Multiplizieren und Dividieren mit Brüchen

Du sollst das Multiplizieren und Dividieren mit Brüchen möglichst selbstständig erarbeiten. Neben den Pflichtaufgaben gibt es auch Wahl- und Ergänzungsaufgaben.

Diese Lerneinheit ist in mehrere Teile gegliedert: von ziemlich einfach bis ganz schön schwierig. Du arbeitest mit dem Buch und weiteren Materialien.
Du solltest dich erst einmal alleine um die Aufgaben kümmern, anschließend kannst du die Hilfe deiner Mitschülerinnen und Mitschüler in Anspruch nehmen. Denke daran: In einer Klassenarbeit bist du auch auf dich alleine gestellt.

A. Wie multipliziert man einen echten oder unechten Bruch mit einer Zahl?

Beispiel: $\frac{2}{3} \cdot 5 = ?$

Vorgehen:

1) Erinnere dich an die Grundschulzeit: Was bedeutet eigentlich 3 mal 4 bzw. 3 cm mal 4? Notiere (fasse in Worte) und / oder male ein Bild.
2) Stelle $\frac{2}{3}$ als Bild dar, z.B. als Teil einer quadratischen oder rechteckigen oder kreisförmigen Pizza. Was bedeutet dann $\frac{2}{3} \cdot 5 = ?$ Zeichne und notiere dein Ergebnis.
3) Male Bilder für $\frac{3}{8} \cdot 4$, $\frac{5}{6} \cdot 3$, $\frac{5}{4} \cdot 7$ und $\frac{7}{16} \cdot 2$ und notiere deine Ergebnisse als Regel.
4) Vergleiche deine Regel mit der im Buch formulierten Regel S. 112 unten (roter Kasten).
5) Löse folgende Aufgaben nach dem Muster auf S. 113 Mitte (blauer Kasten).
   Wichtig ist: Frühzeitig kürzen!
   Pflicht: S. 113 Nr. 4 und 5; S. 114 Nr. 6 a) bis d).
6) Hole dir die Testaufgaben, lass deine Lösung von deiner Nachbarin, deinem Nachbarn kontrollieren, zeige mir dein Ergebnis und hole dir meine Unterschrift für das erfolgreiche Bearbeiten von Abschnitt A.

B. Wie multipliziert man eine gemischte Zahl mit einer Zahl?

Beispiel: $4\frac{2}{3} \cdot 5 = ?$

1) Male ein Bild zu dieser Aufgabe und gib das Ergebnis an.
2) Rechnerisch kannst du auf 2 Arten vorgehen:
   a) Du schreibst $4\frac{2}{3}$ als unechten Bruch: $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$. Anschließend gehst du wie in Kapitel A vor: $4\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{14}{3} \cdot 5 = \frac{14 \cdot 5}{3} = ...$
   b) Du denkst daran, dass $4\frac{2}{3}$ eigentlich $(4 + \frac{2}{3})$ bedeutet. Du wendest das Distributivgesetz ($\rightarrow$ nachsehen, was es bedeutet) an und rechnest weiter:
   $$4\frac{2}{3} \cdot 5 = (4 + \frac{2}{3}) \cdot 5 = 4 \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot 5 = 20 + \frac{2}{3} \cdot 5 = ...$$
3) Löse die Aufgaben S. 114 Nr. 9 und Nr. 12 (beides sind Pflichtaufgaben) zunächst auf beide Arten, später auf die Art, die dir bei der jeweiligen Aufgabe am günstigsten erscheint.
4) Hole dir deine Testaufgaben usw.

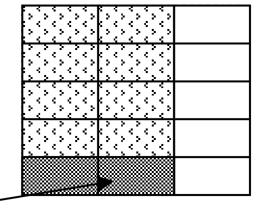
C. Wie dividiert man einen Bruch durch eine Zahl?

Beispiel: $\frac{18}{23} : 6 = ?$ oder $\frac{2}{3} : 5 = ?$

1) Der 1. Fall ist einfach, weil der **Zähler** durch die Zahl teilbar ist. Eine $\frac{18}{23}$– Pizza auf 6 Personen aufzuteilen ist ohne weiteres möglich. Du kannst im Kopf rechnen: $\frac{18}{23} : 6 = \frac{3}{23}$.

2) Der 2. Fall ist nicht unmittelbar zu lösen. Wir schaffen es aber, indem wir ihn auf den 1. Fall zurückführen. Idee: Wir verfeinern!

Also: $\frac{2}{3} : 5$ heißt z.B.: Teile eine $\frac{2}{3}$– Pizza auf 5 Personen auf.



