Ministerium für Schule und Weiterbildung
des Landes Nordrhein - Westfalen

Beispiele zu prozessbezogenen Aufgabenstellungen

Mathematik

Ministerium für
Schule und Weiterbildung
des Landes
Nordrhein-Westfalen

Beispiele zu prozessbezogenen Aufgabenstellungen

Einführungstext

Prozessbezogene Kompetenzen werden „in der aktiven Auseinandersetzung mit konkreten Lerninhalten, also unter Nutzung inhaltsbezogener Kompetenzen, erworben und weiterentwickelt“ (Lehrplan, S. 56).

Ihre Entwicklung ist „eine systematisch zu verfolgende, langfristige Aufgabe des Mathematikunterrichts“ (vgl. Walther/Selter/Neubrand, Die Bildungsstandards Mathematik, in: Walther/van den Heuvel-Panhuizen/Granzer/Köller (Hrsg.), Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret, Berlin 2008, S. 38f). Da die prozessbezogenen Kompetenzen „auf unterschiedliche Weise miteinander verwoben sind“ (a. a. O., S. 32), ist es in der Regel nicht möglich, eine Aufgabenstellung ausschließlich *einem* Kompetenzbereich zuzuordnen:

- Beinhaltet eine Sachsituation eine Problemstellung, ist das Modellieren eng mit dem Problemlösen verwoben.
- Bei zahlreichen Aufgabenstellungen tauschen die Kinder Argumente im Rahmen von Rechenkonferenzen aus. Dabei ist eine Förderung des Argumentierens nicht von der des Kommunizierens zu trennen.

Diese dichte Vernetzung wird in dem Aufgabenbeispiel 1 sehr deutlich. Gleichwohl wird in den beiden folgenden Aufgabenbeispielen 2 und 3 versucht, durch die Formulierung einer Grundaufgabe mit nachfolgenden Teilaufgaben (Beispiel 2) oder durch Variation der Aufgabenstellung (Beispiel 3) jeweils eine prozessbezogene Kompetenz stärker zu gewichten. So soll deutlich werden, dass bei gleichem Sachverhalt durch Nuancierungen der Aufgabenstellungen Akzentverschiebungen bezüglich der Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen möglich sind.

Aufgabenbeispiel 1:

Bereich: Zahlen und Operationen **Klasse: 2**

Schwerpunkt: Zahlenrechnen

Vorhaben: Lösen von zwei linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen

Titel der Lernaufgabe: Denkaufgabe: Wie viele Dreiecke und Vierecke sind es?

Sachinformation

Bei diesem Aufgabenbeispiel handelt es sich um eine in einen Text eingekleidete Denk- bzw. Knobelaufgabe.

Grundschulkinder sind zwar noch nicht in der Lage, zwei lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen mittels Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren oder Additions- bzw. Subtraktionsverfahren zu lösen. Dennoch können sie solche Aufgabenstellungen, wenn sie in eine passende kleine Rahmengeschichte eingebettet sind, durch zielorientiertes, zunehmend systematisches Probieren lösen.

Da es sich nicht um eine Sachsituation handelt, die der Umwelterschließung dient oder zur Alltagsbewältigung beiträgt (vgl. Franke, Didaktik des Sachrechnens, Heidelberg, Berlin 2003, S. 25), ist das Aufgabenbeispiel nicht dem Schwerpunkt „Sachsituationen“ des inhaltsbezogenen Kompetenzbereiches „Größen und Messen“, sondern dem Schwerpunkt „Zahlenrechnen“ des Bereiches „Zahlen und Operationen“ zuzuordnen.

Lernvoraussetzungen

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen die Eigenschaften von Dreiecken, Vierecken, … (Anzahl der Ecken)
- kennen Zeichnungen und Tabellen als Bearbeitungshilfen zur Lösung von Aufgaben

Aufgabenstellung

Auf Tonis Tisch liegen 13 Plättchen. Es sind Dreiecke und Vierecke.

Er zählt insgesamt 45 Ecken.

Wie viele Dreiecke und wie viele Vierecke liegen auf seinem Tisch?

Stelle deinen Lösungsweg so dar, dass die anderen Kinder ihn verstehen können.

Kompetenzen

Beim Lösen einer solchen Denkaufgabe zeigt sich, dass die prozessbezogenen Kompetenzen auf vielfältige Weise miteinander verwoben sind (vgl. Walther/Selter/-Neubrand, Die Bildungsstandards Mathematik, in: Walther/van den Heuvel-Panhuizen/Granzer/Köller (Hrsg.), Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret, Berlin 2008, S. 32):

Wenn eine solche Denkaufgabe erstmalig vorgelegt wird und die Kinder infolgedessen nicht auf bekannte Lösungsstrategien zurückgreifen können, müssen sie zunächst der Aufgabe die für die Lösung relevanten Informationen entnehmen (Problemlösen: erschließen).

Beim Lösen der Aufgabe stellen die Kinder Vermutungen über mathematische Zusammenhänge an (Argumentieren: vermuten), testen ihre Vermutungen anhand eines oder mehrerer Beispiele (Argumentieren: überprüfen), bestätigen oder widerlegen ihre Vermutungen (Argumentieren: folgern) und gehen dann anschließend bei der Lösung systematisch und zielorientiert vor (Problemlösen: lösen).

Im Bedarfsfall nutzen sie Dreiecke und Vierecke zum handelnden Lösen. Um ihren Lösungsweg für sich und andere nachvollziehbar festzuhalten, fertigen sie Zeichnungen oder Tabellen an (Darstellen / Kommunizieren: präsentieren und austauschen).

