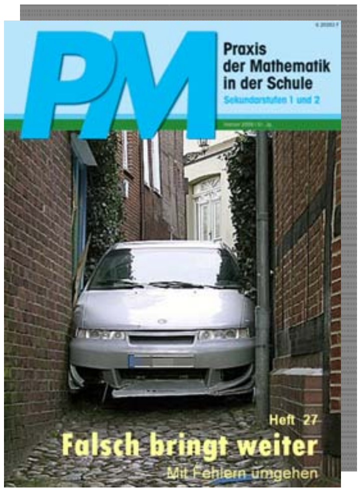
Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich?

Susanne Prediger & Gerald Wittmann

Zusammenfassung: Um aus Fehlern lernen zu können, müssen diese erst analysiert werden, Der einführende Überblicksartikel zeigt hierfür einen konzeptionellen Rahmen auf zur Unterscheidung von Fehlerphänomenen, -mustern und -ursachen auf syntaktischer und semantischer Ebene. Strategien und Hintergründe für ein Lernen aus Fehlern werden ebenso vorgestellt, wie eine Systematisierung didaktischer und methodischer Ansätze zum produktiven Umgang mit Fehlern. Dabei zeigt sich der konzeptionelle Rahmen der Fehleranalyse auch nützlich für die Planung der Aktivitäten der Lernenden.

Vorversion eines Artikels in PM Heft 27, Juni 2009



Irren ist menschlich. Aus Fehlern wird man klug. Diese Volksweisheiten sind mittlerweile häufig genannte Maximen eines mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. Sie führen zu der Forderung nach einem produktiven, das Lernen fördernden Umgang mit Fehlern im Mathematikunterricht (Jost u.a. 1992, Oser u.a. 1999, Weinert 1999 u.v.a.). Doch was bedeutet dies eigentlich genauer – jenseits der Akzeptanz von Fehlern als unabdingbare Begleiterscheinungen von Lernprozessen? Ein weiteres Plädoyer für ein positives Fehler*klima* ist nicht nötig. Statt dessen ist es das Anliegen dieses Themenhefts, Ansätze für einen nicht nur *atmosphärisch*, sondern auch *kognitiv produktiven Umgang* mit Fehlern zu sammeln und zu systematisieren, damit die allgemein akzeptierte offene *Haltung* gegenüber Fehlern auch im *Unterrichtshandeln* konsequenter zum Ausdruck kommen kann. Das dazu erforderliche Hintergrundwissen und Handlungsrepertoire wird in diesem Basisartikel entlang der folgenden Fragen erläutert:

- Wie kann man als Lehrkraft Fehler einordnen und verstehen?
- Auf welche Weise ist ein Lernen aus Fehlern möglich?
- Welche Ansätze gibt es, um mit auftretenden Fehlern im Mathematikunterricht produktiv umzugehen?

Fehler einordnen und verstehen

Präkonzepte und Fehler

Wann kann man überhaupt von einem Fehler sprechen? In der pädagogischen Psychologie wird ein Fehler definiert als „von einer Norm abweichende Sachverhalte oder von einer Norm abweichende Prozesse […]. Normen stellen das Bezugssystem dar, und ohne Normen und Regeln wäre es nicht möglich, fehlerhafte und fehlerfreie Leistungen, das Richtige vom Falschen zu unterscheiden“ (Oser u.a. 1999, S. 11).

Diese Definition ermöglicht insbesondere, eine Trennlinie zu ziehen, wann in Bezug auf den Mathematikunterricht überhaupt von Fehlern zu reden ist. Denn wer aus einer streng konstruktivistischen Perspektive die Individualität von Denkprozessen betont, wird sich möglicherweise scheuen, den Terminus „Fehler“ zu verwenden. So gibt es zahlreiche Belege dafür, dass gerade fachlich falsche Denkweisen von Lernenden aufgrund ihrer inneren Rationalität und Stimmigkeit ernst genommen werden müssen als Ausgangspunkte für ein Lernen auf individuellen Wegen (Smith/di Sessa/Rochelle 1993). Auch gibt es typische, in der speziellen Struktur mathematischer Lerninhalte begründete Hürden, die alle Lernenden überwinden müssen (wie zu wandelnde Vorstellungen bei Zahlbereichserweiterungen, s. Hefendehl-Hebeker/Prediger 2006). Es wurden didaktische Ansätze entwickelt, wie Prozesse des Konzeptwechsels gestaltet werden können, die solche individuellen Präkonzepte ernst nehmen und in produktiver Weise weiter führen (z.B. Lengnink 2005).

Aufgabe:

Ein Kilogramm Mandarinen kostet 3,25 Euro. Kerstin will sich 0,5 kg kaufen.
a.) Was muss sie zahlen?
b) Berechne die gleiche Aufgabe auch für folgende Werte:

1,50 €	1,5 kg
3,30 €	2,5 kg
3,20 €	0,6 kg

Lillys Lösungsweg (später handschriftlich einbauen):

a) $3{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125 \approx 0{,}13$
Sie muss 0,13 € zahlen.

Jans Lösungsweg:

a) 3,25 : 0,5
32,5 : 5 = 6,5
<u>30</u>
2,5
<u>25</u>
0 Sie muss 6,50 € zahlen.

***Kasten 1**: Fehler können unterschiedlich sein!*

Gleichwohl muss den individuellen, offenen Annäherungen immer auch ein Prozess der Regularisierung folgen, in dem die aus fachlicher Sicht tragfähigen Konzepte als Norm für alle Lernenden verbindlich festgehalten und etabliert werden. Wenn eine Schülerin oder ein Schüler diese auch nach einem unterrichtlichen Aushandlungsprozess nicht aktivieren kann, ist es selbst in einer konstruktivistischen Perspektive angemessen, von einem Fehler zu sprechen – andernfalls würden die Unterrichtsziele in unverbindlicher Offenheit verstanden.