Soviel erhält eine Person

Wenn du jedes Drittel-Stück nochmals in 5 Teile teilst (5-fach-Verfeinerung), kommst du ans Ziel, denn die $\frac{2}{3}$– Pizza ist jetzt eine $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$– Pizza. Eine $\frac{10}{15}$– Pizza ist aber auf 5 Personen aufzuteilen (siehe 1. Fall).

2 ist nicht durch 5 teilbar

$$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} : 5 = \frac{10}{3 \cdot 5} : 5 = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

Ich brauche eine 5-fach-Verfeinerung

Deswegen Bruch mit 5 erweitern

Die mittleren beiden Schritte sparen wir uns: $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$. Denn das zwischenzeitliche Multiplizieren mit 5 und das sofortige Dividieren durch 5 heben sich auf.

3) Wir fassen beide Fälle in einer Regel zusammen (vergleiche mit dem roten Kasten auf S. 115):

Man dividiert einen Bruch durch eine Zahl, indem man
– den Zähler des Bruches durch die Zahl dividiert und den Nenner beibehält
oder
– den Nenner des Bruches mit der Zahl multipliziert und den Zähler beibehält.

In den meisten Fällen wird der 2. Fall vorliegen. Beachte: Vor dem Multiplizieren erst kürzen! Siehe hierzu das Beispiel im blauen Kasten auf S. 116.

Pflichtaufgaben: S. 116 Nr. 5, 6, 7 a) bis d). Untersuche bewusst, ob der 1. Fall vorliegt.

D. Wie dividiert man eine gemischte Zahl durch eine Zahl?

Beispiel: $20\frac{2}{3} : 5 = ?$

1) Rechnerisch kannst du auf 2 Arten vorgehen:

a) Du schreibst $20\frac{2}{3}$ als unechten Bruch: $20\frac{2}{3} = \frac{62}{3}$. Anschließend gehst du wie in Kapitel C vor: $20\frac{2}{3} : 5 = \frac{62}{3} : 5 = \frac{62}{3 \cdot 5} = \frac{62}{15} = 4\frac{2}{15}$.

b) Du denkst daran, dass $20\frac{2}{3}$ eigentlich (20 + $\frac{2}{3}$) bedeutet. Du wendest das Distributivgesetz (→ nachsehen, was es bedeutet) an und rechnest weiter:

$$20\frac{2}{3} : 5 = (20 + \frac{2}{3}) : 5 = 20 : 5 + \frac{2}{3} : 5 = 4 + \frac{2}{3} : 5 = 4 + \frac{2}{3 \cdot 5} = 4\frac{2}{15}$$

Allerdings ist nicht jede Aufgabe nach dieser Methode lösbar. Wann nicht?

2) Pflichtaufgaben: S. 116 Nr. 7 e) bis g), Nr. 8)

3) Hole dir deine Testaufgaben zu den Kapiteln C und D.

E. Zeit zum Üben für vermischte Aufgaben zu den Kapiteln A bis D

Aufgaben S. 117, Aufgaben auf S. 114, die wir noch nicht gerechnet haben, Aufgaben aus den anderen beiden Büchern, Aufgaben auf den kopierten Seiten.

F. Wie multipliziert man zwei echte/unechte Brüche miteinander?

Beispiel: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = ?$

Wir erinnern uns:

– Statt "Multipliziere eine Zahl mit 4" sagt man auch "Bilde das 4-fache von dieser Zahl". Mal-Aufgaben sind "Von-Aufgaben".

– Ein Bruch läßt sich als eine "Durch-Mal-Maschine" auffassen.

Wir übertragen beide Formulierungen auf das obige Beispiel:

– Statt "Multipliziere $\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ " sagen wir "Berechne $\frac{4}{5}$ von $\frac{2}{3}$ " .

– Solche Aufgaben haben wir kennengelernt, als wir z.B. $\frac{4}{5}$ von 2 km berechnet haben:

$\frac{4}{5}$ von 2 km = (2 km : 5) · 4 = ... Erklärung: Wir berechnen zunächst 1 Fünftel von 2 km, dividieren also durch 5, und berechnen dann das Vierfache hiervon, multiplizieren also mit 4. Unser Bruch ist hier also eine "Durch 5 – Mal 4 – Maschine".

Übertragen wir das Vorgehen auf das obige Beispiel:

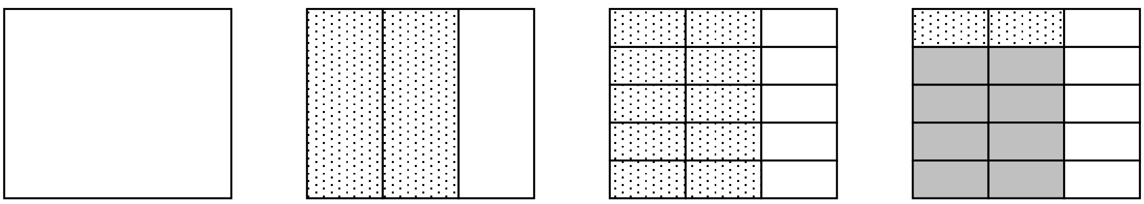
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \text{ von } \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3} : 5\right) \cdot 4 = \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$ (Kürzen war nicht möglich!).