Schließlich überprüfen sie ihr Ergebnis auf Angemessenheit (Problemlösen: reflektieren und überprüfen).

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen

Bereich: Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- entnehmen Problemstellungen die für die Lösung relevanten Informationen und geben Problemstellungen in eigenen Worten wieder (erschließen)
- probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (lösen)
- überprüfen Ergebnisse auf ihre Angemessenheit, finden und korrigieren Fehler, vergleichen und bewerten verschiedene Lösungswege (reflektieren und überprüfen)

Bereich: Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge oder Auffälligkeiten an (vermuten)
- testen Vermutungen anhand von Beispielen und hinterfragen, ob ihre Vermutungen, Lösungen, Aussagen etc. zutreffend sind (überprüfen)
- bestätigen oder widerlegen ihre Vermutungen anhand von Beispielen und entwickeln – ausgehend von Beispielen – ansatzweise allgemeine Überlegungen oder vollziehen diese nach (folgern)

Bereich: Darstellen / Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- entwickeln und nutzen für die Präsentation ihrer Lösungswege, Ideen und Ergebnisse geeignete Darstellungsformen und Präsentationsmedien wie *Folie* oder *Plakat* und stellen sie nachvollziehbar dar (z. B. *im Rahmen von Rechenkonferenzen*) (präsentieren und austauschen)

Erwartete Aktivitäten

Die Lösung kann auf **enaktiver Ebene** unter Zuhilfenahme der bereitgestellten dreieckigen und viereckigen Plättchen erfolgen.

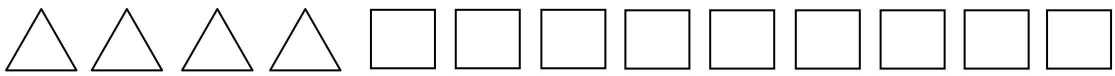
Eine mögliche Vorgehensweise besteht darin, die Zahl 13 beliebig zu zerlegen (Beispiel: $13 = 4 + 9$) und dieser Zerlegung entsprechend Dreiecke und Vierecke (im Beispiel: 4 Dreiecke und 9 Vierecke) hinzulegen und die Gesamteckenzahl zu ermitteln (im Beispiel: 48). Um eine Gesamteckenzahl von 45 erreichen zu können, sind dann entweder schrittweise oder, wenn der Strukturzusammenhang erkannt wird, in einem Schritt 3 Vierecke jeweils durch ein Dreieck zu ersetzen.

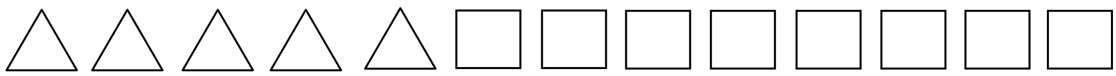
Möglich wäre es auch, zunächst ausschließlich 13 Dreiecke hinzulegen und die Gesamteckenzahl zu bestimmen ($= 39$). Um eine Gesamteckenzahl von 45 erreichen zu können, sind dann entweder schrittweise oder, wenn der Strukturzusammenhang erkannt wird, in einem Schritt 7 Vierecke jeweils durch ein Dreieck zu ersetzen.

Der Lösungsweg kann dann zeichnerisch und/oder symbolisch (z. B. Tabellenform) festgehalten werden.

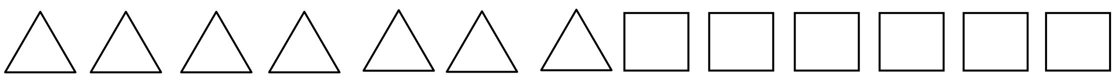
Natürlich ist ein Lösungsweg auch ohne Rückgriff auf konkretes Material möglich. Die Lösung kann dann auf **ikonischer** oder **symbolischer Ebene** in analoger Form wie oben beschrieben erfolgen.

Das Legen und Austauschen der Plättchen kann **zeichnerisch** z. B. wie folgt festgehalten werden:


48 Ecken


47 Ecken

…….


45 Ecken

Der Lösungsweg kann in **Tabellenform** z. B. wie folgt aussehen:

Dreiecke	Vierecke	Ecken
10	3	42
9	4	43
…	…	…
7	6	45

Natürlich ist eine Notation auf symbolischer Ebene auch wie folgt denkbar:

$10 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 42$

$9 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 43$

…………

$7 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 45$

Hinweise zum Unterricht

Bei diesem Aufgabenbeispiel kann es den Kindern grundsätzlich freigestellt werden, ob sie die Aufgabe allein oder mit einer Partnerin bzw. mit einem Partner oder in einer Kleingruppe lösen möchten. Bei Partner- und Gruppenarbeit wäre dann noch bei den prozessbezogenen Kompetenzen aus dem Bereich „Darstellen / Kommunizieren“ die Kompetenzerwartung „kooperieren und kommunizieren“ hinzuzufügen.

Material:

dreieckige und viereckige Plättchen

Mögliche Variationen der Aufgabenstellungen sind z. B.:

Variation 1:

Auf Berts Tisch liegen Dreiecke und auf Ulis Tisch liegen Fünfecke.

Ihre Plättchen haben insgesamt 45 Ecken.

Bert stellt fest: „Deine Plättchen haben **doppelt so viel Ecken** wie meine.“

Wie viel Dreiecke hat Bert?

Stelle deinen Lösungsweg so dar, dass die anderen Kinder ihn verstehen können.

Lösung: Bert hat 5 Dreiecke. (**5** · 3 = **15** und 6 · 5 = **30, 15 + 30 = 45**)

Variation 2:

Auf Susis Tisch liegen Dreiecke und auf Toms Tisch liegen Fünfecke.