Kasten 1 zeigt zwei typische Beispiele für falsche Lösungen einer Aufgabe. Obwohl die Unterrichtsstunde eigentlich auf Proportionalität zielt, verweisen die Fehler von Lilly und Jan auf andere Bereiche. Um damit als Lehrkraft in einer Unterrichtssituation adäquat umgehen zu können, ist es wichtig, die Fehler zu verstehen und einzuordnen.

Fehlerphänomene und Fehlermuster

Unmittelbar zugänglich sind zunächst *Fehlerphänomene*. Sie fallen schon im alltäglichen Unterricht auf, und zwar sowohl in der mündlichen Kommunikation als auch in schriftlichen Aufgabenbearbeitungen. Lilly multipliziert zwei Dezimalbrüche falsch, während Jan durch 0,5 dividiert, anstatt mit 0,5 zu multiplizieren.

Was zunächst wie ein Flüchtigkeitsfehler erscheinen könnte, hat auf den zweiten Blick eine innere Logik, auch wenn diese von der üblichen mathematischen Sicht abweicht. Man erkennt die innere Logik im Zusammenhang mit Lillys Lösungen zu den Aufgaben aus b.), die teils richtig, teils falsch gelöst sind:

$$\begin{aligned} \text{a.) } & 3{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125 \\ \text{b.) } & 1{,}50 \cdot 1{,}5 = 1{,}250 \\ & 3{,}30 \cdot 2{,}5 = 6{,}150 \\ & 3{,}20 \cdot 0{,}6 = 0{,}120 \end{aligned}$$

Es kann ein *Fehlermuster* identifiziert werden: Lilly multipliziert offenbar jeweils die Stellen vor dem Komma und die Stellen nach dem Komma getrennt miteinander, sie geht entsprechend dem bekannten „Komma-trennt-Muster“ vor (s. Padberg 2002, S. 228).

Bei Jan zeigt sich, dass er immer dann korrekt multipliziert, wenn der Proportionalitätsfaktor größer als 1 ist, hingegen fälschlicher Weise dividiert, wenn er kleiner als 1 ist:

a.) 3,25 : 0,5

b.) 1,50 · 1,5

3,30 · 2,5

3,20 : 0,6

Die Identifizierung eines Fehlermusters wirft die Frage nach den tiefer liegenden *Fehlerursachen* auf. Ein *Flüchtigkeitsfehler* liegt weder bei Lilly noch bei Jan vor. Da sich bei beiden ein klares Fehlermuster zeigt, handelt es sich jeweils um *systematische Fehler*.

Fehlerursachen

Eventuell hat Lilly eine falsche Regel für die Multiplikation von Dezimalzahlen automatisiert. So wie gemeine Brüche nach dem Schema „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“ multipliziert werden, überträgt sie dies auf Dezimalzahlen und die Stellen vor dem Komma sowie die Stellen nach dem Komma. Diese Fehlerursache wäre auf der *syntaktischen Ebene* zu verorten.

Oft sind tiefer liegende Ursachen für syntaktische Fehler aber auch auf der *semantischen Ebene* anzusiedeln. Bei Lilly etwa könnte die falsche syntaktische Regel in einem noch unzureichenden Verständnis von Dezimalzahlen begründet liegen. Ein Komma-trennt-Muster entwickeln oft diejenigen Schülerinnen und Schüler, welche die symbolische Darstellung von Dezimalzahlen nicht mit der inhaltlichen Bedeutung von Stellenwerten füllen, sondern die Stellen vor und nach dem Komma jeweils als eigenständige Zahlen auffassen. Syntaktische Fehler werden durch semantische Fehlkonzepte begünstigt, und umgekehrt äußern sich Defizite im Bereich der Semantik häufig beim syntaktischen Arbeiten (s. o.). Dies bedeutet, dass Fehlerursachen nicht selten auch auf einer anderen Ebene gesucht werden müssen, als die daraus resultierenden Fehlermuster.

Die Fehlerursachen erschließen sich deshalb vielfach erst im Gespräch. So auch bei Jan. Seine Antwort auf die Nachfrage, warum er so gerechnet hat, lautet: „Weil das Ergebnis muss ja kleiner werden.“ Dieses Konzept, dass die Multiplikation stets vergrößert und die Division stets verkleinert, wirft gerade beim Übergang von natürlichen Zahlen zu Bruchzahlen viele Probleme auf und ist hinlänglich bekannt (vgl. z.B. Hefendehl-Hebeker/Prediger 2006). Es erklärt das Fehlermuster der zuweilen falschen Operationswahl zur Aufgabe b) aus *Kasten 1*, das bei Jan anzufinden ist.

Inwiefern liegt hier ein Fehler gemäß der eingangs zitierten Definition vor? Wo lässt sich eine Norm ausmachen, der Jans Denkprozess widerspricht? Die Norm ist hier durch die Grundvorstellungen zum Operieren mit Bruchzahlen gegeben (vgl. vom Hofe 2003, Prediger 2009). Jan gelingt es nicht, eine adäquate Grundvorstellung zu aktivieren; handlungsleitend ist vielmehr die intuitive Regel „Multiplizieren vergrößert und Dividieren verkleinert.“

Fachbegriffe der Fehleranalyse – eine Übersicht

Als *Präkonzepte* der Lernenden werden die vorunterrichtlichen Erfahrungen und Vorstellungen bezeichnet. Sie werden im Unterricht gezielt zur Sprache gebracht, entweder um daran anknüpfen zu können, wenn sie tragfähig sind, oder um eine Weiterentwicklung bzw. Überwindung hin zu fachlich korrekten Konzepten zu ermöglichen.

