

Ministerium für Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein - Westfalen

Lernaufgaben Mathematik

Grundschule

Zahlen und Operationen – „Entdeckerpäckchen“: Beziehungshaltige Plus- aufgaben untersuchen



Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes
Nordrhein-Westfalen

I. Übersicht: Mathematik

Bereich: Zahlen und Operationen

Lernaufgabe: „Entdeckerpäckchen“ – Erforschung von beziehungshaltigen Aufgabenpäckchen

Bereich des Faches: Zahlen und Operationen

Leitidee:

Auf der Grundlage tragfähiger Zahl- und Operationsvorstellungen sowie verlässlicher Kenntnisse und Fertigkeiten entwickeln und nutzen die Schülerinnen und Schüler Rechenstrategien

Kompetenzerwartung

Kompetenzerwartung

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (**Problemlösen/kreativ sein**)
- erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen und vollziehen Begründungen anderer nach (**Argumentieren**)
- überprüfen ihre Ergebnisse auf ihre Angemessenheit (**Problemlösen/kreativ sein**)
- verwenden bei der Darstellung mathematischer Sachverhalte geeignete Fachbegriffe (**Darstellen/Kommunizieren**)

Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:

- lösen Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 ... (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)
- nutzen Zahlbeziehungen für vorteilhaftes Addieren und Subtrahieren (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)
- entdecken und beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen mit eigenen Worten (Zahlvorstellungen) (**Zahlen und Operationen**)

Inhalt: Aufgabenserien/Gesetz von der Konstanz der Summe

Anforderungsbereiche: Reproduzieren (AB I), Zusammenhänge herstellen (AB II), Verallgemeinern und Reflektieren (AB III)

Lernaufgabe/Lernarrangement: „Entdeckerpäckchen“ – Erforschung von beziehungshaltigen Aufgabenpäckchen

Vertiefung des Wissens:

Erfindung eigener Entdeckerpäckchen zu anderen Vorgaben bezüglich der Ergebnisse

Gesetz von der Konstanz der Differenz bei beziehungshaltigen Serien von Minusaufgaben

Anwendungszusammenhang:

Anwendung des Gesetzes von der Konstanz der Summe beim vorteilhaften Rechnen

Überprüfung der Kompetenzen:

mündliche oder schriftliche Erläuterungen zu einzelnen Überlegungen

Vorhersage von Ergebnisfolgen bei beziehungshaltigen Rechenpäckchen („Wie muss das nächste Ergebnis heißen? Vermute, ohne die Aufgabe auszurechnen.“)

Extern: Vergleichsarbeiten

Erwartete Lernergebnisse:

Die Schülerinnen und Schüler

lösen Additions- und Subtraktionsaufgaben im ZR bis 100 fehlerfrei (AB I)

setzen beziehungshaltige Aufgabenserien richtig fort und erkennen Fehler aufgrund von aufgedeckten Unregelmäßigkeiten in den Ergebnissen (AB II)

prüfen Aussagen zum gegensinnigen Verändern von Summanden auf Richtigkeit (AB II)

nutzen Erkenntnisse über die Zusammenhänge zwischen gegensinnig veränderten Termen und ihren Ergebnissen (Gesetz von der Konstanz der Summe) für die Konstruktion summengleicher Aufgabenserien und geben Tipps zur Vorgehensweise (AB III)

Übergreifende Kompetenzen:

Analysieren und Reflektieren: Schülerinnen und Schüler setzen sich zielgerichtet und systematisch mit strukturierten Aufgabenserien auseinander.

Strukturieren und Darstellen: Schülerinnen und Schüler formulieren aus der Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsinhalt heraus Erkenntnisse bezüglich des Zusammenhangs zwischen strukturierten Aufgabenserien und deren Ergebnissen.

Transferieren und Anwenden: Schülerinnen und Schüler lernen zu beurteilen, ob sich das Gesetz von der Konstanz der Summe z. B. auch auf Minusaufgaben übertragen lässt.