Das Wesentliche steht an diesen Stellen : Wir können den Bruchstrich durchzeichnen und zwischen den beiden Zählern und den beiden Nennern jeweils ein Malzeichen setzen.

> Man multipliziert einen Bruch mit einem zweiten Bruch, indem man den Zähler des ersten Bruchs mit dem Zähler des zweiten Bruchs und den Nenner des ersten Bruchs mit dem Nenner des zweiten Bruchs multipliziert.
> Kurz: "Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner". Als Formel: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Veranschaulichen wir uns dieses:

Das Ganze	2 Drittel davon	5fache Verfeinerung	4 Fünftel von 2 Drittel



	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

Aufgaben: Auswahl aus Nr. 7 bis 12, Nr. 22, 24, 25 a) bis c), 26 auf den Seiten 121 bis 123.
Denke an frühzeitiges Kürzen (falls möglich) entsprechend dem blauen Kasten auf S. 121!

G. Wie multipliziert man einen echten/unechten Bruch mit einer gemischten Zahl bzw. zwei gemischte Zahlen miteinander?

Beispiel: $1\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = ?$ bzw. $1\frac{2}{3} \cdot 6\frac{4}{5} = ?$

Schreibe die gemischte Zahl als unechten Bruch und verfahre dann wie im Kapitel F. beschrieben.

$1\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ Frühzeitig kürzen!

$1\frac{2}{3} \cdot 6\frac{4}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{34}{5} = \frac{5 \cdot 34}{3 \cdot 5} = \frac{34}{3} = 11\frac{1}{3}$ Frühzeitig kürzen!

Aufgaben: Nr. 13 (ein Teil sind Wiederholungsaufgaben) und Nr. 15 auf S. 122

H. Anwendungen zur Multiplikation

Aufgaben: Rechne möglichst viele der Textaufgaben ab Nr. 32 auf den Seiten 124 und 125.

I. Wie dividiert man durch einen Bruch?

Beispiel: $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = ?$ oder $5 : \frac{2}{3} = ?$ oder $3\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = ?$ oder $3\frac{4}{5} : 1\frac{2}{3} = ?$

Wir erinnern uns, was z.B. 12 : 3 bedeutet:

- "Teile 12 in 3 gleiche Teile auf. Wie viele Teile erhältst du?" oder auch
- "Wie oft ist 3 in 12 enthalten?" oder auch
- "Mit welcher Zahl muss man 3 multiplizieren, um 12 zu erhalten?"

Übertragen auf das obige erste Beispiel heißt das: "Teile $\frac{4}{5}$ in $\frac{2}{3}$ gleiche Teile auf", was aber so recht keinen Sinn macht.

Deswegen fragen wir "Wie oft ist $\frac{2}{3}$ in $\frac{4}{5}$ enthalten"?

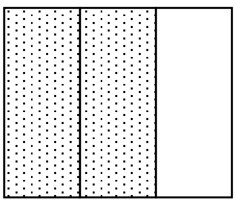
Wir verfeinern: "Wie oft ist $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ in $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ enthalten?" Dies ist aber gleichbedeutend mit der Frage: "Wie oft ist 10 in 12 enthalten?"

Dies ist eine ähnliche Frage wie: "Wie oft ist 6 in 12 enthalten?" Die Antwort hierzu ist:

$12 : 6 = \frac{12}{6} = 2$ mal.

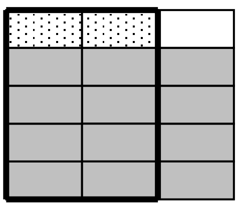
Also: Frage: "Wie oft ist 10 in 12 enthalten?" Antwort: $12 : 10 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ mal.

Wir veranschaulichen an einem Pizzabild:



eine $\frac{2}{3}$ – Pizza

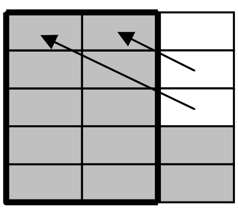
eine $\frac{4}{5}$ – Pizza



Wir verfeinern und stellen fest:

Eine $\frac{4}{5}$ – Pizza ist um eine $\frac{2}{15}$ – Pizza größer als eine $\frac{2}{3}$ – Pizza.

Dies war aber nicht unsere Frage.



