**Zur Methode des systematischen Probierens**

Probieren im Mathematikunterricht – ist das überhaupt sinnvoll? Warum probiert man, wann ist es sinnvoll zu probieren? Vieles im regulären Mathematikunterricht, aber auch bei Knobelaufgaben besteht aus dem Abarbeiten von erlernten Algorithmen und Rechenroutinen, die den Schülerinnen und Schülern durch ihre Selbstverständlichkeit erst die Bearbeitung von komplexeren Problemstellungen ermöglichen. Was passiert aber, wenn eine Aufgabe nicht mit (den Schülerinnen und Schülern bekannten) Routinen bearbeitbar ist? In diesen Fällen müssen Probierphasen vorangestellt werden, damit für die Schülerinnen und Schüler überhaupt Ansätze zu einer Lösungsfindung erkennbar werden können.

Wichtig ist aber, dass die Probierphase nicht zu lange planlos verläuft, sondern durch das Probieren Strategien und Systematiken erkannt und durchgeführt werden. Die Idee muss darin bestehen, durch systematisches Probieren oder das Untersuchen von Spezialfällen zur Struktur eines Problems und damit zu seiner Lösung vorzudringen.

Probieren ist immer dann sinnvoll, wenn man sich durch das Untersuchen bestimmter Fälle oder das Einsetzen konkreter Werte Aussagen beschaffen kann – oft auch in großer Anzahl– , die man dann auf Regelmäßigkeiten untersucht. Systematisches Probieren bedeutet aber auch eine vorteilhafte Organisation von vorhandenem Datenmaterial, etwa in Form einer Tabelle, von Hilfsfiguren oder andere graphische Darstellungen. Durch diese Neu-Organisation von gegebenem Material können leichter Hypothesen gebildet beziehungsweise diese Hypothesen wiederum an Spezialfällen getestet und auf ihre Stichhaltigkeit überprüft werden. Wichtig ist jedoch immer, dass die gefundenen Lösungen allgemeingültig sind und dies auch überprüft und in höheren Jahrgangsstufen bewiesen wird. Nur dadurch wird die Phase des systematischen Probierens zu einer gültigen mathematischen Methode, mit der auch komplexe Probleme in allen Jahrgangsstufen sinnvoll angegangen und bewältigt werden können.

**Zu den Aufgaben**

Die meisten der Aufgaben in diesem Modul sind sehr einfach und klar formuliert und beschreiben   
–mehr oder weniger– Alltagssituationen. Deshalb erscheinen sie auf den ersten Blick elementar lösbar. Der Motivationseffekt derartiger Aufgaben ist also hoch anzusetzen, was aber nicht bedeutet, dass die Lösungen immer direkt auf der Hand liegen. Gerade aus diesem Grund liegt der Schwerpunkt dieser Aufgaben in dem Erkennen einer Systematik, die zum Erfassen der gesamten Lösungsstruktur führen muss. Hier liegt eine der wesentlichen Aufgaben für die Lehrerinnen und Lehrer, die mit diesem Modul arbeiten wollen.

Klar ist, dass – wie bei vielen Aufgaben, die in diesen Jahrgangsstufen mit Hilfe des systematischen Probierens gelöst werden können – das Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems ebenso zur Lösung der Aufgabe führen kann. Im Regelfall steht diese Methode aber Fünft- und Sechstklässlern nicht zur Verfügung. Deshalb ist es sinnvoll, Alternativen anzubieten, die trotzdem eine mathematisch sinnvoll begründete Lösung ermöglichen. Dabei ist bei allen Aufgaben vor allem auf eine ausreichende Begründung der Systematik zu achten. Es geht hier beispielsweise um die Einschränkung möglicher Zahlbereiche oder die Begründung der Ganzzahligkeit von Lösungen.

Ebenso wichtig ist es, die Probierphase durch vorangestellte Überlegungen so gering wie möglich zu halten, damit die Systematik auch deutlich hervortreten kann. Je umfangreicher –und dann vielleicht auch willkürlicher– eine Probierphase ist, umso weniger tritt die entscheidende Idee hervor, die zu den meisten dieser Aufgaben gehört. Die Vorarbeiten schaffen außerdem eine Vorstrukturierung der Lösungsmöglichkeiten einer Aufgabe und damit, wenn sie sinnvoll durchgeführt werden, auch schon einen deutlich sichtbaren Weg durch den zunächst undurchdringbaren Dschungel der Lösungsansätze.