Arbeits- und Sozialverhalten:

Leistungsbereitschaft: Schülerinnen und Schüler erkennen Schwierigkeiten, holen sich Unterstützung ohne frühzeitig aufzugeben.

Selbstständigkeit: Schülerinnen und Schüler arbeiten beim Ausprobieren konzentriert, auch über einen längeren Zeitraum.

setzen sich aktiv mit Problemstellungen auseinander und bringen eigene Lösungsvorschläge und Ideen ein.

Forscherauftrag

Methoden:

Lernen auf individuellen Wegen; Ausprobieren
Unterrichtsgespräch

Sozialform:

Einzelarbeit/Partnerarbeit
Plenum

Material:

2 Arbeitsblätter, 1 Blatt mit Tipps zu Aufgabe 1c

Kenntnisse/Fertigkeiten:

Die Schülerinnen und Schüler

verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim schnellen Kopfrechnen und beim Zahlenrechnen im ZR bis 100

erkennen Zahlbeziehungen und Zahlenfolgen

II. Aufgabenbeispiel

Mathematik

Bereich: Zahlen und Operationen

Klasse: 2/3

Schwerpunkt: Zahlenrechnen

Vorhaben: Entdeckerpäckchen mit Plusaufgaben untersuchen

Titel der Lernaufgabe: „Entdeckerpäckchen“: Beziehungshaltige Plusaufgaben untersuchen

Kompetenzen

Lernvoraussetzungen

Die Schülerinnen und Schüler

- verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim schnellen Kopfrechnen im ZR bis 100
- verfügen über Rechensicherheit beim Zahlenrechnen im ZR bis 100
- erkennen Zahlenfolgen und können diese fortsetzen
- entdecken und beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen

Kompetenzerwartungen

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler

- erfinden Aufgaben und Fragestellungen (variieren und erfinden) (**Problemlösen/kreativ sein**)
- erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen und vollziehen Begründungen anderer nach (begründen) (**Argumentieren**)
- verwenden bei der Darstellung mathematischer Sachverhalte geeignete Fachbegriffe, mathematische Zeichen und Konventionen (Fachsprache verwenden) (**Darstellen/Kommunizieren**)
- nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (lösen) (**Problemlösen/kreativ sein**)
- entwickeln – ausgehend von Beispielen – ansatzweise allgemeine Überlegungen oder vollziehen diese nach (folgern) (**Argumentieren**)

Inhaltsbezogene Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler

- entdecken und beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen (Zahlvorstellungen) (**Zahlen und Operationen**)
- lösen Additionsaufgaben im ZR bis 100 unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)
- nutzen Zahlbeziehungen und Rechengesetze für vorteilhaftes Rechnen (Zahlenrechnen) (**Zahlen und Operationen**)

Übergreifende Kompetenzen

Analysieren und Reflektieren: Die Schülerinnen und Schüler setzen sich zielgerichtet und systematisch mit strukturierten Aufgabenfolgen auseinander.

Strukturieren und Darstellen: Die Schülerinnen und Schüler formulieren aus der Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsinhalt heraus Erkenntnisse bezüglich des Zusammenhangs zwischen strukturierten Aufgabenfolgen und deren Ergebnissen.

Transferieren und Anwenden: Die Schülerinnen und Schüler lernen zu beurteilen, ob sich das Gesetz von der Konstanz der Summe z. B. auch auf Minusaufgaben übertragen lässt.