Ihre Plättchen haben insgesamt 66 Ecken.

Susi stellt fest: „Ich habe **doppelt so viel Plättchen** wie du.“

Wie viel Dreiecke hat Susi?

Stelle deinen Lösungsweg so dar, dass die anderen Kinder ihn verstehen können.

Lösung: Susi hat 12 Dreiecke. (**12** · 3 = **36** und 6 · 5 = **30, 36 + 30 = 66**)

Aufgabenbeispiel 2:

Bereich: Zahlen und Operationen **Klasse: 3**

Schwerpunkt: Zahlenrechnen

Vorhaben: Beziehungsreiches Üben des kleinen Einmaleins

Titel der Lernaufgabe: Mal-Plus-Haus

Sachinformation

Das Mal-Plus-Haus ist ein Aufgabenformat, das vielfältige Möglichkeiten bietet, das kleine Einmaleins beziehungsreich zu üben. Die unterschiedlichen Aufgabenstellungen fordern zur Erforschung multiplikativer Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten heraus. Die operative Durcharbeitung der Zahlensätze des kleinen Einmaleins, die Anwendung von Zerlegungsstrategien und die Vertiefung des Distributivgesetzes [$a \cdot b + b \cdot c = (a + c) \cdot b$] stehen im Vordergrund. Ein sicheres Verständnis multiplikativer Beziehungen ist Grundlage für die Entwicklung vorteilhafter Rechenstrategien beim halbschriftlichen Multiplizieren und Dividieren.

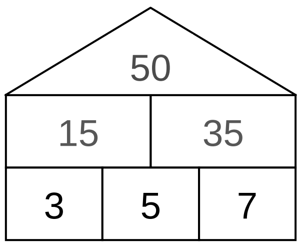
Das Mal-Plus-Haus erinnert in seiner Struktur an die Zahlenmauern, allerdings werden neben additiven vor allem auch multiplikative Operationen verlangt.

So wird ein Mal-Plus-Haus aufgebaut:

Dach

erster Stock

Erdgeschoss



$15 + 35 = 50$

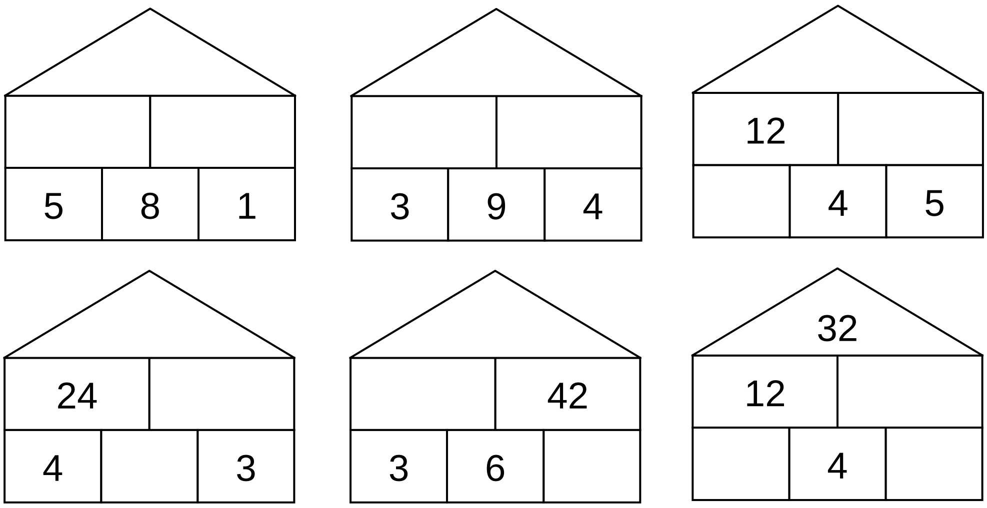
$3 \cdot 5 = 15$ $5 \cdot 7 = 35$

Im **Erdgeschoss** dürfen nur **Zahlen von 1 bis 9** stehen!

Lernvoraussetzungen

Die Schülerinnen und Schüler kennen

- das Aufgabenformat „Mal-Plus-Haus“ und haben bereits Aufgabenstellungen wie die folgenden gelöst:



- geben die Zahlensätze des kleinen Einmaleins weitgehend automatisiert wieder und leiten deren Umkehrungen sicher ab
- kennen und nutzen das Distributivgesetz und Zerlegungsstrategien bei der Lösung von Aufgaben des kleinen Einmaleins (z. B. Nutzen der Kernaufgaben)
- verfügen über Rechenfertigkeiten beim Addieren und Subtrahieren zweistelliger Zahlen

Aufgabenstellungen mit unterschiedlichen prozessbezogenen Kompetenzbereichen und Schwerpunkten

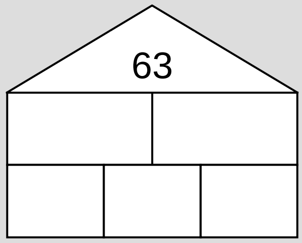
Als Grundaufgabe wird den Kindern die folgende zweiteilige Aufgabe zum Mal-Plus-Haus gestellt (Aufgabe 1 und 2). Es geht zunächst um die Problemstellung, Mal-Plus-Häuser zur Dachzahl 63 zu finden. Durch weitere Aufgabenstellungen (3 bis 9) werden neben der prozessbezogenen Kompetenz Problemlösen auch andere prozessbezogene Bereiche angesprochen. Die Teilaufgaben sind jeweils auf ganz bestimmte Schwerpunkte „zugespitzt“ formuliert.