Wir ordnen um: Eine $\frac{4}{5}$ – Pizza ist $\frac{12}{10}$ - mal so groß wie eine $\frac{2}{3}$ – Pizza,

d. h. $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

Wir kennen jetzt das Ergebnis, haben aber immer noch keine Regel.

Nehmen wir einfachere Beispiele:

$1:\frac{1}{3}=?$ Wie oft ist $\frac{1}{3}$ in 1 enthalten? Antwort: 3 mal.
$5:\frac{1}{3}=?$ Wie oft ist $\frac{1}{3}$ in 5 enthalten? Antwort: 5 · 3 = 15 mal.
$8:\frac{1}{3}=?$ Wie oft ist $\frac{1}{3}$ in 8 enthalten? Antwort: 8 · 3 = 24 mal.
D. h. "durch $\frac{1}{3}$ " ist offensichtlich dasselbe wie "mal 3"!

$1:\frac{2}{3}=?$ Wie oft ist $\frac{2}{3}$ in 1 enthalten? Da $\frac{2}{3}$ zweimal so groß ist wie $\frac{1}{3}$, kann $\frac{2}{3}$ nur noch $\frac{1}{2}$ mal so oft enthalten sein wie eben, also nur noch $3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ mal. Probe: $1\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$. Stimmt!

$5:\frac{2}{3}=?$ Wie oft ist $\frac{2}{3}$ in 5 enthalten? Da $\frac{2}{3}$ zweimal so groß ist wie $\frac{1}{3}$, kann $\frac{2}{3}$ nur noch $\frac{1}{2}$ mal so oft enthalten sein wie eben, also nur noch $5\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=\frac{5\cdot 3}{2}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$ mal.
$8:\frac{2}{3}=?$ Wie oft ist $\frac{2}{3}$ in 8 enthalten? Da $\frac{2}{3}$ zweimal so groß ist wie $\frac{1}{3}$, kann $\frac{2}{3}$ nur noch $\frac{1}{2}$ mal so oft enthalten sein wie eben, also nur noch $8\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=\frac{8\cdot 3}{2}=\frac{4\cdot 3}{1}=12$ mal.

Was haben wir gemacht? Wir haben statt "durch $\frac{2}{3}$ " "mal 3 mal $\frac{1}{2}$ " oder, was dasselbe ist "mal $\frac{3}{2}$ " gerechnet. $\frac{3}{2}$ ist der **Kehrwert** des Bruches $\frac{2}{3}$. Wir haben also mit dem Kehrwert multipliziert.

Zurück zum obigen Beispiel. Probieren wir es auch hier mit dem Kehrwert:

$$\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 2}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 1}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$$

Multiplizieren Kehrwert des Bruches $\frac{2}{3}$

Wir sehen, dass wir zum selben Ergebnis kommen.

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert <u>dieses</u> Bruches multipliziert.
Als Formel: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Wie gehen wir bei den verschiedenen Aufgabentypen vor?

Beispiele als Muster:
Du siehst: Statt durch einen Bruch zu dividieren, multiplizieren wir immer mit dem Kehrwert dieses Bruches.

a) $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{8 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

b) $8 : \frac{10}{13} = 8 \cdot \frac{13}{10} = \frac{8 \cdot 13}{10} = \frac{4 \cdot 13}{5} = \frac{52}{5} = 10\frac{2}{5}$

c) $6\frac{2}{9} : \frac{2}{3} = \frac{56}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{56 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{28 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$

d) $5\frac{3}{4} : 11\frac{1}{3} = \frac{23}{4} : \frac{34}{3} = \frac{23}{4} \cdot \frac{3}{34} = \frac{23 \cdot 3}{4 \cdot 34} = \frac{23 \cdot 3}{4 \cdot 34} = \frac{69}{136}$

e) Auch die Division durch eine Zahl wie in Kapitel C und D passt hier hin:
$5\frac{5}{9} : 4 = \frac{50}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{50 \cdot 1}{9 \cdot 4} = \frac{25 \cdot 1}{9 \cdot 2} = \frac{25}{18} = 1\frac{7}{18}$ ($\frac{1}{4}$ ist der Kehrwert von 4, denn $4 = \frac{4}{1}$.)

Aufgaben: Auswahl von Nr. 7, 8, 9, 10, 13, 15, 16, 28 auf den Seiten 128 bis 131
Textaufgaben S. 130 Nr. 19 bis 24

nach Wahl: Aufgaben vom Kopienzettel

Ergänzung:
Du kannst nun auch den Quotienten zweier Größen, bei denen Bruchzahlen vorkommen, bilden.
Achtung: Der Quotient zweier Größen enthält, wie wir schon von früher wissen, keine Einheit mehr!
Erklärungen und Aufgaben dazu: S. 132 bis S. 134