Sachinformation

„Entdeckerpäckchen“ mit Plusaufgaben bestehen aus kleinen, beziehungshaltigen Serien von zumeist vier bis fünf Rechenaufgaben (strukturierte Aufgabenfolgen), deren Summanden sich in konstanter Weise verändern (gelegentlich bleibt auch einer der beiden Summanden gleich), mit den entsprechenden Auswirkungen auf die Ergebnisse. Hat man zwei oder drei Aufgaben eines Päckchens berechnet und die regelmäßigen Veränderungen in den Ergebnissen erkannt, werden die nachfolgenden Ergebnisse vorhersagbar. Die weiteren Aufgaben im Päckchen müssen nun (eigentlich) nicht mehr einzeln ausgerechnet werden. Von besonderer Bedeutung sind Päckchen mit Plusaufgaben, deren Summanden sich gegensinnig verändern. Hier bleibt das Ergebnis immer gleich (Konstanz der Summe). Nur wenn die Schülerinnen und Schüler diesen Zusammenhang wirklich verstanden haben, ist er ihnen präsent genug, um ihn in anderen Kontexten für ein vorteilhaftes Berechnen von Aufgaben wie $67 + 19 = 66 + 20$ (oder: $67 + 20 - 1$) zu nutzen. Ähnliches gilt für beziehungshaltige Rechenpäckchen mit Minusaufgaben.

Leider wird in der Unterrichtspraxis der mathematische Gehalt der beziehungshaltigen Päckchen oft zu wenig thematisiert. Sie werden als „bunte Tupfer“ auf Übungsseiten eingeschoben und dann in Einzelarbeit ebenso routinemäßig „abgearbeitet“ wie die übrigen Aufgaben. Das hat zur Folge, dass die Ergebnisse – ist die entstandene Zahlenfolge einmal erkannt – recht gedankenlos notiert werden, ohne dass die Beziehungen zwischen Aufgaben und Ergebnissen überhaupt in den Blick genommen, besprochen oder veranschaulicht werden.

Die Aufgabenstellungen zu den „Entdeckerpäckchen mit Plusaufgaben“ im Aufgabenbeispiel sollen Anregungen zu einer aktiveren, durchdachteren Auseinandersetzung mit diesem Aufgabentyp geben. Sie beinhalten Anforderungen auf unterschiedlichem Niveau und können dazu beitragen, eine Reihe allgemeiner (prozessbezogener) Kompetenzen zu fördern.

Anforderungsbereiche

Anforderungsbereiche	Bildungsstandards	Aufgabenbeispiel
AB I: Reproduzieren	Die Schülerinnen und Schüler verfügen über Grundwissen und führen Routinetätigkeiten aus.	Die Schülerinnen und Schüler beherrschen die Grundrechenart Addition und lösen Plusaufgaben im Zahlenraum bis 100 fehlerfrei.
AB II: Zusammenhänge herstellen	Die Schülerinnen und Schüler erkennen und nutzen Zusammenhänge.	<p>Die Schülerinnen und Schüler erkennen strukturierte Aufgabenfolgen („Entdeckerpäckchen“) und setzen diese fort. Sie ordnen die vorliegende Beschreibung dem entsprechenden Entdeckerpäckchen zu.</p> <p>Sie erkennen anhand einer „Störung“ innerhalb des Regelmäßes der Ergebnisse eines Entdeckerpäckchens, welche Aufgabe falsch ausgerechnet wurde.</p> <p>Sie vervollständigen ein Entdeckerpäckchen mit dem gleichbleibenden Ergebnis 100.</p> <p>Sie wählen die richtige Aussage zu den Zahlbeziehungen innerhalb eines Entdeckerpäckchens mit immer gleichem Ergebnis aus.</p>
AB III: Verallgemeinern und Reflektieren	Die Schülerinnen und Schüler führen komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern aus.	Die Schülerinnen und Schüler entwickeln aufgrund erkannter Gesetzmäßigkeiten (Gesetz von der Konstanz der Summe) eine Strategie, um gezielt eine strukturierte Aufgabenfolge mit immer gleichem Ergebnis zu bilden. Sie beschreiben diese Strategie verallgemeinernd.