Die Aufgaben zum systematischen Probieren sind auch deshalb sehr gut für mathematische Arbeitsgemeinschaften geeignet, weil sie selten komplexe mathematische Sachverhalte voraussetzen. Oft sieht man auch einzelne Lösungen sofort oder erhält sie durch das Ausprobieren weniger Zahlenbeispiele. Die eigentliche Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler besteht dann darin, den durch Probieren vorgezeigten Lösungsweg zu systematisieren. Die Aufgabe der Lehrerinnen und Lehrer besteht darin, die Notwendigkeit eines derartigen Prozesses bei den Schülerinnen und Schülern anzuregen und begreiflich zu machen. Gerade durch die nicht vorhandene Eindeutigkeit vieler derartiger Aufgaben und damit die Existenz mehrerer - oft auch unendlich vieler - verschiedener Lösungen lässt sich die Notwendigkeit einer Systematik gut einführen. Aber auch die Notwendigkeit einer Probe zur Sicherstellung der Existenz einer Lösung lässt sich mit vielen derartigen Aufgaben gut thematisieren. Wenn durch den Aufgabentext oder die Anwendungssituation nicht eindeutig die Existenz einer Lösung garantiert ist, muss immer eine Probe am Aufgabentext durchgeführt werden, um sicherzustellen, dass auch alle Bedingungen der Aufgabe durch die vermeintliche Lösung erfüllt werden.

Da im regulären Mathematikunterricht solche Aufgabentypen eher selten vorkommen, bietet dieses Modul gleichzeitig die Möglichkeit, derartige logische mathematische Strukturen, die im weiteren Verlauf der mathematischen Ausbildung unverzichtbar sind, auf elementare Art und Weise im Unterricht oder in einer Arbeitsgemeinschaft zu thematisieren. Wenn bei den Schülerinnen und Schülern schon der Blick dafür geschärft wird, dass nicht jede gestellte Aufgabe eine eindeutige Lösung haben muss, ist für den weiteren Mathematikunterricht viel gewonnen.

# Olympiadeaufgabe 430521

Die erste Aufgabe ist sehr elementar und soll das Prinzip des systematischen Probierens veranschaulichen. Selbstverständlich ist bei einer derartigen Aufgabe auch die direkte Angabe einer gefundenen Lösung ohne Systematik durch die Schülerinnen und Schüler möglich.

**Aufgabe:**

Fünf Kinder, Andrea, Bettina, Christian, Dirk und Eva, reden über ihre Murmeln.

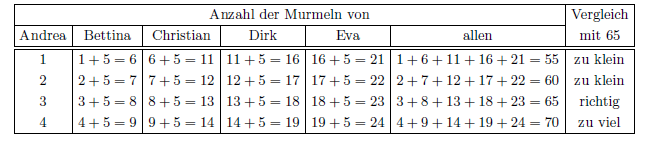
* Andrea sagt: Zusammen haben wir 65 Murmeln.
* Bettina sagt: Ich habe fünf Murmeln mehr als Andrea.
* Christian sagt: Ich habe fünf Murmeln mehr als Bettina.
* Dirk sagt: Ich habe fünf Murmeln mehr als Christian.
* Eva sagt: Ich habe fünf Murmeln mehr als Dirk.

Wie viele Murmeln haben die Kinder jeweils?

**Lösungsvorschlag:**

Durch das Aufstellen einer systematischen Probiertabelle kommt man zu der folgenden Übersicht. Dabei werden die Bedingungen der Aufgabe zur Berechnung der Murmelanzahlen

gleich benutzt. Die erste Erkenntnis ist, dass Andrea die geringste Murmelanzahl haben muss.



Da die Gesamt-Murmelanzahl mit steigender Anzahl von Andreas Murmeln immer weiter

steigt, gibt es nur die Lösung, die mit drei Murmeln bei Andrea beginnt.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Natürlich lässt sich diese Aufgabe auch lösen, wenn man nicht erkennt, dass Andreas Murmelanzahl minimal ist. Viele Schülerinnen und Schüler werden auch nicht alle Fälle wie in der oben abgedruckten Tabelle aufschreiben bzw. nicht die Notwendigkeit sehen, alle Fälle aufzuschreiben. Das ist in diesem Fall auch als korrekt anzusehen, da sich die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung aus der konkreten Aufgabenstellung ergibt. Dennoch erscheint es sinnvoll, auch an dieser Stelle die Schülerinnen und Schüler schon für diese Problematik zu sensibilisieren. Gerade weil diese Aufgabe so überschaubar bleibt, lassen sich auch diese manchmal schwierigen Fragestellungen elementar thematisieren.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Eine sehr ähnliche Aufgabe findet sich im Aufgabenpool der 6. Jahrgangsstufe. Nach der Besprechung der vorangegangenen Aufgabe sollte sich diese von den Schülerinnen und Schülern problemlos selbstständig bearbeiten lassen.

# Olympiadeaufgabe 430621

**Aufgabe:**

Fünf Kinder, Andrea, Bettina, Christian, Dirk und Eva, reden über ihre Murmeln.