Als *Fehler* beschreibt man Äußerungen, Sachverhalte oder Prozesse, wenn sie von einer im Unterricht – ggf. nach längerem Aushandlungsprozess – bereits etablierten Norm abweichen.

Unmittelbar zugänglich sind die *Fehlerphänomene* als sichtbare Produkte eines Wahrnehmungs- und Denkprozesses. Im alltäglichen Unterricht fallen sie sowohl in der mündlichen Kommunikation als auch in schriftlichen Bearbeitungen auf.

Fehlermuster lassen sich identifizieren, wenn bestimmte Fehlerphänomene über die Befragten hinweg gehäuft auftreten (auch *Fehlertyp* genannt), oder wenn hinter den (individuellen oder interindividuellen) Fehlerphänomenen eine gewisse innere Logik zu erkennen ist (wenn also bei strukturell gleichen Aufgaben auch strukturell gleiche Fehlerphänomene auftreten).

Hinter Fehlerphänomenen können verschiedene tiefer liegende *Fehlerursachen* stehen, die sich auf den eigentlichen Fehlerprozess beziehen. Hinter einem Fehlerphänomen können verschiedene Fehlerursachen stehen. Die Fehlerursachen erschließen sich häufig erst im Gespräch mit Schülerinnen und Schülern (und auch dann nicht immer). Während Fehlermuster angeben, *wie* Schülerinnen und Schüler häufig falsch vorgehen, erklären Fehlerursachen, *warum* sie dies tun.

Flüchtigkeitsfehler sind Fehler, welche die Betroffenen sofort korrigieren können, sobald sie darauf hingewiesen werden. Typische Ursachen für Flüchtigkeitsfehler sind mangelnde Konzentration oder Fehlleistungen des Arbeitsgedächtnisses, die sich beispielsweise aus einer Überlastung ergeben, weil etwa Umformungssschritte noch nicht automatisiert sind.

Ein *systematischer Fehler* liegt vor, wenn jemand bei Aufgaben desselben Typs wiederholt dasselbe Fehlermuster erkennen lässt. Wird die Person auf den Fehler hingewiesen, korrigiert sie ihn nicht, sondern erläutert die Richtigkeit ihres Vorgehens. Als Fehlerursache lassen sich häufig stabile falsche Konzepte ausmachen.

Syntaktische Fehler sind Fehler, die beim Rechnen nach festen Regeln (etwa in der Arithmetik, in der Bruchrechnung, in der Algebra) auftreten.

Semantische Fehler sind auf der Ebene der Bedeutungen mathematischer Inhalte verortet und oft durch *Fehlvorstellungen* bedingt. Sie erscheinen insbesondere bei der Verbindung von Sachkontexten und mathematischen Symbolen und Begriffen, etwa beim Aufstellen eines Terms oder beim Interpretieren von Ergebnissen in Bezug auf einen Sachkontext. Manchmal stehen auch hinter syntaktischen Fehlern semantische Fehlerursachen, nämlich *Fehlvorstellungen*, die die Verfahren beeinflussen.

Kasten 2

Für jedes im Unterricht auftauchende Fehlermuster lohnt sich die Suche nach den Fehlerursachen, auch wenn ein Fehlermuster auf unterschiedliche Fehlerursachen zurückzuführen sein kann. Von Bedeutung sind hierbei geeignete diagnostische Aufgaben, die es erlauben, auch mit schriftlichen Erhebungen im Klassenverband hinreichend informative Antworten zu erhalten (z. B. durch die explizite Frage nach einer Erklärung, vgl. Leuders/Hußmann/Prediger 2007). Im Beitrag von Sebastian Wartha werden diagnostische Aufgaben vorgestellt, welche auf die Erhebung von Grundvorstellungen im Bereich der Bruchzahlen zielen.

Syntaktische und semantische Fehler

Schon die Beispiele von Lilly und Jan zeigen: Fehler können auf der syntaktischen oder der semantischen Ebene verortet sein, je nachdem, ob es um Rechentechniken geht oder um das inhaltliche Interpretieren von Objekten und Operationen beziehungsweise um das Mathematisieren von Sachsituationen.

Fehler	**Fehlermuster**	Mögliche **Fehlerursachen** und ihre Einordnung (syntaktisch/semantisch)	Mögliche **Fehlerbearbeitungen** (syntaktisch/semantisch)
Lilly rechnet $3{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$	Komma-trennt-Muster	falsche Übertragung von Strategien (syntaktisch), oft bedingt durch ein fehlendes Stellenwertverständnis (semantisch)	Ergebnisse ähnlicher Aufgaben vergleichen (Kontexteinbettung, syntaktisch) Stellenwertverständnis stabilisieren durch Verbalisierungsübungen und Anordnung auf dem Zahlenstrahl (semantisch)
Jan rechnet 3,25 : 0,5, um den Preis für ein halbes Kilogramm zu bestimmen	Wahl der Operation gemäß „Dividieren verkleinert, Multiplizieren vergrößert“	keine stabil aufgebauten inhaltlichen Verstellungen zur Multiplikation und Division (semantisch)	ähnliche Aufgaben vergleichen durch Kontrastieren und Einbetten (syntaktisch und semantisch) Grundvorstellungen stabilisieren (semantisch)
Paula bestimmt Lösungen von (x-3)(x-4) = 9 durch x = 12 und x = 13	Die Gleichung (x-a)(x-b) = c hat als Lösung x=a+c und x=b+c	Übergeneralisierung der Regel für das Ermitteln von Nullstellen (syntaktisch) verstärkt durch fehlende Kontrollen wie das Einsetzen der Lösungen in die Gleichung (semantisch)	Fehlerwissen aufbauen, wann man aus einer Faktorisierung die Nullstellen ablesen kann (syntaktisch) Kontrollstrategien wie das Einsetzen der Lösung in die Gleichung festigen (semantisch)
Yannick formt um: $\frac{x^3+1}{x} = x^2+1$	falsches Kürzen mit einzelnen Summanden, wenn Zähler- oder Nennerterm eine Summe ist	evtl. falsche Strukturierung der Teilterme (syntaktisch)	Kontrastierung von kürzbaren und nicht kürzbaren Bruchtermen zur Etablierung geeigneter Teilterm-Strukturierungen (syntaktisch) Kontrollstrategien wie das Einsetzen ausgewählter Werte in den Term (semantisch)