Ausgestaltung der Lernaufgabe

Entdeckerpäckchen mit Plusaufgaben 

Aufgabe 1:

a) Rechne die 4 Aufgaben in den Päckchen aus. (AB I)

Einige Päckchen kannst du fortsetzen. Trage dort die 5. Aufgabe ein. (AB II)

A	
12 + 20 =	___
13 + 22 =	___
14 + 24 =	___
15 + 26 =	___
___ + ___ =	___

B	
25 + 30 =	___
35 + 25 =	___
45 + 20 =	___
55 + 15 =	___
___ + ___ =	___

C	
30 + 15 =	___
25 + 15 =	___
20 + 15 =	___
15 + 15 =	___
___ + ___ =	___

D	
22 + 33 =	___
24 + 32 =	___
20 + 35 =	___
21 + 30 =	___
___ + ___ =	___

E	
36 + 14 =	___
33 + 12 =	___
30 + 10 =	___
27 + 8 =	___
___ + ___ =	___

b) Charlotte hat sich eins der Päckchen ausgesucht und es so beschrieben:

Die erste Zahl wird immer um 5 kleiner.

Die **zweite Zahl** bleibt immer gleich.

Das **Ergebnis** wird immer um 5 kleiner.

Welches Päckchen ist es? Päckchen ___ (AB II)

c) Suche dir ein anderes Päckchen aus und beschreibe es. (AB II)

Aufgabe 2: (AB II)

Ein Ergebnis ist falsch.

Woran kannst du das sehen? Erkläre.

Du brauchst die einzelnen Aufgaben **nicht** alle **nachzurechnen**!

23 + 69 = 92
28 + 62 = 90
33 + 55 = 88
38 + 48 = 86
43 + 41 = 85
48 + 34 = 82

Aufgabe 3:

- a) Bilde ein Entdeckerpäckchen mit Plusaufgaben, (AB III)
bei dem das **Ergebnis immer gleich bleibt**.
Wie kann man ganz einfach ein Plus-Entdeckerpäckchen (AB III)
mit immer gleichem Ergebnis finden?
Schreibe einen Tipp auf.

! Wichtiger Hinweis: **!**
Wenn du kein Entdeckerpäckchen **mit immer gleichem Ergebnis** findest, mache bei Aufgabe 4 weiter.

Aufgabe 4:

- a) Rechne und setze die Päckchen fort.(AB I)

$$\begin{array}{ll} 30 + 20 = _ & 55 + 40 = _ \\ 31 + 19 = _ & 50 + 45 = _ \\ 32 + 18 = _ & 45 + 50 = _ \\ _ + _ = _ & _ + _ = _ \\ _ + _ = _ & _ + _ = _ \end{array}$$

- b) Mache aus diesem Päckchen ein Entdeckerpäckchen. (AB II)
Das **Ergebnis** soll **immer gleich** bleiben!

$$\begin{array}{l} 66 + 34 = 100 \\ 68 + _ = 100 \\ 70 + _ = _ \\ 72 + _ = _ \\ _ + _ = _ \end{array}$$

Was ist richtig? Kreuze an. (AB II)

Für das Entdeckerpäckchen **mit immer gleichem Ergebnis** (Aufgabe 4b) gilt:

<input type="checkbox"/>	Wenn die erste Zahl immer <u>um 2 größer wird</u> , dann wird die zweite Zahl immer <u>um 1 kleiner</u> .
<input type="checkbox"/>	Wenn die erste Zahl immer <u>um 2 größer</u> wird, dann wird die zweite Zahl immer <u>um 2 kleiner</u> .
<input type="checkbox"/>	Wenn die erste Zahl immer <u>um 2 größer</u> wird, dann wird die zweite Zahl auch immer <u>um 2 größer</u> .

Tipp-Karte

Schau dir die einzelnen Aufgaben in den Päckchen immer genau an.

Was passiert immer mit der **ersten Zahl**?

Was passiert immer mit der **zweiten Zahl**?

Was passiert immer mit dem **Ergebnis**?