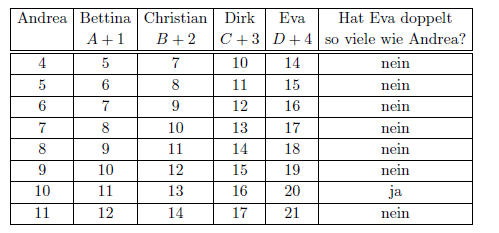
* Andrea sagt: Eva hat doppelt so viele Murmeln wie ich.
* Bettina sagt: Ich habe eine Murmel mehr als Andrea.
* Christian sagt: Ich habe zwei Murmeln mehr als Bettina.
* Dirk sagt: Ich habe drei Murmeln mehr als Christian.
* Eva sagt: Ich habe vier Murmeln mehr als Dirk.

Wie viele Murmeln haben die Kinder jeweils?

**Lösungsvorschlag:**

Ein sinnvolles Verfahren zur Lösung ist die Probiertabelle. Hier kann man die Anzahl der

Probierschritte einschränken, wenn man folgendes beachtet: Eva hat doppelt so viele Murmeln wie Andrea, Andrea hat die wenigsten und Eva hat die meisten Murmeln. Also müssen zwischen der Anzahl der Murmeln von Andrea und der von Eva noch 3 Anzahlen liegen. Somit beginnt man die Tabelle mit der Anzahl 4 für Andrea, Eva hätte dann 8 und dazwischen liegen 3 Zahlen.



Die Tabelle kann hier abgebrochen werden, weil die Anzahl der Murmeln von Eva kleiner

als das Doppelte der Anzahl der Murmeln von Andrea wird.

Die Lösung lautet: Andrea hat 10 Murmeln, Bettina hat 11 Murmeln, Christian hat 13

Murmeln, Dirk hat 16 Murmeln und Eva hat 20 Murmeln.

# Olympiadeaufgabe 390624

Auch die folgende Aufgabe stellt eine Strategie des systematischen Probierens in Verbindung zu einer Suche eines kleinsten Ausgangselements. Diese Strategie eines minimalen Ausgangspunkts ist immer dann sinnvoll, wenn sich viele Anzahlen aus dieser kleinsten gegebenen Größe ermitteln lassen. Zum einen bleibt der Rechenaufwand in einem erträglichen Rahmen, zum anderen wird auch durch eine konsequente Beachtung aller in Frage kommenden Werte dieses kleinsten Elements keine mögliche Lösung übersehen.

**Aufgabe:**

Nach einer Aufgabe des indischen Mathematikers MAHAVIRA (9. Jahrhundert):

„Granatäpfel werden zu 3 Stück für zwei Münzen, Mangofrüchte zu 5 Stück für drei Münzen und Wildäpfel zu 7 Stück für fünf Münzen verkauft. Wie kann man mit 108 Münzen so viele Früchte kaufen, dass man fünfmal so viele Mangofrüchte und sechsmal so viele Granatäpfel wie Wildäpfel hat?“

**Lösungsvorschlag:**

Auch diese Aufgabe kann man durch zwei Vorüberlegungen und eine systematische Tabelle sehr schnell lösen. Sinnvoll ist zunächst die Überlegung, dass die Anzahl der Wildäpfel die kleinste aller drei vorkommenden Früchte ist. Die zweite Überlegung besteht darin, dass, wenn man immer mit ganzen Münzen bezahlen muss, auch nur Siebener-Einheiten von Wildäpfeln in Frage kommen.

Die kleinste Anzahl an Wildäpfeln ist demnach 7, daraus folgen fünf Mal so viele, also 35 Mangofrüchte und sechs Mal so viele, also 42 Granatäpfel. Der Preis für diese Früchte beträgt Münzen.

Da nun genau doppelt so viele Münzen ausgegeben werden sollen, muss man auch von jeder Fruchtsorte doppelt so viele Einheiten kaufen. Die Lösung besteht also aus einem Korb mit 14 Wildäpfeln, 70 Mangofrüchten und 84 Granatäpfeln, die zusammen genau 108 Münzen kosten.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Die Eindeutigkeit ergibt sich bei dieser Aufgabe aus der Systematik, dass mit den beiden kleinstmöglichen Anzahlen an Wildäpfeln begonnen wird und alle nachfolgenden Frucht-Zusammenstellungen immer mehr Früchte enthalten und damit teurer als 108 Münzen

werden.

# Olympiadeaufgabe 390512

Auch die folgende Aufgabe ist selbstverständlich in endlicher Zeit durch bloßes Probieren lösbar. Vielleicht ist eine derartige Phase nach dem Stellen der Aufgabe sogar gut, um nachfolgend Aussagen über eine Systematik oder die Lösungsgesamtheit zu erhalten. Die im Lösungsvorschlag vorgestellte Systematik eignet sich auch gut zur Übertragung auf ähnliche Ausfüllprobleme, die ein bestimmtes Muster als Lösung voraussetzen.