Kasten 3: *Beispiele für Fehler, ihre Analyse und Bearbeitung*

Die Fehlerforschung fokussierte in ihren Anfängen auf syntaktische Fehler und identifizierte Fehlermuster in Bereichen wie den schriftlichen Rechenverfahren (Radatz 1980) oder der Bruchrechnung (Padberg 2002). Viele dieser Muster lassen sich dabei als Übergeneralisierung von Lösungswegen beschreiben, wenn Lernende Schemata von einer Operation auf eine andere übertragen (vgl. Malle 1993, S. 160 ff, Tietze 1988). Dies ist oft nahe liegend, aber nicht immer richtig, z. B.:

- Das Schema $\frac{a}{b} \circ \frac{c}{d} = \frac{a \circ c}{b \circ d}$ wird von der Multiplikation von Brüchen auf die Addition übertragen.

- Das Homomorphie-Schema f(a ∘ b) = f(a) ∘ f(b) wird z. B. beim Wurzelziehen vom Multiplizieren aufs Addieren übertragen: $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b$, aber $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.

Syntaktische Fehler haben jedoch häufig auch einen semantischen Hintergrund. Diese Erkenntnis hat ebenso wie Schwierigkeiten auf der semantischen Ebene (siehe Zusammenstellung der im Text nach und nach diskutierten Beispiele in *Kasten 3*) zunehmend Eingang in die Fehlerforschung gefunden. Dabei ist das Konstrukt der Grundvorstellungen insofern wichtig, als damit auf der Ebene des inhaltlichen Denkens normative „Vergleichsmuster“ spezifiziert werden können, die es erlauben, Fehler nicht nur auszumachen, sondern auch zu analysieren.

Wie kann man aus Fehlern lernen?

Fehler können – das ist heute Konsens – wichtige Lernchancen eröffnen. Natürlich ist nicht jede Fehlersituation eine gute Lernsituation. Unproduktiv sind z. B. Fehler infolge von Missverständnissen oder ungeschicktem Aufbau des Unterrichts; diese sollten vermieden werden (Spychiger u. a. 1999).

Auch in potentiell produktiven Fehlersituationen ist das Lernen aus Fehlern an geeignete Rahmenbedingungen geknüpft. Dies gilt zunächst in Bezug auf den affektiven Bereich: Fehler gelten als „janusköpfige Motivationsfaktoren“ (Weinert 1999, S. 105). Wie Fehler erlebt werden, ob positiv oder negativ, ob motivational stimulierend oder frustrierend, hängt nicht nur davon ab, ob sie im Kontext von Lernsituationen oder von Leistungssituationen auftreten, sondern auch davon, wie das Umfeld – konkret: die Lehrkraft und die Mitlernenden – darauf reagiert. Bekannt ist, dass Bloßstellungen nach Fehlern jeglichen Lernprozess blockieren können. Nur wenn alle Beteiligten akzeptieren, dass Fehler unabdingbare Begleiterscheinungen von Lernprozessen sind, können sie Lernchancen eröffnen und auch als solche wahrgenommen werden.

Darüber hinaus gibt es entscheidende kognitive und metakognitive Rahmenbedingungen (vgl. Oser/Spychiger 2005):

Ein Fehler kann zu einer fruchtbaren Lerngelegenheit werden, wenn Lernende

1. den Fehler erkennen, also *einsehen, dass etwas falsch ist*, und insbesondere auch, *was falsch ist*,
2. den Fehler erklären können, also *verstehen, wie es dazu gekommen ist*,
3. die Möglichkeit haben, den Fehler zu korrigieren, also eine *richtige Vorgehensweise oder Vorstellung erwerben*.

Das Lernen aus Fehlern ist kein Automatismus – im Gegenteil: Umfangreiche Päckchenrechnungen beispielsweise können sogar dazu führen, dass sich syntaktische Fehler „einschleifen“ und verfestigen. Nicht angesprochene Präkonzepte, aus denen semantische Fehler resultieren, können im Verborgenen weiterbestehen und in der Folge zu Konflikten führen.

Im Folgenden werden einige lerntheoretische Ansätze aufgeführt, auf die sich ein Lernen aus Fehlern stützen kann.

Aufbau negativen Wissens

Das von Oser u.a. (1999) stammende Konzept des *negativen Wissens* beschreibt, in welcher Weise Fehler für Lernende hilfreich und wertvoll sein können. Negatives Wissen umfasst zwei Hauptkomponenten:

- *Abgrenzungswissen*: Inwiefern gehört etwas nicht zu einer Sache, zu einem Konzept oder zu einem Verfahren?
- *Fehlerwissen:* Was darf in einer bestimmten Situation nicht getan werden?

Negativem Wissen wird eine Schutzfunktion für das positive Wissen zugeschrieben: Umfangreiches Wissen darüber, was eine Sache nicht ist oder was nicht getan werden darf, lässt das positive Wissen sehr viel klarer hervortreten.

