NIM-Spiele

Erläuterungen für die Lehrerinnen und Lehrer:

Diese Spiele werden immer zu zweit gespielt. Die Spieler sind abwechselnd an der Reihe. Es gibt einen oder mehrere Haufen von Steinen oder Streichhölzern oder anderen Gegenständen. Der Spieler, der an der Reihe ist, sucht sich einen Haufen aus und nimmt von diesem Haufen eine beliebige Anzahl von Steinen – mindestens allerdings einen Stein und höchstens alle Steine des Haufens.

Man kann durch die Zahl und die Größe der Haufen sehr unterschiedliche Anfangsvoraussetzungen schaffen. Für die Schülerinnen und Schüler stellt sich nach einigen Versuchen die Frage nach einer Spielstrategie. Eine solche Strategie kann je nach Anfangssituation sehr offensichtlich sein oder auch etwas tiefer liegen. Eine allgemeine Analyse der NIM-Spiele geht auf Charles Bouton zurück (siehe Stefanie Hofmann, Schriftliche Hausarbeit im Fach Mathematik, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, 2008).

Für eine Mathematik-AG bieten sich NIM-Spiele mit zusätzlichen Regeln an:

Ellen und Steffen spielen Streichholzziehen: Sie ziehen abwechselnd Streichhölzer von einem Haufen mit insgesamt 20 Streichhölzern. Wer an der Reihe ist, darf 1, 2, 3 oder 4 Streichhölzer vom Haufen nehmen. Es gewinnt derjenige Spieler, der das letzte Streichholz vom Haufen nimmt. Steffen fängt an.

Wenn die Schülerinnen und Schüler das Spiel selber spielen, werden sie schnell feststellen, dass Ellen immer gewinnen kann, wenn sie dafür sorgt, dass nach ihrem Zug immer eine durch 5 teilbare Anzahl von Streichhölzern auf dem Haufen liegt. Die Strategie wird noch deutlicher, wenn die Anfangszahl höher ist, also z. B. 100 Streichhölzer beträgt.

Eine einfache Spielvariante erhält man, indem derjenige zum Verlierer erklärt wird, der den letzten Stein vom Haufen nehmen muss. In diesem Fall gibt es eine Gewinnstrategie für Steffen. Steffen kann mit jedem Spielzug dafür sorgen, dass die Zahl der Streichhölzer auf dem Haufen den Rest 1 bei der Division durch 5 lässt.

Das Spiel kann mit beliebigen Anfangszahlen *n* und beliebigen Begrenzungen *q*≤ *n* für die erlaubte Zahl der wegzunehmenden Streichhölzer gespielt werden. Die Spielstrategie ändert sich dann entsprechend: Gewinnt derjenige Spieler, der das letzte Streichholz vom Haufen nimmt, dann kann Ellen gewinnen, indem sie dafür sorgt, dass nach ihrem Zug immer eine durch *q*+1 teilbare Zahl auf dem Haufen verbleibt. Im anderen Fall gewinnt Steffen, wenn er dafür sorgt, dass nach seinem Zug die Zahl der im Haufen verbleibenden Streichhölzer bei der Division durch *q*+1 den Rest 1 lässt.

In konkreten Fällen werden die Schülerinnen und Schüler schnell eine Strategie finden. Eine allgemeine Strategie setzt viel Spielroutine voraus.

Eine interessante, aber auch schwierige Variante wird in der folgenden Aufgabe der Mathematik-Olympiade gespielt:

**Aufgabe 420813**

Steffi und Thorsten spielen ein Nimm-Spiel. Das geht so:

Beide nehmen abwechselnd *p* Spielsteine von einem Häufchen; dabei muss p eine Primzahl mit 12 < *p* < 52 sein. Das Spiel wird mit 780 Spielsteinen begonnen; Steffi fängt an. Wer den letzten Spielstein wegnimmt, gewinnt das Spiel. Gelingt das keinem von beiden, endet das Spiel unentschieden.

Zeige, dass Steffi bei optimaler Spielweise von Thorsten verlieren muss.

**Lösung:**

Der Lösung liegt wieder das oben beschriebene Prinzip zugrunde:

Zwischen 12 und 52 liegen folgende 10 Primzahlen:

13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Steffi und Thorsten müssen also immer abwechselnd eine dieser Anzahlen von Spielsteinen vom Häufchen nehmen. Thorsten kann erreichen, dass nach einem Zug von Steffi und dem anschließenden Zug von ihm immer genau 60 Spielsteine weggenommen werden, denn es gilt:

13+47=17+43=19+41=23+37=29+31=60

Er erzwingt dies, indem er einfach die von Steffi weggenommene Zahl von Spielsteinen zu 60 ergänzt. Da zu Beginn des Spiels eine durch 60 teilbare Zahl von Spielsteinen (nämlich 780) vorhanden ist, kann Thorsten auf diese Weise nach je 780:60=13 Zügen von beiden schließlich die letzten noch vorhandenen Spielsteine wegnehmen und das Spiel gewinnen.

Daher wird Steffi, wenn Thorsten wie beschrieben spielt, in jedem Fall verlieren.