Die Aufgaben sind unterschiedlich schwierig; zum Teil bauen sie aufeinander auf und ermöglichen die Anwendung oder den Transfer von Erkenntnissen oder von Vorgehensweisen. Die Lehrkraft wird entscheiden, welchen Kindern sie welche Teilaufgaben zumuten kann.

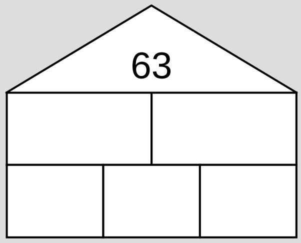
Grundaufgabe

Ein Mal-Plus-Haus zum Knobeln

1. Setze passende Zahlen ein.



Finde auch noch eine zweite Möglichkeit.



2. Wie viele Mal-Plus-Häuser mit der Dachzahl 63 gibt es?

Kompetenzen

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen

Bereich: Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- probieren zunehmend systematisch und zielorientiert (Aufgabe 1)
- nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zum Problemlösen (Aufgabe 2)

Erwartete Aktivitäten

Für die Lösung dieser Problemstellung (1) sind verschiedene Vorgehensweisen denkbar:

a) Die Schülerinnen und Schüler setzen unten beliebige Zahlen ein und erhöhen oder verringern einzelne Zahlen – je nachdem, wie weit ihr Ergebnis von der Dachzahl 63 entfernt ist. Sie probieren nur sehr eingeschränkt systematisch.

   Für das zweite Haus werden sie vermutlich die Mittelzahl aus dem ersten Haus übernehmen; möglicherweise setzen sie aber auch wieder von Neuem Zahlen zunächst beliebig ein.

b) Die Dachzahl 63 legt nahe, dass ein Faktor entweder aus der Neuner- oder aus der Siebenerreihe sein muss. Die Schülerinnen und Schüler setzen Zahlen aus diesen Einmaleinsreihen versuchsweise in ein Feld unten ein und probieren zielgerichtet die beiden fehlenden Faktoren zu finden.

c) Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Zahl im mittleren Feld aus der Neuner- oder aus der Siebenerreihe sein muss und setzen entsprechend eine 7 oder eine 9 direkt in das mittlere Feld ein. Die beiden anderen Faktoren finden sie durch Probieren. Haben sie den Zusammenhang zwischen der Dachzahl und den 3 unteren Zahlen erkannt, können sie die beiden fehlenden Zahlen unten durch Zerlegen finden: Ist die mittlere Zahl z. B. die 9, dann müssen die beiden anderen Zahlen unten sich aus der Zerlegung der 7 ergeben (z. B. 3 und 4). So lässt sich auch das zweite Mal-Plus-Haus schnell durch eine andere Zerlegung der 7 finden (z. B. 2 und 5).

d) In der Regel beginnen die Schülerinnen und Schüler von unten. Man kann aber auch schnell und zielgerichtet zu einer Lösung gelangen, indem man die 63 in zwei Zahlen aus der Neunerreihe oder aus der Siebenerreihe zerlegt und dann für die mittlere Zahl entsprechend die 9 oder die 7 wählt. Diese Vorgehensweise setzt die Erkenntnis der mathematischen Struktur des Mal-Plus-Hauses voraus. Das zweite Haus kann dann durch eine andere Zerlegung der Dachzahl gefunden werden.

Nur wenn die Kinder die Zahlbeziehungen im Mal-Plus-Haus erkannt und die Lösungswege c) oder d) entwickelt haben, sind sie in der Lage, durch zielleitendes Überlegen herauszufinden, wie viele Mal-Plus-Häuser mit der Dachzahl 63 es gibt (Aufgabenstellung 2). In der Mitte kann nur eine 7 oder 9 stehen. Zur 7 gibt es acht Möglichkeiten für die beiden äußeren Faktoren, zur 9 sechs Möglichleiten.

Meist werden die Kinder ihre Vorgehensweisen variieren und immer wieder zwischen konkretem Ausprobieren und allgemeinen Überlegungen wechseln.

Hinweise zum Unterricht

Die Aufgabenstellung kann auf einem Arbeitsblatt oder aber auch als Tafelanschrift erfolgen. Es sollte deutlich herausgestellt werden, dass es sich um eine Knobelaufgabe handelt, bei der möglicherweise viel probiert werden muss.

Zum Ausprobieren sollte ein Arbeitsblatt mit vielen Leerformaten zu den Mal-Plus-Häusern zur Verfügung gestellt werden.

Als Sozialformen bieten sich Einzelarbeit oder Partnerarbeit an. Einzelarbeit hat den Vorteil, dass jedes Kind seine individuelle Vorgehensweise entwickeln und verfolgen kann; bei Partnerarbeit fördert das gemeinsame Überlegen ggf. ein stärker vorausschauendes Vorgehen.

Sollten die Kinder keine wirklichen Probierstrategien entwickeln und immer wieder willkürlich Möglichkeiten ausprobieren, sollten ihnen individuelle Hinweise und Hilfen gegeben werden.

Material

Arbeitsblatt mit Aufgabenstellung oder Tafelanschrift

Arbeitsblatt mit Leerformaten

Teilaufgabe (1)

3. Schreibe auf, wie du alle Mal-Plus-Häuser mit der Dachzahl 63 finden kannst. 4. Vergleiche: Sind andere Kinder bei der Lösung der Aufgabe 1 ähnlich vorgegangen wie du?

