sitzen in einer Ecke des Klassenzimmers und stellen sich zu Übungszwecken gegenseitig Aufgaben aus dem Basiskurs Zahlen zum Blitzrechnen (Wittmann & Müller 2005a). Sie wollen sich auch demnächst zur Einmaleins-Prüfung anmelden. Allerdings müssen sie dazu auch noch einige Aufgaben ihres Arbeitsplans erledigen. Auch die anderen Schülerinnen und Schüler der Klasse arbeiten an einer der Aufgaben des Arbeitsplans.

Am Ende der Stunde kommen die Kinder im Stuhlkreis vor der Tafel zusammen und Sarah und Anna erläutern ihren ‚Trick’. Die Lehrerin unterstützt dies, indem sie selbst am OHP an Punktfeldern illustriert, wie die Aufgaben 5·4 und 6·4 zusammenhängen.

In dieser Stunde sind zwei kürzere Phasen gemeinsamen Arbeitens zu beobachten. Wie beispielsweise Punktefelder zu interpretieren, Einmaleinstabellen aufgebaut sind oder mit Geteiltaufgaben (1·1 umgekehrt) umzugehen ist, erschließt sich den meisten Kindern nicht von selbst. Auch gibt es immer wieder die Notwendigkeit, mit einigen Kindern Dinge noch einmal durchzusprechen, die die anderen Schülerinnen und Schüler bereits kennen bzw. beherrschen.

10.3 Kompetenzerwartungen

Wie die Beschreibung des Unterrichts verdeutlicht, arbeiten die Schülerinnen und Schüler an durchaus unterschiedlichen, fachdidaktisch fundierten Aufgabenstellungen, die durch den Arbeitsplan gerahmt werden. Die Aufzählung sämtlicher angesprochener prozessbezogener Kompetenzen würde zu umfangreich geraten. Daher werden im Folgenden exemplarisch einige der zu beobachtenden prozessbezogenen Kompetenzen angeführt.

Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
• überprüfen Ergebnisse auf ihre Angemessenheit, finden und korrigieren Fehler, vergleichen und bewerten verschiedene Lösungswege (PL: reflektieren und überprüfen) • übertragen Vorgehensweisen auf ähnliche Sachverhalte (PL: übertragen) • übersetzen Problemstellungen aus Sachsituationen in ein mathematisches Modell (z. B. Gleichung, Tabelle, Zeichnung) und lösen sie mithilfe des Modells (MOD: lösen) • erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen und vollziehen Begründungen anderer nach (ARG: begründen) • bearbeiten komplexere Aufgabenstellungen gemeinsam, treffen dabei Verabredungen und setzen eigene und fremde Standpunkte in Beziehung (DAR: kooperieren und kommunizieren)	• ordnen Grundsituationen wie z.B. dem wiederholten Hinzufügen gleicher Anzahlen Malaufgaben sowie z.B. dem wiederholten Wegnehmen Ver- bzw. Aufteilaufgaben zu (ZO: Operationsvorstellungen) • wechseln zwischen verschiedenen Darstellungsformen von Operationen (mit Material, bildlich, symbolisch und sprachlich) hin und her (ZO: Operationsvorstellungen) • entdecken, beschreiben und nutzen Operationseigenschaften (z. B. Umkehrbarkeit) und Rechengesetze an Beispielen (ZO: Operationsvorstellungen) • übertragen ihre Kenntnisse und Fertigkeiten im schnellen Kopfrechnen auf analoge Aufgaben im erweiterten Zahlenraum (ZO: schnelles Kopfrechnen) • geben die Kernaufgaben und einzelne weitere Aufgaben des kleinen Einmaleins automatisiert wieder (ZO: schnelles Kopfrechnen)

Schlussbemerkungen

Wie Walther, Selter & Neubrand (2008) darstellen, sind die in den bundesweiten Bildungsstandards und im neuen Grundschullehrplan Mathematik formulierten Kompetenzen und Kompetenzerwartungen keine ‚Erfindungen' des 21. Jahrhunderts. Bei den inhaltsbezogenen Kompetenzen ist Vieles von dem wieder zu finden, auf das kompetente Lehrerinnen in ihrem Unterricht ohnehin Wert legen. Allerdings bekommt dieser Bereich eine neue Qualität, wenn man Wittmann und Müller (2008) folgend, Mathematik nicht als fertiges Regelsystem, sondern als ‚Wissenschaft von den Mustern' (Wittmann 2003) versteht.