Insbesondere im syntaktischen Bereich ist *Fehlerwissen* nötig:

- Die Addition von Brüchen kann nicht gemäß dem Schema „Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner“ erfolgen.
- Es ist zwar nicht falsch, aber meist ungeschickt, Brüche vor dem Multiplizieren gleichnamig zu machen.
- Das Kürzen eines Bruchterms ist nicht möglich, wenn der Zähler- oder Nennerterm eine Summe oder Differenz ist: $\frac{x^3+1}{x} \neq x^2+1$.
- Im Allgemeinen gilt $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$ und $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$.

Dieses Fehlerwissen schützt zunächst nur vor einer falschen Vorgehensweise, es umfasst nicht den richtigen Weg. Deshalb sollte dieses Fehlerwissen idealerweise in einem größeren Kontext eingebettet sein, insbesondere in Verbindung mit den richtigen Lösungswegen.

Bei syntaktischen Fehlern, die aus Übergeneralisierungen resultieren (siehe oben), muss vor allem der Gültigkeitsbereich des Verfahrens stärker in das Blickfeld gerückt werden. Schülerinnen und Schüler speichern Formeln häufig bildlich als visuelle Schemata, in denen das *Abgrenzungswissen* – der Gültigkeitsbereich des Verfahrens – nicht mehr enthalten ist (vgl. Malle 1993, Tietze 1988).

- Das Schema für die Addition von Brüchen ist im Kontrast zum Schema für die Multiplikation zu sehen.
- Das Kürzen eines Bruchterms ist nur dann möglich, wenn Zähler- und Nennerterm Produkte sind; häufig lassen sich die Produkte durch Ausklammern herstellen: $\frac{x^3+x^2}{x} = \frac{x\left(x^2+x\right)}{x} = x^2+x$.
- Das Wissen um $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$ ist letztlich Anlagerungswissen zur Binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

Auch im *semantischen Bereich* ist negatives Wissen als Abgrenzungswissen von Bedeutung:

- Die *Kenntnis von Gegenbeispielen* ist ein zentraler Aspekt des Verständnisses mathematischer Begriffe (vgl. Vollrath 1978) und lässt die Besonderheiten des Begriffs deutlicher hervortreten: Beim Sortieren von Körpern gilt es, auch die Körper zu benennen, die kein Prisma oder keine Pyramide sind, und zu begründen, warum dies nicht der Fall ist.
- Es ist sinnvoll zu wissen, *welche Eigenschaften ein Objekt nicht besitzt*, wie typische Fehlvorstellungen der Sekundarstufen-I-Geometrie belegen: So ist beispielsweise ein Parallelogramm nicht achsensymmetrisch, und im nicht-quadratischen Rechteck sind die Diagonalen keine Symmetrieachsen.

Wie kann solches Abgrenzungswissen erworben werden? Wie können Schülerinnen und Schüler einsehen, dass ihre Vorgehensweise falsch ist, obwohl sie intuitiv und nahe liegend ist? Klar ist: Ein bloßes „Das darf man nicht!“ oder „Das gilt nur bei der Multiplikation, nicht aber bei der Addition!“ genügt nicht, um einen nachhaltigen Lerneffekt zu erzielen. Deshalb werden im Folgenden Ansätze vorgestellt, die weiter gehend sensibilisieren können.

Kontrastierung von Verfahren und Situationen

Da sich Lernen über den eigenaktiven Umbau mentaler Strukturen beschreiben lässt und dabei immer auch auf vorhandenen Wissens- und Erfahrungselementen aufbaut, entstehen Fehler oft dadurch, dass falsche Verbindungen hergestellt werden. So tritt z. B. der oben beschriebene Fehler „Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner“ während der Einführung der Addition von Bruchzahlen seltener auf als nach der Behandlung der Multiplikation. Ein gezieltes Gegenüberstellen von Verfahren kann hier beim

Aufbau von Abgrenzungswissen helfen. Durch eine solche Kontrastierung kann insbesondere der Gültigkeitsbereich stärker in das Blickfeld gerückt werden, z. B. mit Fragen wie:

- Wie unterscheiden sich die Rechenwege für Addition und Multiplikation von Brüchen?
- Wie müssen Zähler- und Nennerterm eines Bruchs aussehen, damit man kürzen kann, wann dagegen geht es nicht?
- Was macht ein Prisma aus, in welcher Beziehung steht es zu einem Quader?
- Wann wird tatsächlich nach dem Umfang eines Rechtecks gefragt, wann nach dem Flächeninhalt? Stellt Situationen und Fragen gegenüber, die zum einen oder anderen Konzept passen.

Festigung von Validierungsstrategien

Paula hat für die Gleichung (x – 3)(x – 4) = 9 die falschen Lösungen x = 12 und x = 13 bestimmt. Für die produktive Bearbeitung des Fehlermusters, das vermutlich auf einer falschen Übertragung der Nullstellenbestimmung beruht, ist es vor allem wichtig, angemessene Validierungsstrategien zu etablieren: „Paula hat falsch gerechnet. Was empfehlen wir ihr, damit sie beim nächsten Mal merkt, wenn ihr Ergebnis falsch ist?“ Durch das Einsetzen der Werte oder ein Zeichnen des Graphen hätte Paula ihren Fehler entdecken können.

Ebenso muss immer wieder das Nachrechnen mit der Umkehroperation als Validierungsstrategie in Erinnerung gerufen werden: Beim Fehlerphänomen $\frac{1}{8}:\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$ wird die Division durch $\frac{1}{2}$ letztlich wie die Division durch 2 behandelt – dagegen hilft die Probe durch die Umkehroperation: $\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\neq\frac{1}{8}$.

Einbettung in einen syntaktischen oder semantischen Kontext

Fehler entstehen oft, wenn Lernende eine Aufgabe isoliert betrachten, ohne die Einbettung in ihren Kontext mitzudenken. Daher ist die gezielte Wieder-Einbettung eine wichtige Fehler-Bearbeitungsstrategie, sowohl auf der syntaktischen als auch auf der semantischen Ebene.