Kompetenzen

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen ***Bereich: Darstellen / Kommunizieren*** Die Schülerinnen und Schüler - halten ihre Arbeitsergebnisse, Vorgehensweisen und Lernerfahrungen fest (dokumentieren (Aufgabe 3) und - stellen ihre Lösungswege, Ideen und Ergebnisse nachvollziehbar dar (präsentieren und austauschen) (Aufgabe 4)

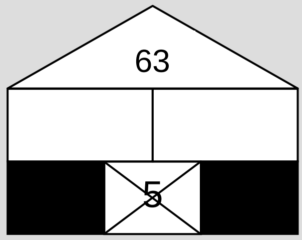
Hinweise zum Unterricht

Für das schriftliche Formulieren der Überlegungen und Vorgehensweisen sollte den Schülerinnen und Schülern viel Zeit eingeräumt werden. Allerdings werden längst nicht alle Kinder in der Lage sein, ihre Vorgehensweise in Worte zu fassen. Ihnen sollte die Möglichkeit zu mündlichen Erklärungen gegeben werden. Wenn sie die Gelegenheit erhalten, zwei oder drei anderen Kindern ihre Überlegungen mitzuteilen, trainieren sie automatisch das nachvollziehbare Vortragen bzw. Präsentieren.

Der Austausch über die Überlegungen oder Vorgehensweisen bei Aufgabe 4 sollte in kleinen Gruppen erfolgen, möglichst in der methodischen Rahmung einer Rechen- oder Mathekonferenz, da diese den Austausch stärker strukturiert.

Teilaufgabe (2)

Du brauchst dieses Haus nicht auszurechnen!



5. Überlege: Warum kann hier die mittlere Zahl im Erdgeschoss **auf keinen Fall** eine **5** sein?

Kompetenzen

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen
Bereich: Argumentieren
Die Schülerinnen und Schüler
- erklären Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen (begründen)

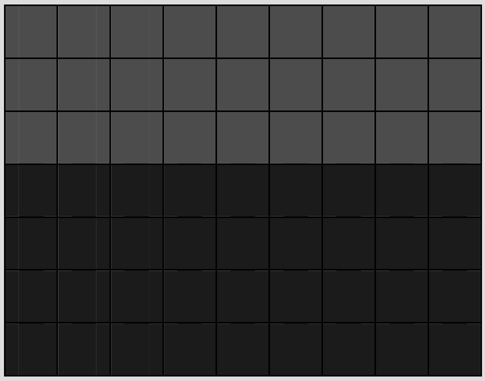
Erwartete Aktivitäten

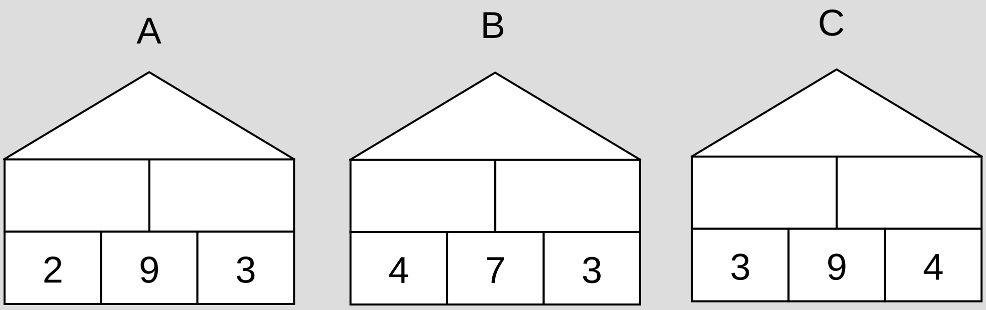
Möglicherweise werden die Schülerinnen und Schüler zunächst einmal einige Häuser mit dem mittleren Faktor 5 ausrechnen wollen, um Vorstellungen zu den möglichen Dachzahlen aufzubauen. Sie erkennen, dass die Summe zweier Zahlen aus der Fünferreihe in der Einerstelle immer eine 5 oder eine 0 haben.

Wenn sie die Beziehung zwischen der Dachzahl und dem mittleren Faktor erkannt haben, werden sie auch argumentieren, dass die 63 nicht durch die 5 geteilt werden kann oder dass es keine Malaufgabe mit dem Faktor 5 gibt, bei der 63 herauskommt.

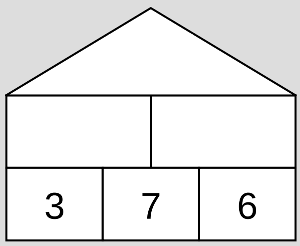
Teilaufgabe (3)

6. Zu welchem Haus passt die Darstellung des Rechteckfeldes?





7. Zeichne ein passendes Rechteckfeld zu diesem Mal-Plus-Haus.



Kompetenzen

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen

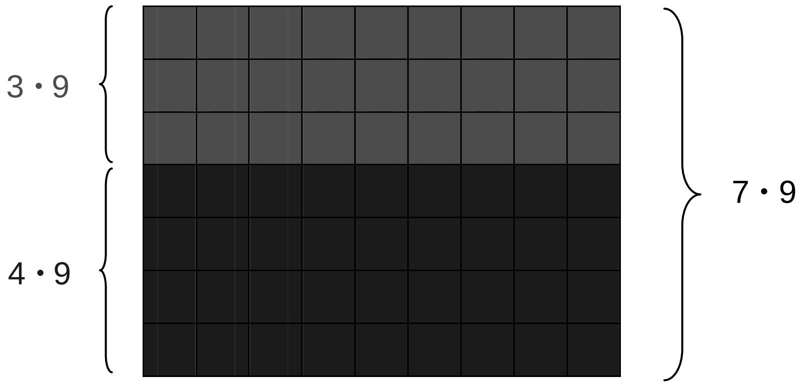
Bereich: Darstellen

Die Schülerinnen und Schüler

- übertragen eine Darstellungsform in eine andere

Hinweise zum Unterricht

Die Rechteckfelder sind ein geeignetes Material zur Veranschaulichung des Distributivgesetzes. Sollten sie nicht bekannt sein, kann der Sachverhalt auch am Punktefeld gezeigt werden. Für Schülerinnen und Schüler, denen der Umgang mit diesem didaktischen Material vertraut ist, kann es durchaus ausreichen, lediglich die Felddarstellung wie in der Aufgabenstellung abzubilden. Andernfalls können gestaffelte Hilfen wie z. B. die Angabe der entsprechenden Malaufgaben angeboten werden.