Beispiel: Aufgabe 1a

die erste Zahl		die zweite Zahl		das Ergebnis
12	+	20	=	_____
13	+	22	=	_____
14	+	24	=	_____

Diese Ausdrücke können dir bei der Beschreibung **deines** Päckchens helfen:

wird immer um
_____ größer.

wird immer um
_____ kleiner

bleibt immer gleich

Erwartete Lernergebnisse

Die Schülerinnen und Schüler lösen strukturierte Aufgabenfolgen und setzen diese fort.

Sie untersuchen Entdeckerpäckchen und beschreiben sie schriftlich.

Sie ordnen Beschreibungen von Entdeckerpäckchen den entsprechenden Aufgabenfolgen zu.

Sie kontrollieren die Ergebnisse eines Entdeckerpäckchens anhand der Beziehungen zwischen den Ergebniszahlen.

Sie versuchen ein Entdeckerpäckchen mit immer gleichem Ergebnis zu finden und halten ihre Vorgehensweise in Form eines Tipps fest. Schülerinnen und Schüler, die zu keiner Lösung kommen, können Hilfen nutzen und aus verschiedenen Aussagen zu den Zahlbeziehungen in einem Entdeckerpäckchen mit immer gleichem Ergebnis auswählen.

Hinweise zum Unterricht

In der Regel kennen die Kinder „Entdeckerpäckchen“. Sie werden in Schulbüchern unterschiedlich bezeichnet, z. B. als „schöne Päckchen“, „starke Päckchen“ oder „super Päckchen“.

Sollte den Kindern dieses Aufgabenformat nicht bekannt sein, kann z. B. zur Einführung an der Tafel die Überschrift „Entdeckerpäckchen“ – unterstützt durch das Logo „Lupe“ (🔍) – notiert und zwei Rechenpäckchen – das eine strukturiert, das andere unstrukturiert – gegenüber gestellt werden. Impuls: „Welches der beiden Päckchen ist wohl ein Entdeckerpäckchen? Warum?“ Die Äußerungen der Kinder können sehr unterschiedlich ausfallen; manche wissen zunächst noch nicht, „wie“ sie schauen müssen, um Zusammenhänge zu erkennen. Als Hilfe können die ersten Summanden, die zweiten Summanden und die Ergebniszahlen jeweils in unterschiedlichen Farben markiert werden. Die Kinder werden unterschiedliche Bezeichnungen für die jeweiligen Positionen und die Veränderungen der Zahlen finden, z. B.: „Die Zahlen da vorne“, „die hinteren Zahlen“, „da kommt immer 2 mehr“, „da wird immer 2 weniger“, „das geht in Zweierschritten“, „das geht nach der Reihe“ usw.

Die Bezeichnungen „erste Zahl“, „zweite Zahl“, „das Ergebnis“, „wird um ... größer/kleiner“, „bleibt gleich“ können als Alternative eingeführt werden.

Die Aufgaben auf den Arbeitsblättern können in Einzel- oder in Partnerarbeit bearbeitet werden. Voraussetzung ist, dass die Kinder über genügend Rechensicherheit verfügen, um die Aufgaben möglichst fehlerfrei zu lösen. Bei fehlerhaften Lösungen können keine Regelmäßigkeiten in den Ergebnissen entdeckt werden.