Beim Fehler $\frac{1}{8}:\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$ kann ein Aufgabennetz hilfreich sein, dass die beiden Rechnungen $\frac{1}{8}:\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$ und $\frac{1}{8}:2=\frac{1}{16}$ einschließlich der beiden Umkehraufgaben in Beziehung setzt.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\frac{1}{8}:\frac{1}{2}=\frac{1}{4}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, dash] & \boxed{\frac{1}{8}:2=\frac{1}{16}} \arrow[d, dash] \\
\boxed{\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{1}{4}} \arrow[r, leftrightarrow] & \boxed{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}}
\end{tikzcd}
$$

Alternativ kann auch eine von der Lehrkraft konstruierte Gleichungskette weiterhelfen, bei der die Lernenden parallel zu den Divisionsaufgaben auch die entsprechenden Multiplikationen mit dem Kehrbruch angeben sollen:

$$
\begin{array}{ll}
\frac{1}{8}:8= & \frac{1}{8}\cdot\ \ = \\
\frac{1}{8}:4= & \frac{1}{8}\cdot\ \ = \\
\frac{1}{8}:2= & \frac{1}{8}\cdot\ \ = \\
\frac{1}{8}:1= & \frac{1}{8}\cdot\ \ = \\
\frac{1}{8}:\frac{1}{2}= & \frac{1}{8}\cdot\ \ = \\
\frac{1}{8}:\frac{1}{4}= & \frac{1}{8}\cdot 4=
\end{array}
$$

Beide Beispiele zeigen aber auch die Grenzen einer rein syntaktischen Einbettung auf: Voraussetzung dafür, dass sie wirklich hilfreich sind, ist jeweils, dass die betreffenden Schülerinnen und Schüler zumindest die Rechnungen $\frac{1}{8}:2=\frac{1}{16}$ und $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$ in Bezug auf einen Sachkontext inhaltlich deuten können. Das syntaktische Vorgehen bedarf also einer semantischen Grundlage.

In ähnlicher Weise lässt sich der Fehler „$\frac{1}{5} < \frac{1}{8}$ wegen 5 < 8“ semantisch durch Einbettung in Anteilsdarstellungen und inhaltliche Deutungen (ein Fünftel Kuchen und ein Achtel Kuchen) als solcher erkennen.

Trauen Lernende bei der Lösung von $(x - 3)(x - 4) = 9$ der Einsetzprobe nicht, so muss grundlegender darüber gesprochen werden, was die Lösungen einer Gleichung eigentlich sind, da diese Bedenken auf ein noch nicht voll entwickeltes Variablenverständnis hindeuten können (Prediger 2009).

Gemeinsame Suche nach Fehlermustern und Fehlerursachen als metakognitive Aktivierung

Fehleranalysen sind nicht den Lehrkräften allein vorbehalten, sondern können erfolgreich auch von Lernenden angestellt werden. Diese metakognitiven Aktivitäten erweisen sich als effektiv für ein nachhaltiges Lernen (wie im Beitrag von Christa Kaune gezeigt wird). Geeignete Aufgabenstellungen dazu finden sich im übernächsten Unterabschnitt.

Umgehen mit Fehlern im Unterricht

Fehleranalysen und die Entwicklung geeigneter Bearbeitungsstrategien gelingen vielen Lehrkräften zu Hause am Schreitisch leichter als unter dem Handlungsdruck der konkreten Unterrichtssituation. Sieht die Realität nicht oft so aus wie im folgenden Beispiel?

Lehrerin: *Timo, was ist ein Parallelogramm?*
Timo: *Ein Viereck ohne rechte Winkel?*
Lehrerin: *… ja, Karin?*
Karin: *Ein Viereck mit parallelen Seiten?*
Lehrerin: *Hm, Anton?*

Diese Episode zeigt ein häufiges Kommunikationsmuster im Unterrichtsgespräch, das so genannte „Bermuda-Dreieck der Fehlerkorrektur“ (Oser u.a. 1999, S. 26f): Wenn Lernende wie Timo etwas nicht Erwünschtes sagen, ruft die Lehrkraft einen anderen Schüler auf, in der Hoffnung, dass sie sich in einer Dreieckskommunikation gegenseitig korrigieren. Idealerweise geht jemand auf den vorhergehenden, falschen Beitrag sachlich ein und widerlegt ihn argumentativ:

Anton: *Du hast zwar recht, dass viele Parallelogramme keine rechten Winkel haben, aber Rechtecke sind auch Parallelgramme, und außerdem würde zu deiner Beschreibung auch ein Trapez passen.*

Häufig jedoch bieten die Aufgerufenen – so wie Karin – einfach eine andere Lösung an, ohne Bezug zur vorhergehenden Antwort, so dass letztlich die Fehler ungeklärt bleiben.

Warum die Lehrkraft auf die Fehler von Timo und Karin nicht eingeht, liegt auf der Hand: Sie steuert zügig auf ein erwartetes Ergebnis zu und will das Unterrichtsgespräch „am Laufen halten“. Oder sie möchte Schülerinnen und Schülern, die etwas Falsches sagen, nicht durch ein Eingehen auf den Fehler demotivieren. Gleichzeitig sagt ihr das pädagogische schlechte Gewissen: Fehler, die im „Bermuda-Dreieck“ verschwinden, sind verschenkte Lerngelegenheiten. Denn Timo erfährt durch das Weiterfragen der Lehrkraft zwar implizit, *dass* die Antwort falsch war, jedoch nicht, *was* daran falsch war.