Die Lehrkraft wird entscheiden, welche zusätzlichen Hilfen sie dieser Rechteckdarstellung hinzufügt.

Teilaufgabe (4)

8. **Die Dachzahl ist 18.**
   Welche Zahlen können wohl unten in der Mitte stehen?

   Vermute zuerst.

   Überprüfe dann, ob deine Vermutungen stimmen, indem du einzelne Häuser ausrechnest.

Kompetenzen

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen

Bereich: Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge an (vermuten)
- testen Vermutungen anhand von Beispielen und hinterfragen, ob ihre Vermutungen zutreffend sind.

Erwartete Aktivitäten

Diese Teilaufgabe kann nur dann sinnvoll von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden, wenn sie die mathematischen Zusammenhänge innerhalb des Mal-Plus-Hauses erfasst haben. Bei gesicherter Erkenntnis werden die Kinder zielgerichtet nach allen Teilern von 18 suchen und diese bei ihrer Vermutung angeben. Andernfalls werden sie ggf. lediglich einige Zahlen vermuten, z. B. die 2 oder die 6.

Hinweise zum Unterricht

Die Schülerinnen und Schüler sollten ihre vermuteten Zahlen auf einem Zettel festhalten. Während sie ihre Vermutung überprüfen, indem sie passende Häuser mit der Dachzahl 18 suchen, sollte sich die Lehrkraft von einzelnen Kindern deren Vermutung begründen lassen. So erfährt sie viel über das mathematische Verständnis der einzelnen Schülerinnen und Schüler.

Teilaufgabe (5)

> 9. **Die Dachzahl soll eine ungerade Zahl sein.**
>
>   Vermute: Was für Zahlen (gerade, ungerade) müssen unten stehen?
>
>   Überprüfe dann, ob deine Vermutung stimmt, indem du einige Häuser mit deinen Zahlen ausrechnest.

Kompetenzen

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen

Bereich: Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge an (vermuten)
- bestätigen oder widerlegen ihre Vermutungen anhand von Beispielen und entwickeln – ausgehend von Beispielen – ansatzweise allgemeine Überlegungen (folgern)

Hinweise zum Unterricht

Die Schülerinnen und Schüler verfahren ähnlich wie in Teilaufgabe 4. Es ist nicht davon auszugehen, dass sie alle Möglichkeiten systematisch bedenken. Ggf. brauchen die Kinder Unterstützung bei der Notation ihrer Vermutung, z. B.:

u - u - u

g - g - u

u - u - g usw.

Aufgabenbeispiel 3:

Bereich: Größen und Messen **Klasse: 4**

Schwerpunkt: Größenvorstellung und Umgang mit Größen

Vorhaben: Rechnen mit Geldbeträgen

Titel der Lernaufgabe: Beim Italiener

Sachinformation

Der Umgang mit Größen erfordert in der Regel arithmetische Fertigkeiten und Fähigkeiten wie überschlagendes Rechnen, Nutzen von Zahlbeziehungen und Rechengesetzen. Von daher ist die enge Verknüpfung mit Inhalten aus dem Bereich „Zahlen und Operationen“ gegeben.

Die Anreicherung von Aufgabenstellungen zum Rechnen mit Größen mit kombinatorischen Akzenten macht Sinn, denn: „Kombinatorische Fragestellungen bieten auch in der Grundschule eine ganze Reihe von Möglichkeiten für Kinder, um über spielerische Handlungen Lösungsstrategien zu erproben und propädeutisch grundlegende mathematische Begriffe und Beziehungen anzubahnen, die oft in enger Verbindung stehen zu arithmetischen und geometrischen Themen.“ (Radatz, H./Schipper, W/-Dröge, R./Ebeling, A.: Handbuch für den Mathematikunterricht. 3. Schuljahr. Hannover: Schroedel Verlag, 1999, S. 117).

Über solche Fragestellungen werden zudem das systematische (Aus-)Zählen und die Entwicklung von sinnvollen Zählstrategien gefördert. Erfahrungen mit Darstellungsstrukturen (z. B. Baumdiagramm) werden angebahnt.

Aufgabenstellungen mit unterschiedlichen prozessbezogenen Schwerpunkten

Lernvoraussetzungen

Die Schülerinnen und Schüler kennen

- die Situation „Im Restaurant essen“
- die Begriffe Vorspeise, Hauptgericht, Dessert
- kombinatorische Fragestellungen
- Tabellendarstellungen

Als Grundsituation aus der Erfahrungswelt der Kinder wird vorgegeben:

Lena geht mit ihren Eltern essen. Alle drei nehmen eine Vorspeise, ein Hauptgericht und ein Dessert.

Zu dieser Grundsituation werden vier Aufgaben gestellt, die jeweils eine prozessbezogene Kompetenz besonders berücksichtigen. Das bedeutet nicht, dass nicht auch andere Prozesskompetenzen angesprochen werden. Eine klare Trennung ist in der Regel aber nicht möglich, weil beim Lösen von Aufgaben in der Regel auf mehrere prozessbezogene Kompetenzen zurückgegriffen wird.

