**Weiterführung der Methode des systematischen Probierens**

Nachdem im ersten Modul zum systematischen Probieren in die elementaren Techniken dieser Methode eingeführt wurde, beschäftigt sich diese Zusammenstellung von Aufgaben mit deutlich komplexeren Fragestellungen. Es ist deshalb sehr sinnvoll, zunächst den ersten Teil des Moduls mit den Schülerinnen und Schülern bearbeitet zu haben, damit nicht die zusätzlichen Schwierigkeiten, die sich in jeder der folgenden Aufgaben befinden, von der eigentlichen Methode ablenken. Andererseits können gerade diese Besonderheiten für Schülerinnen und Schüler, die die Grundsätze der Methode beherrschen, besondere Herausforderungen bieten. Das soll allerdings nicht heißen, dass die Aufgaben in diesem Modul nur von mathematisch besonders guten Schülerinnen und Schülern lösbar sind. Eventuell können die Besonderheiten jeder Aufgabe vorab mit allen besprochen werden, damit die an sich sehr sinnvolle Probierphase nicht durch zu viele nicht zielführende Ansätze in die Länge gezogen wird.

# Olympiadeaufgabe 460524

Die folgende Aufgabe unterscheidet sich stark von den bisher betrachteten. Alleine die Unklarheit, welche der Aussagen welchen Wahrheitsgehalt haben, lässt vielleicht einige Schülerinnen und Schüler vor der Bearbeitung der Aufgabe zurückschrecken. Dabei zeigt sic h gerade in solchen Fällen der Wert eines systematischen Vorgehens und der tabellarischen Darstellung aller 15 möglichen Fälle.

**Aufgabe:**

Von sechs Schülerinnen, die an der zweiten Stufe der Mathematik-Olympiade teilgenommen

haben, haben genau zwei 36 Punkte erreicht. Fünf der Korrektoren wurden gefragt, welche

Mädchen es waren. Sie sagten:

(1) „Ich glaube, es waren Anja und Cornelia.“

(2) „Soweit ich mich erinnere, waren es Barbara und Dorothea.“

(3) „Ich habe mir Friederike und Anja gemerkt.“

(4) „Nein, nein, nein, es waren Barbara und Elke!“

(5) „Meine Erinnerung sagt: Dorothea und Anja.“

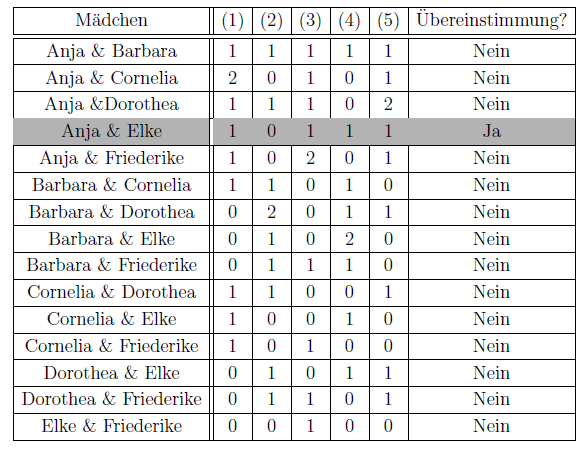
Nun ist bekannt, dass bei einer Antwort beide Namen nicht stimmten, während bei den anderen vier Antworten jeweils ein Mädchen wirklich 36 Punkte erreicht hat und eines nicht. Welche beiden Mädchen erhalten die Urkunden für ihre 36 Punkte?

**Lösungsvorschlag:**

Die Lösung der Situation lässt sich mit einer Tabelle erhalten, bei der für jede mögliche

Kombination der auszuzeichnenden Mädchen dargestellt ist, ob jeweils die Aussagen (1) bis (5) für keine der Erwähnten stimmen (ergibt als Eintrag eine 0), für eine der Erwähnten (ergibt als Eintrag eine 1) oder für beide (ergibt als Eintrag eine 2). Da einmal keine Übereinstimmung auftreten soll und viermal eine Übereinstimmung bei genau einem Mädchen, wird jetzt nach Zeilen gesucht, in denen genau viermal eine 1 und einmal eine

0 auftaucht. Die folgende Tabelle zeigt, nur in einem einzigen Fall ergibt sich eine Übereinstimmung, also haben Anja und Elke jeweils 36 Punkte.