Zur Lösung der **Aufgabe 1c** können sich die Kinder am Beispiel von Aufgabe 1b orientieren oder sich Anregungen von der Tipp-Karte holen. Im Anschluss an die Aufgabenbearbeitung sollten einzelne Kinder ihre Beschreibung ihren Mitschülerinnen und Mitschülern als weitere „Rätsel“ stellen: „Welches Päckchen habe ich beschrieben?“

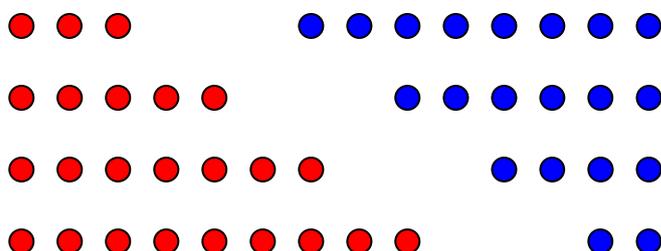
In **Aufgabe 2** wird das Erkennen von Zahlbeziehungen als Ergebniskontrolle genutzt. Die Kinder sollten also die einzelnen Aufgaben möglichst nicht nachrechnen, sondern die Ergebnisse untersuchen: An welcher Stelle wird das regelmäßige Muster in den Ergebnissen unterbrochen? Hier muss fehlerhaft gerechnet worden sein. Die Aufgabe dient dazu, den Kindern diese Form der Ergebniskontrolle in Entdeckerpäckchen bewusst zu machen.

Aufgabe 3 ist eine komplexe Aufgabenstellung: Die Kinder sollen sich ein Entdeckerpäckchen ausdenken, dessen Ergebnisse eine bestimmte Vorschrift erfüllen müssen. Für manche Kinder ist es hilfreich, ihnen zunächst eine „Startaufgabe“ anzubieten, z. B. $50 + 30$. Nicht alle Kinder werden vorausschauend das Gesetz von der Konstanz der Summe anwenden, sondern eher ausprobierend an die Aufgabenlösung herangehen. Erst die selbstständige Formulierung eines Tipps (Aufgabe 3b) kann verdeutlichen, welche Vorgehensweise die Kinder gewählt haben und ob ihnen der mathematische Zusammenhang bewusst ist.

Sollten die Kinder zu keiner Lösung gelangen, können sie mit **Aufgabe 4** eine Lernschleife durchlaufen: Zunächst sollen sie zwei Entdeckerpäckchen mit immer gleichem Ergebnis fortsetzen, um sodann in Aufgabe 4b die begonnenen Aufgaben zu einem Päckchen mit dem Ergebnis 100 zu ergänzen. Während für den ersten Summanden die Zahlenfolge leicht fortzusetzen ist, können die zweiten Summanden zunächst durch Ergänzen zur 100 ermittelt und später auch durch das Nutzen der erkannten Regel (immer minus 2) gefunden werden. Bei der Auswahl der richtigen Aussage in Aufgabe 1b können die Kinder zeigen, ob sie den Zusammenhang zwischen der jeweils ersten und zweiten Zahl im Päckchen erkannt haben.

Unter Umständen sollten sich die Kinder das Gesetz von der Konstanz der Summe mit Plättchen veranschaulichen. Dazu wird eine Aufgabe mit kleinen Zahlen gewählt, wie z. B.:

3	+	8	=	11
5	+	—	=	—
7	+	—	=	—
9	+	—	=	—



Es werden immer 2 rote Plättchen hinzugefügt.
Wie viele blaue Plättchen müssen immer (hinzugefügt oder) weggenommen werden, damit die gleiche Anzahl an Plättchen (hier: 11) erhalten bleibt?

Interessant wäre, ob nun alle Kinder ein eigenes Entdeckerpäckchen mit immer gleichem Ergebnis bilden können.

Vertiefung des Wissens:

Zur Vertiefung können sich die Kinder Entdeckerpäckchen mit anderen Vorschriften für das Ergebnis ausdenken, z. B.:

- Das Ergebnis soll immer um 1 größer werden.
- Das Ergebnis soll immer um 2 kleiner werden.

Das Betrachten von Beziehungen zwischen Aufgaben und ihren Ergebnissen wird beim beziehungshaltigen Üben immer wieder an verschiedensten Aufgabenformaten aufgegriffen.

Material

- 2 Arbeitsblätter mit insgesamt 5 Aufgaben
- 1 Tippkarte zu Aufgabe 1c