Neu ist allerdings die große Bedeutung, die der Entwicklung der prozessbezogenen Kompetenzen in Verbindung mit substanziellen mathematischen Inhalten im Unterricht beigemessen wird. Diese Akzentverschiebung gründet sich auf eine bereits mehrere Jahrzehnte dauernde Entwicklung in der Mathematikdidaktik – sowohl auf nationaler wie auf internationaler Ebene – und wurde dabei wesentlich durch die Arbeit von Heinrich Winter beeinflusst, beginnend mit der Schrift Winters über allgemeine, inhaltsübergreifende Lernziele des Mathematikunterrichts (1975).

1985 erschien unter der wissenschaftlichen Begleitung Winters die Vorgängerfassung dieses Lehrplans. Sie baute auf den von ihm formulierten allgemeinen Lernzielen auf und formulierte mit dem Begriffspaar Strukturorientierung-Anwendungsorientierung eine allgemein anerkannte Bildungsperspektive. Der 85er-Lehrplan war wegweisend für viele spätere Lehrpläne in anderen Bundesländern, nicht zuletzt aufgrund der Einforderung der allgemeinen Lernziele kreativ sein, argumentieren und mathematisieren, und hat auch – bei allen Neuerungen – den vorliegenden Lehrplan wesentlich beeinflusst.

Die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen, die durch die Bildungsstandards und den neuen Lehrplan also nachhaltig betont wird, ist eine *systematisch* zu verfolgende, *langfristige* Aufgabe des Mathematikunterrichts, die durch regelmäßige, eigene Aktivitäten der Kinder beständig geschult wird. Fünf Punkte, die in diesem Zusammenhang wichtig erscheinen, sollen abschließend erläutert werden (vgl. Walther, Selter & Neubrand 2008, S. 37 ff.).

Substanzielle Aufgaben: Unabdingbar für die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen ist die Verwendung substanzieller Aufgaben. Es gilt, nach dem bewährten Grundsatz ‚multum, non multa' zu verfahren: Lieber *wenige gute* Aufgabenfelder bzw. Lernkontexte ausführlich und über die verschiedenen Schuljahre hinweg mit unterschiedlichen Fragestellungen immer wieder zu behandeln als *viele isolierte* Aufgaben abarbeiten zu lassen. Substanzielle Aufgaben sind Aufgaben, bei denen sowohl die inhaltsbezogenen als auch die prozessbezogenen Kompetenzen – auf unterschiedlichen Leistungsniveaus und mit unterschiedlich ausgeprägten Interessensgraden – angesprochen werden. Weitere Beispiele finden Leserinnen und Leser in Walther, Selter & Neubrand (2008) oder Hengartner u. a. (2006) in großer Zahl. Dabei wird deutlich, dass der Einsatz substanzieller Aufgaben dazu beitragen kann, das Problem der begrenzten Unterrichtszeit trotz ständig zunehmender Anforderungen in den Griff zu bekommen, ermöglichen sie es doch, gleichzeitig zu üben *und* zu entdecken.