Situativ auftauchende Fehler bewältigen

Das sinnvolle Eingehen auf situativ auftauchende Fehler stellt jede Lehrkraft vor große Herausforderungen, denn sie muss unter Handlungsdruck blitzschnell

- den Fehler auf seine Relevanz für das Stundenthema hin einschätzen, bevor sie sehen kann, ob die Thematisierung es tatsächlich wert ist, vom eigentlich geplanten Gedankengang abzuweichen,

- erkennen, ob hinter dem Fehlerphänomen ein Fehlermuster stehen kann, das auf einen systematischen Fehler hinweist, oder ob es sich um einen Flüchtigkeitsfehler handelt, und eventuelle tiefer liegende Fehlerursachen in Betracht ziehen,
- entscheiden, ob sie sofort auf den Fehler eingehen und dafür eine Unterbrechung des Gedankengangs in Kauf nehmen will, oder ihn besser später aufgreifen soll,
- methodische Alternativen für ihre Vorgehensweise abwägen und über mögliche Hilfen strategischer wie inhaltlicher Art nachdenken.

Dies stellt hohe Ansprüche an die Lehrkraft und ihre diagnostische Kompetenz. Darüber hinaus ist affektiv sensible Gesprächskompetenz gefragt, um in einer fehlerfreundlichen Atmosphäre mit adäquaten Moderationstechniken die Lernenden untereinander so ins Gespräch zu bringen, dass sie sachlich diskutieren und bei der Fehleranalyse gemäß der unten aufgeführten Stufung eine zielgerichtete Unterstützung erfahren. Die Nachfragen sollten dabei in Richtung der oben genannten Bearbeitungsstrategien gehen. Im Beitrag von Monika Schoy-Lutz (in diesem Heft) werden Strategien dargestellt, wie Fehlersituationen in diesem Sinne produktiv genutzt werden können.

Damit Fehlersituationen wie die oben beschriebene die Lehrkraft und die Klasse nicht überfordern und nicht infolge eines zu häufigen Auftretens das Unterrichtsgespräch sprengen, gibt es eine essentielle Entlastungsstrategie: Die wichtigsten potentiell auftauchenden Fehlersituationen können bereits im Vorfeld antizipiert und durch geeignete Methoden und Aufgaben in die Unterrichtsplanung einbezogen werden (s.u.).

Aktivierenden Umgang mit Fehlern methodisch gestalten

Aus der didaktischen Literatur sind zahlreiche Methoden bekannt, um Situationen zu schaffen, in denen sich die Lernenden jenseits des Klassengesprächs aktiv mit Fehlern auseinandersetzen können (Oser/Spychiger 2005).

Moderationstechniken, Methoden und Aufgaben zum Umgang mit Fehlern im Unterricht

Situatives Eingehen auf auftauchende Fehler

- Moderation einer schülerzentrierten Bearbeitung eines Fehlers
- Nachfrage-Techniken zur Konsolidierung von Abgrenzungswissen und Fehlerwissen
- metakognitive Impulse zur gemeinsamen Suche nach Fehlermustern und Ursachen
- Etablierung von Gesprächsregeln, um einen angemessenen Umgang miteinander zu sichern
- …

Methoden zum aktivierenden Umgang mit Fehlern

- Rechen- und Strategiekonferenzen
- Partnerdiagnosen
- Hausaufgabenfolien
- Vorgaben für Berichtigung von Klassenarbeiten
- Fehlerhelferblatt und Fehlerkartei
- …

Aufgaben für das gezieltes Einspeisen typischer Fehler

- … zum Finden und Widerlegen von typischen Fehlern
- ... zum Finden von versteckten Fehler
- … zum Identifizieren und Erklären von Fehlermustern
- … zum Rekonstruieren von Fehlerursachen in kognitionsorientierten Aufgaben
- … zum Entwickeln von Fehlerbearbeitungsstrategien

Kasten 4: *Zusammenfassende Übersicht über Ansätze zum Umgang mit Fehlern*

Typische fehleranfällige Situationen (wie die Besprechung der Hausaufgaben oder die Neuerarbeitung von Inhalten und Verfahren) können in schülerzentrierter Weise methodisch arrangiert werden, etwa durch den Einsatz von vorbereiteten *Hausaufgabenfolien* (Oser/Spychiger 2005; Kaune in diesem Heft) oder durch *Strategiekonferenzen*, in denen sich die Lernenden in Kleingruppen über ihre Vorgehensweisen intensiv austauschen (Götze 2008). Gerade für darin noch Ungeübte eignet sich auch die gegenseitige Hilfe in *Partnerdiagnosen* (Reiff 2006).

Für die eigenständige Beschäftigung mit den eigenen Fehlern auch in Einzelarbeit eignen sich Vorgaben für die *Korrektur der Klassenarbeit* (Kaune in diesem Heft), *Fehlerkarteien* (Schoy-Lutz in diesem Heft) oder *Fehlerhelferblätter* (Ehret/Schmid in diesem Heft; Jost u.a. 1992; Katzenbach 2004), denn alle drei Ansätze geben Rahmen vor zur Initiierung und Strukturierung einer eigenständige Fehleranalyse (s. u.).

Vorgreifendes Einspeisen typischer Fehler durch Aufgaben

Für das Antizipieren von Fehlersituationen ist neben der angesprochenen methodischen Ebene das gezielte Einspeisen typischer Fehler eine entscheidende inhaltliche Dimension: Nicht jeden Fehler muss man selbst begehen, um daraus zu lernen. Bekannte Fehlermuster können schon bei der Unterrichtsplanung berücksichtigt und durch Aufgaben in den Unterricht eingebracht werden, damit Lernende sie analysieren. Nicht zu unterschätzen ist dabei auch, dass einige lieber fremde als eigene Fehler bearbeiten.