Die vier Aufgabenvariationen sollen daher nur zeigen, wie durch unterschiedliche Schwerpunktsetzung innerhalb einer Grundsituation eine bestimmte Prozesskompetenz besonders angesprochen werden kann.

Durch Veränderung der in den Aufgabenstellungen genannten Geldbeträge lassen sich Lösungsaufwand und Lösungsanspruch der einzelnen Aufgabenstellungen verändern.

Komplexere Grundsituationen regen immer Fragestellungen an, die über die vorgegebenen Aufgaben hinaus weitere Arbeitsfelder eröffnen. So können sich in der beschriebenen Grundsituation weitere (interessante) Gespräche und Fragestellungen entwickeln wie:

- Was würdest du bestellen?
- Was kostet dein Wunschessen?
- Was ist Panacotta?
- Was bedeutet Schnitzel „Funghi“?
- ...

Aufgabenvariante (1)

Lena erzählt: „Mein Vater hat für mein Essen 14,40 € ausgegeben.“ Ihre Freundin Carla sagt: „Das kann nicht stimmen.“

Kompetenzen

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen
Bereich: Argumentieren
Die Schülerinnen und Schüler
- bestätigen oder widerlegen ihre Vermutungen anhand von Beispielen und entwickeln – ausgehend von Beispielen – ansatzweise allgemeine Überlegungen oder vollziehen diese nach (folgern)

Erwartete Aktivitäten

Der Einwurf „Das kann nicht stimmen“ initiiert die Suche nach einer Menüfolge, mit der ein Preis von exakt 14,40 € erreicht wird.

a) Aufwendig ist das Durchrechnen aller Kombinationen, da es 6 x 6 x 3 Möglichkeiten gibt.

b) Da einige Preise identisch sind, kann die Kombinationsanzahl verringert werden, sodass 4 x 5 x 2 Möglichkeiten auf ihren Endpreis hin zu überprüfen sind.

c) Durch Festlegung eines Menübestandteils wird ebenfalls eine Verringerung der Zahl der zu berücksichtigenden Kombinationen erreicht: Bei der Wahl von Panacotta oder Tiramisu (beide kosten 3,50 €), bleiben noch 10,90 € übrig:

   Aus 3,50 € + a € + b € = 14,40 € folgt: a € + b € = 10,90 €.

   Da die Vorspeise mindestens 4,50 € kostet, bleiben nur zwei Hauptgerichte übrig, zu denen jedoch preislich keine Vorspeise passt. Ändert sich die Dessertauswahl (Preis: 3 €), findet sich ebenfalls keine preislich zusammenpassende Kombination aus Vor- und Hauptgericht.

   Ausgangspunkt einer solchen Argumentation können auch andere Vorklärungen sein, z. B. ob überhaupt ein Hauptgericht über 7,00 € möglich ist.

d) Am schnellsten führt wohl die Überlegung zum Ziel, dass der Centbetrag von 40 Cent durch keine Kombination erreicht werden kann.

Hinweise zum Unterricht

Mit Blick auf das angestrebte Ziel (Argumentieren) bietet sich eine Gesprächsform (z. B. am Gruppentisch, in einer Rechenkonferenz oder dergleichen) an. Es werden sich vermutlich mindestens drei Gruppen von Kindern beobachten lassen:

- Kinder, die sich im Gespräch darauf einigen, alle Kombinationen zu berechnen,
- Kinder, die von einer Festlegung ausgehend eine Argumentation im Gespräch entwickeln oder vorstellen und dabei überschlägig rechnend vorgehen oder Ergebnisse abschätzen,
- Kinder, die vom Endergebnis aus nach bestimmenden Merkmalen (Centbetrag der Summanden) suchen.

Material

Speisekarte

Aufgabenvariante (2)

Lena und Carla überlegen gemeinsam: Welche Speisen (Vorspeise – Hauptgericht – Dessert) kann man für genau 14,00 € erhalten? Sie finden mehrere Möglichkeiten.

Kompetenzen

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen ***Bereiche: Problemlösen und Modellieren*** Die Schülerinnen und Schüler - probieren zunehmend systematisch und zielorientiert und nutzen die Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung (Problemlösen: lösen) - übersetzen Problemstellungen aus Sachsituationen in ein mathematisches Modell (z. B. *Gleichung, Tabelle, Zeichnung*) und lösen sie mithilfe des Modells (Modellieren: lösen) - beziehen ihr Ergebnis wieder auf die Sachsituation und prüfen es auf Plausibilität (Modellieren: validieren)

Erwartete Aktivitäten

Die drei Möglichkeiten (eine der drei Vorspeisen zu 4,50 € kombiniert mit dem Hauptgericht zu 6,50 € und dem Dessert zu 3,00 €) lassen sich auf unterschiedlichen Wegen herausfinden.

a) Ausgangspunkt ist die Berechnung einer Variante, z. B.:

   4,50 € + 5,20 € + 3,00 € = 12,70 €

   Durch Austausch eines Elementes wird der Zielwert erreicht:

   4,50 € + 6,50 € + 3,00 € = 14,00 €

   Weitere Austauschversuche sind begrenzt und bleiben erfolglos. Dem Vorspeisenwert von 4,50 € lassen sich drei unterschiedliche Vorspeisen zuordnen, sodass drei Menüvarianten möglich sind.

b) Auch eine Betrachtung der Centbeträge führt zum Ziel.

   Der Endbetrag setzt sich aus drei Summanden zusammen und ist ein voller Eurobetrag.