Eine Kultur des Erforschens, Entdeckens und Erklärens: Offensichtlich ist, dass dieses umso besser gelingt, je mehr das Entdecken, Erforschen und Erklären und dabei insbesondere auch *der soziale Austausch* zwischen Lehrerin und Kindern sowie auch zwischen den Kindern untereinander zu einem natürlichen Bestandteil des Unterrichts geworden ist (vgl. Verboom 2004). Besondere Beachtung bedürfen dabei etwa die schlüssige und verständliche Einführung der Aufgabenstellung bzw. der Aufgabenvorschrift anhand wirklich exemplarischer Beispiele mit sinnvoll ausgewähltem Zahlenmaterial, das Schaffen von Zieltransparenz für die Schüler(innen), die Etablierung von Ritualen wie Mathekonferenzen bzw. gleichermaßen offenen wie zielorientierten Unterrichtsgesprächen, der geregelte Austausch über beispielsweise (Vor- und Nachteile bestimmter) Sprech- und Schreibweisen oder die Einräumung von angemessen viel Zeit, damit die Schülerinnen und Schüler die Fragestellungen anhand hinreichend vieler selbst erarbeiteter Beispiele sowie durch das Nachdenken über deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede wirklich durchdringen können. Der Lehrperson kommt also die ganz entscheidende Aufgabe zu, die Kinder nach und nach in das Beobachten, Entdecken, Problemlösen, Beschreiben und Begründen einzuführen und sie dabei zu unterstützen. Denn bei vielen Kindern ereignen sich diesbezügliche nennenswerte Lernfortschritte nicht immer spontan.

Maßnahmen der Individualisierung: Somit sollte man nicht davon ausgehen, dass jede substanzielle Aufgabe alle Schüler(innen) automatisch 'aus der Sache heraus' anspricht und kontinuierlich motiviert, sich damit zielorientiert und trotz ggf. auftauchender Schwierigkeiten auseinander zu setzten. Das bedeutet keineswegs, dass solche Aufgaben nur etwas für die leistungsstärleren Schülerinnen und Schüler sind. Kinder sind unterschiedlich – diese Erkenntnis gilt nicht nur für die inhaltsbezogenen, sondern auch für die prozessbezogenen Kompetenzen. So sind es nicht selten schwächere Schülerinnen und Schüler, die nicht genau wissen, wie sie vorgehen sollen. Daher kann es hilfreich sein, durchgängig und für die Kinder transparent zwischen Grundanforderungen und weiterführenden Anforderungen zu unterscheiden. Darüber hinaus kann es z. B. auch Sinn machen, Tipps für diejenigen Kinder bereit zu halten, die nach längerem Nachdenken nicht weiter kommen, freilich ohne dabei zu viel vorzugeben.

Kleine Erfolge sehen: Hilfreich ist zudem eine positiv-optimistische Grundeinstellung gegenüber dem Denken und Lernen der Kinder. Denn deren sinnvolle Vorgehensweisen, viel versprechende Denkansätze und erstaunliche Arbeitsergebnisse werden oft nicht erkannt, weil die Lehrperson das Vorgehen der Schüler(innen) und deren Äußerungen nicht sensibel genug beobachtet (bzw. dieses in der Hektik des Alltagsgeschäfts nur schwerlich kann) und sie zudem unfertiges oder ihr nicht auf Anhieb verständliches Denken als fehlerhaft oder defizitär ansieht. Es zahlt sich für Erwachsene wie für Kinder aus, wenn Erstere auch die kleinen Erfolge und Fortschritte der Lernenden in der Auseinandersetzung mit prozessbezogenen Aufgaben sehen und anerkennen, statt von ihnen mit Blick auf Idealzielsetzungen zu schnell zu viel zu verlangen.

Offene Formen der Leistungsfeststellung: Damit sich die prozessbezogenen Kompetenzen in der Unterrichtspraxis durchsetzen können, ist es erforderlich, sie auch im Rahmen von Leistungsfeststellungen angemessen zu berücksichtigen (vgl. Sundermann & Selter 2006). Ähnlich wie im Deutschunterricht das Beurteilen der Texte von Kindern in der Regel aufwändiger ist als die bloße Beurteilung der Fertigkeiten im Rechtschreiben, ist die Beurteilung von Aufgaben(teilen), die die prozessbezogenen Kompetenzen ansprechen, häufig nicht so unkompliziert wie die reine Bewertung des (End)Resultats. Aber Ersteres ist erforderlich und ausgehend von einem Kriterienkatalog auch leistbar, wobei man sich der unvermeidlichen Subjektivität der eigenen Wahrnehmungen durchaus bewusst, aber mit positiver Einstellung um individuelle Gerechtigkeit bemüht sein sollte. Die typischen Klassenarbeitsaufgaben und Testitems haben hier im Gegensatz zur Reichhaltigkeit substanzieller Aufgaben in der Regel nur eine recht begrenzte Aussagekraft.