Für die Ausgestaltung von Fehlerbearbeitungsaufgaben bieten die im ersten Abschnitt zusammengestellten Ebenen der Fehleranalyse auch für Lernende eine geeignete Stufung mit zunehmendem metakognitiven Anspruch:

- Finden und Widerlegen von typischen syntaktischen und semantischen Fehlern („Was ist hier falsch? Begründe.“ „Welche Regel wurde gebrochen?“)
- Finden von versteckten Fehler („Hier sind zwei Lösungen / Argumentationen mit widersprüchlichen Ergebnissen. Wo könnte der Fehler stecken?“, vgl. Furdek 2002)
- Identifizieren und Erklären von Fehlermustern („Wie hat … hier gedacht / gerechnet?“)
- Rekonstruktion von Fehlerursachen in kognitionsorientierten Aufgaben („Welche Idee oder Fehlvorstellung steckt wohl hinter dem Fehler“? „Wieso ist diese nicht tragfähig? Erkläre.“)
- Entwicklung von Fehlerbearbeitungsstrategien („Wie würdest du ... helfen?“)

Wird die Suche nach Fehlermustern und ihren Ursachen angeregt, können negatives Wissen und eine metakognitive Sensibilisierung für Fehlermuster und Fehlerursachen auch aus den Fehlern anderer erwachsen. Für die Bruchrechnung wird dies im Beitrag von Kathrin Winter und Gerald Wittmann exemplarisch aufgezeigt, Christa Kaune liefert Beispiele auch aus anderen Bereichen.

Fazit

Ein Fehler akzeptierendes Klima allein ist noch kein Garant dafür, dass Fehler tatsächlich als Lernchancen genutzt werden können. Ein produktives Lernen aus Fehlern beginnt bei einer gründlichen Analyse, die neben der Identifizierung möglicher Fehlermuster auch die Rekonstruktion von Fehlerursachen auf syntaktischer und semantischer Ebene umfasst. Nur so kann nachhaltiges Wissen um Fehler und den konstruktiven Umgang mit ihnen entstehen.

Literatur

Furdek, Attila (2002): „Fehler-Beschwörer". Typische Fehler beim Lösen von Mathematikaufgaben, Books on Demand, Norderstedt.

Götze, Daniela (2008): „Lasst uns eine Mathekonferenz machen!" Kommunikation unter Lernenden anregen, um Lösungswege anderer zu verstehen. In: PM 50(24), S. 9-14.

Hefendehl-Hebeker, Lisa / Prediger, Susanne (2006): Unzählig viele Zahlen. Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln. In: PM 48(11), S. 1-7.

Jost, Dominik / Erni, Jakob / Schmassmann, Margret (1992): Mit Fehlern muss gerechnet werden. sabe, Zürich.

Katzenbach, Michael (2004): Dem Fehler auf der Spur - Kinder als Fehlerdetektive. In: Die neue Schulpraxis 74(12), S. 4–8.

Lengnink, Katja (2005): „Abhängigkeiten von Größen" – zwischen Mathematikunterricht und Lebenswelt. In: PM 47(2), S. 13-19.

Leuders Timo / Hußmann, Stephan / Prediger, Susanne (2007): Schülerleistungen verstehen – Diagnose. In: PM 47(15), S. 1-8.

Malle, Günther (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Wiesbaden.

Oser, Fritz / Hascher, Tina / Spychiger, Maria (1999): Lernen aus Fehlern Zur Psychologie des negativen Wissens. In: Althof, Wolfgang (Hrsg.): Fehler-Welten. Leske + Budrich, Opladen, S. 11-41.

Oser, Fritz / Spychiger, Maria (2005): Lernen ist schmerzhaft. Zur Theorie des Negativen Wissens und zur Praxis der Fehlerkultur. Beltz, Weinheim.

Padberg, Friedhelm (2002): Didaktik der Bruchrechnung. Spektrum-Verlag, Heidelberg.

Prediger, Susanne (2009, im Druck): Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. Erscheint in: Fritz-Stratmann, Annemarie / Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Beltz, Weinheim.

Radatz, Hendrik (1980): Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Vieweg, Braunschweig.

Reiff, Rosel (2006): Selbst – und Partnerdiagnose im Mathematikunterricht. Gezielte Förderung mit Diagnosebögen. In: Diagnostizieren und Fördern. Friedrich Jahresheft XXIV, S. 68-72.

Smith, John P. / diSessa, Andrea A. / Roschelle, Jeremy (1993): Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition. In: The Journal of the Learning Sciences 3 (2), S. 115-163.

Spychiger, Maria / Oser, Fritz / Hascher, Tina / Mahler, Fabienne (1999): Entwicklung einer Fehlerkultur in der Schule. In: Althof, Wolfgang (Hrsg.). Fehler-Welten. Leske + Budrich, Opladen, S. 43-69.

Tietze, Uwe-Peter (1988): Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in Algebra und Arithmetik - Theoriebildung und empirische Ergebnisse aus einer Untersuchung. In: Journal für Mathematikdidaktik 9(2/3), S. 163-204.

Vollrath, Hans-Joachim (1978): Lernschwierigkeiten, die sich aus dem umgangssprachlichen Verständnis geometrischer Begriffe ergeben. In: Lorenz, Holger (Hrsg.): Lernschwierigkeiten: Forschung und Praxis. Aulis, Köln, S. 57-73.

vom Hofe, Rudolf (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: Mathematik lehren 118, S. 4-8.

Weinert, Franz E. (1999): Aus Fehlern lernen und Fehler vermeiden. In: Althof, Wolfgang (Hrsg.): Fehler-Welten. Leske + Budrich, Opladen, S. 101-109.

Adresse der Autoren

Prof. Dr. Susanne Prediger
Institut für Erforschung und Entwicklung des Mathematikunterrichts, TU Dortmund
prediger@math.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Gerald Wittmann
Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd
gerald.wittmann@ph-gmuend.de