**Aufgabe:**

Ein Briefmarkensammler möchte auf eine Seite seines Albums ein quadratisches Muster von vier mal vier Briefmarken kleben. Er wählt dazu einen Briefmarkensatz, in dem es Marken von 1, 2, 3, 4 und 5 Groschen gibt; von allen diesen Marken hat er genügend.

Er möchte sein Muster so anlegen, dass folgende Regeln gelten:

*In keiner Zeile, in keiner Spalte, auf keiner Diagonalen und auf keiner Parallelen zu einer Diagonalen sollen zwei Marken mit gleichem Wert vorkommen.*

1. Gib eine solche Verteilung an.
2. Der Briefmarkensammler fragt sich, welchen maximalen Wert die 16 verwendeten Briefmarken haben können. Finde diesen Wert heraus und zeige, dass sich 16 Briefmarken unter Beachtung aller Regeln so anordnen lassen. (Maximaler Wert bedeutet: Es gibt keinen größeren Wert. Du musst also zeigen, dass es wirklich keinen größeren Wert gibt.)

**Lösungsvorschlag:**

a. Die Lösung erzielen wir durch systematisches Probieren. Dazu brauchen wir ein Ordnungs­prinzip für die Reihenfolge der Probierschritte. Das folgende Vorgehen liegt nahe:

Wir füllen die 16 Felder zeilenweise von links oben nach rechts unten. Links oben fangen wir mit der kleinsten Zahl an, der 1. Das nächste Feld füllen wir jeweils mit der kleinsten zur Verfügung stehenden Zahl. Damit ergibt sich die erste Zeile zu 1, 2, 3, 4. Die nächste Zeile kann nur mit einer 3 beginnen – die 1 scheidet aus, weil die gleiche Spalte schon eine 1 enthält, die 2, weil sie schon in einer Parallelen zur Diagonalen steht. So ergibt sich schließlich die zweite Zeile zu 3, 4, 1, 2. Bei der Fortsetzung erkennen wir, dass sich auf diese Weise das dritte Feld in der dritten Zeile nicht mehr regelgerecht füllen lässt (siehe Abb. L 390512a: Dieser Lösungsversuch ist also gescheitert. Wir müssen neu beginnen:

Wenn wir mit einer 1 links oben anfangen, wo darf dann noch die 1 vorkommen? Die Abb. L 390512b zeigt durch ein „\*“ alle für eine 1 verbotenen Felder – wir sehen, dass in dem Quadrat drei Mal die 1 vorkommen kann. Entsprechend können wir die 2 und die 3 eintragen (Abb. L 390512c), und wir erkennen leicht, wie die restlichen sechs Felder vervollständigt werden können (Abb. 390512d). Diese Abbildung zeigt eine Lösung. Weitere Lösungen kann man aus dieser erhalten, indem man die Plätze von je zwei Zahlen vertauscht, wie z.B. aus Abb. L 390512e ersichtlich. Hier wurden die 2 und die 4 vertauscht.

b. Für den maximalen Wert muss die 5 vier Mal vorkommen. Der maximale Wert beträgt . Die Abb. L 390512f zeigt eine solche Verteilung. Wir haben sie aus der Lösung aus Abb. L 390512d erhalten, indem die Zahlen 2 und 5 ihre Plätze tauschen.



**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Gerade wenn Schülerinnen und Schüler schon länger probiert haben, ohne auf eine Lösung zu kommen, stellt sich von selbst die Frage nach einer systematischen Herangehensweise. Ob jetzt genau die oben beschriebene genutzt werden muss oder eine ähnliche, von den Schülerinnen und Schülern selbst gefundene, ist zweitrangig. Mehrere verschiedene Lösungsansätze erhöhen natürlich das Verständnis für ein systematisches Vorgehen an sich. Wichtig ist es aber immer, Erweiterungsmöglichkeiten der Aufgabe ins Auge zu fassen. So stellt sich etwa die Frage nach der Gesamtheit aller Lösungen. Hier zeigt sich jetzt natürlich, ob ein systematisches Vorgehen wirklich bis zum Ende einer Aufgabe trägt, was bei der bloßen Angabe einer einzelnen Lösung nicht unbedingt notwendig ist. Auch nach dieser Belastbarkeit kann die Güte einer bestimmten Vorgehensweise beurteilt werden.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Viele Zahlenrätsel benötigen ähnliche Strategien zur Lösungsfindung. Der Aufbau von magischen Quadraten hat ähnliche Vorgaben in der Aufgabenstellung, die erfüllt werden müssen. Aber auch bei Sudokus können gewisse systematische Probieralgorithmen der Art, wie sie in der vorstehenden Aufgabe beschrieben wurden, gewinnbringend angewendet werden.