Zu guter Letzt: Bei aller Wichtigkeit der in diesem Beitrag explizit erläuterten inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen: Der Erfolg von Unterricht wird auch daran festgemacht, inwieweit es gelingt, die fachbezogene Lernfreude und Leistungsbereitschaft der Kinder zu erhalten und auszubauen. Die Entwicklung von Einstellungen und Haltungen gilt als unverzichtbarer Bestandteil mathematischer Bildung, wie es auch an zentraler Stelle im Lehrplan eingefordert wird:

> „*Lernprozesse* und *Lerngelegenheiten* im Unterricht sind so zu gestalten, dass sich eine nachhaltige positive *Haltung* und *Einstellung* zum Fach entwickeln kann. Diese ist für den erfolgreichen und nachhaltigen Erwerb von fachbezogenen Kompetenzen unabdingbar. Nur so können sich
>
> - Interesse und Neugier an mathematikhaltigen Phänomenen (“*Entdeckerhaltung*“),
> - Motivation, Ausdauer und Konzentration im Prozess des mathematischen Arbeitens,
> - ein konstruktiver Umgang mit Fehlern und Schwierigkeiten,
> - Selbstvertrauen in die eigenen mathematischen Kompetenzen und
> - Einsicht in den Nutzen des Gelernten für die Bewältigung von mathematikhaltigen Problemen und Lebenssituationen
>
> nachhaltig entwickeln“ (Lehrplan Mathematik, S. 3).

Literatur

Hengartner, Elmar u. a. (2006): Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Klett und Balmer: Zug.

Heuvel-Panhuizen, Marja van den (2001): Estimation. In: Dies. (Hg.): *Children Learn Mathematics*. Utrecht: Freudenthal Institute, S. 173-201.

KMK (Kultusministerkonferenz, 2005, Hg.): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Wolters-Kluwer & Luchterhand: Neuwied.

Selter, Christoph (2003): Flexibles Rechnen – Forschungsergebnisse, Leitideen, Unterrichtsbeispiele. In: Sache-Wort-Zahl. H. 57, S. 45-50.

Selter, Christoph (2004): *Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten. Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule*. Beschreibung des Moduls 2 für das Projekt Sinus-Transfer Grundschule (www.sinus-grundschule.de/)

Selter, Christoph & Hartmut Spiegel (2003): *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten*. Seelze: Kallmeyer.

Spiegel, Hartmut & Jule Spiegel (2003): *PotzKlotz*. Seelze: Kallmeyer.

Sundermann, Beate & Christoph Selter (2006): *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Sundermann, Beate & Christoph Selter (2006a): Die Würfelbaumeister-Urkunde. In: *Mathematik: Grundschule*. H. 10, S. 36-39.

Verboom, Lilo (2004: Hg.): Üben und entdecken. (Themenheft). *Die Grundschulzeitschrift*. H. 177.

Walther, Gerd, Dietlinde Granzer, Marja van den Heuvel-Panhuizen & Olaf Köller (2008; Hg.): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Walther, Gerd, Christoph Selter & Johanna Neubrand (2008): Die Bildungsstandards Mathematik. In: Gerd Walther u. a. (Hg.): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 15-39.

Winter, Heinrich (1975): Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht? In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* H. 4, S. 106-116.

Wittmann, Erich Ch. & Gerhard N. Müller (2005): *Das Zahlenbuch 3*. Leipzig: Klett.

Wittmann, Erich Ch. & Gerhard N. Müller (2005a): *Blitzrechnen. Basiskurs Zahlen*. Leipzig: Klett.

Wittmann, Erich Ch. & Gerhard N. Müller (2007): *Blitzrechnen 1/2 & 3/4*. CD-ROM. Leipzig: Klett.

Wittmann, Erich Ch. & Gerhard N. Müller (2008): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In: Gerd Walther u. a. (Hg.): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 40-63.