   Im Vorspeisen- und Dessertbereich gibt es nur volle Eurobeträge und Eurobeträge mit 50 Cent-Teilbeträgen.

   Daher kommt von den Hauptspeisen nur Spagetti Bolognese in Frage. Für alle anderen Hauptgerichte fehlen die erforderlichen Ergänzungsbeträge im Centbereich. Für Vorspeise und Dessert bleiben noch 7,50 € übrig. Diese Summe ist in drei Konstellationen zu erreichen.

Hinweise zum Unterricht

Für diese Aufgabe ist die Sozialform nicht entscheidend.

Material

Speisekarte

Aufgabenvariante (3)

> Lena erzählt: „Das Essen für meine Mutter hat insgesamt 15,30 € gekostet. Sie hat als Vorspeise eine Tomatensuppe und als Dessert einen Eisbecher gewählt. Welches Hauptgericht könnte sie gegessen haben?“

Kompetenzen

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen

Bereich: Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- entnehmen Sachsituationen und Sachaufgaben Informationen und unterscheiden dabei zwischen relevanten und nicht relevanten Informationen (erfassen)
- übersetzen Problemstellungen aus Sachsituationen in ein mathematisches Modell (z. B. *Gleichung, Tabelle, Zeichnung*) und lösen sie mithilfe des Modells (lösen)
- beziehen ihr Ergebnis wieder auf die Sachsituation und prüfen es auf Plausibilität (validieren)

Erwartete Aktivitäten

Die Umwandlung in eine formale Aufgabe liegt nahe:

15,30 € = 4,50 € + 3,00 € + ____

15,30 € - 4,50 € - 3,00 € = ____

15,30 € - (4,50 € + 3,00 €) = ____

Aber auch Darstellungen wie eine unvollständige Rechnung bieten Hilfen:

La Luna

Öffnungszeiten: Dienstag bis Sonntag 11–15 Uhr und 18–24 Uhr

```
07/05/2008  Tisch: 003
1 x Tomatensuppe  ________
1 x ______________ ________
1 x Eisbecher     ________
Total             15,30 €
```

Hinweise zum Unterricht

Für manche Kinder ist es hilfreich, wenn der Aufgabentext mittels farbiger Unterstreichungen strukturiert wird, sodass wesentliche und zusammengehörige Informationen beachtet werden.

Material

Speisekarte

Aufgabenvariante (4)

In der Rechnung fehlen einige Beträge. Ergänze mit Hilfe des Bestellzettels.

Kompetenzen

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen
Bereich: Darstellen / Kommunizieren
Die Schülerinnen und Schüler
übertragen eine Darstellung in eine andere (zwischen Darstellungen wechseln)

Erwartete Aktivitäten

Die Rechnung erhält eine Reihe von zusätzlichen Informationen, sodass sich die Aufgabenstellung auch sehr einfach in Richtung auf den Prozess des Modellierens (... entnehmen Sachsituationen und Sachaufgaben Informationen und unterscheiden dabei zwischen relevanten und nicht relevanten Informationen (erfassen)) verändern lässt.

Die vorliegende Aufgabenstellung wird gelöst, wenn mit Hilfe des Bestellzettels Informationen verarbeitet und in neuer Form dargestellt werden. Dabei wird in einem Zwischenschritt auf die Speisekarte zurückgegriffen, denn auf dieser sind die Namen von Speisen mit Preisen verknüpft.

Hinweise zum Unterricht

Mit einer Rahmengeschichte wird die Funktion des Bestellzettels verdeutlicht, z. B.: „Auf den Bestellzettel schreibt der Kellner die Wünsche auf. Dann gibt er ihn in die Küche. Später braucht er ihn noch für die Rechnung.“

Material

Speisekarte
Bestellzettel für Speisen
Rechnung

Beim „Italiener“

<u>Vorspeisen</u>

Gemüsesuppe	4,50 €
Tomatensuppe	4,50 €
Krabbensuppe	5,00 €
gemischter Salat	4,50 €
Tomatensalat mit Mozzarella	6,50 €
Salat aus Meeresfrüchten	7,00 €

<u>Hauptgerichte</u>

Spagetti Napoli	5,20 €
Spagetti Bolognese	6,50 €
Tortellini mit Schinken und Käse	6,20 €
Schnitzel „Funghi“	7,20 €
Schnitzel „Parmesan“	7,80 €
Calamaris	7,80 €

<u>Dessert</u>

Eisbecher	3,00 €
Panacotta	3,50 €
Tiramisu	3,50 €

La Luna

Ihr Restaurant für italienische Spezialitäten

Inhaber: Nicola Monti

Öffnungszeiten: Dienstag bis Sonntag 11 - 15 Uhr und 18 - 24 Uhr

07/05/2008	Tisch: 003
2 x Softgetränk	3,60
2 x Pils	4,20
3 x Vorspeise	________
3 x Hauptgericht	________
3 x Dessert	________
Total	53,00
gegeben	60,00
zurück	7,00

Herzlichen Dank für Ihren Besuch!

BESTELLZETTEL FÜR SPEISEN TISCHNUMMER: 3

Gemüsesuppe	X					
Tomatensuppe			X			
Krabbensuppe						
gemischter Salat						
Tomatensalat mit Mozzarella		X				
Salat aus Meeresfrüchten						
Spagetti Napoli						
Spagetti Bolognese	X		X			
Tortellini mit Schinken und Käse						
Schnitzel mit Pilzen		X				
Schnitzel mit Parmesan						
Calamaris						
Eisbecher		X	X			
Panacotta	X					
Tiramisu						