**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Bei dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler einen Ansatz finden, wie der Wahrheitsgehalt der fünf gemachten Aussagen zu ermitteln ist. Das geht nicht ohne zusätzliche Nebenbedingungen. Hier bietet es sich häufig an, mögliche Lösungen anzunehmen und davon ausgehend die zuvor gemachten Aussagen zu betrachten. Ergibt sich dabei ein Widerspruch, ist die Annahme einer Lösung falsch gewesen. Dieses Vorgehen nach Art eines indirekten Beweises wird in dieser Aufgabe für die Gesamtheit aller möglichen Fälle durchgeführt, um die Eindeutigkeit der erhaltenen Lösung nachzuweisen. Auch hier ergibt sich durch die Aufgabenstellung eigentlich die Existenz und die Eindeutigkeit, ohne dass der Nachweis noch einmal explizit geführt werden müsste. Trotzdem zeigt die tabellarische Übersicht den Schülerinnen und Schülern deutlich die Stärke dieser Methode und die Klarheit der erzielten Darstellung.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Die folgende Olympiadeaufgabe aus der Regionalrunde der 5.Jahrgangsstufe wird ebenfalls mit der Methode der vollständigen Betrachtung aller in Frage kommenden Möglichkeiten gelöst. Hier spielen allerdings auch Elemente der Logik ein große Rolle, mit denen der Wahrheitsgehalt der Folgerungsaussagen beurteilt werden muss. Da dies vielleicht intuitiv klar ist, aber nicht aus dem Mathematikunterricht vorausgesetzt werden kann, sollte man die Wahrheitstafel einer Wenn-Dann-Beziehung eventuell vor der Bearbeitung dieser Aufgabe besprechen.

# Olympiadeaufgabe 480523

**Aufgabe:**

In der Einladung zur Siegerehrung der Mathematik-Olympiade möchte der Lehrer Herr Henning den Schülern Alex, Benny und Claudia nur verraten, dass sie die ersten drei Plätze belegt haben, aber

nicht, wer welchen Platz belegt hat. Herr Henning macht folgende vier wahre Aussagen:

(1) Alex hat gewonnen oder Claudia hat gewonnen.

(2) Wenn Alex Zweiter ist, hat Benny gewonnen.

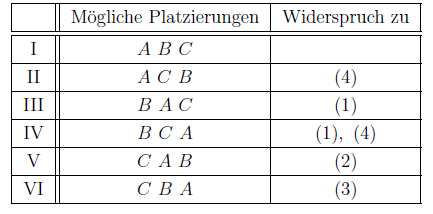
(3) Wenn Alex Dritter ist, dann hat Claudia nicht gewonnen.

(4) Alex ist Zweiter oder Benny ist Zweiter.

Wer darf sich über den ersten, zweiten und dritten Platz freuen?

**Lösungsvorschlag:**

Wir erfassen systematisch alle möglichen Platzierungen und schließen diejenigen Platzierungen aus, die einer der wahren Aussagen (1) bis (4) widersprechen.



In den Fällen II bis VI entsteht mindestens ein Widerspruch zu den Aussagen (1) bis (4). Als

einziger Fall, der allen Bedingungen genügt, verbleibt Fall I mit der Reihenfolge

1. Alex, 2. Benny und 3. Claudia.

Bei der Überprüfung, ob in diesem Fall tatsächlich alle vier Aussagen wahr sind, muss man

beachten, dass eine Aussage, deren Voraussetzung falsch ist, unabhängig von der Behauptung stets wahr ist.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Wenn die Methode der Betrachtung der Lösungsgesamtheit und des indirekten Vorgehens vom Prinzip den Schülerinnen und Schülern bekannt ist, sollte die Erstellung der Lösungstabelle bei dieser Aufgabe keine allzu großen Schwierigkeiten bieten. Interessant bleibt anschließend die Diskussion über den Wahrheitsgehalt der 2. und 3. Aussage bei der korrekten Reihenfolge Alex, Benny und Claudia. Aber auch wenn die Schülerinnen und Schüler zunächst alle möglichen Lösungsmöglichkeiten zu einem Widerspruch führen, ergibt sich anschließend eine fruchtbare Diskussion – entweder über die Korrektheit der Aufgabenstellung oder anschließend über die Schlüssigkeit der Wahrheitstafel einer Folgerungsbeziehung.

# Olympiadeaufgabe 500621

In dieser Aufgabe wird schon durch den Aufgabentext die Vermutung nahe gelegt, dass es mehrere Lösungen geben wird – wie viele, geht aus dem Text allerdings nicht hervor. Damit wird eine systematische Betrachtung insbesondere der Ränder der betrachteten Bereiche bei dieser Aufgabe besonders wichtig.

**Aufgabe:**

Carola und Manuela freuen sich über die wärmende Sonne im Frühling und summen das Lied

”Alle Vögel sind schon da“ vor sich hin. In dem großen Kirschbaum sehen sie Amseln, Drosseln, Finken und Stare, die auch die Sonne genießen. Carola meint zu Manuela: ”Ich zähle, wie viele Vögel es insgesamt sind, und du zählst, wie viele Vögel von welcher Art auf dem Baum sitzen.“ Carola stellt fest, dass es insgesamt 54 Vögel sind. Manuela fasst ihre Beobachtungen zusammen: ”Es sind halb so viele Drosseln wie Amseln und dreimal so viele Finken wie Drosseln. Und dann bin ich sicher, dass es weniger als 15 Stare waren. Sie flogen so schnell weg, deshalb weiß ich es nicht genauer.“

Manuela überlegt eine Weile und sagt dann: ”Das ist aber schade, denn nun können wir nicht genau ermitteln, wie viele Amseln, Drosseln, Finken und Stare in dem Baum saßen.“

Ermittle alle Anzahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen, und mache jeweils eine Probe.

**Lösungsvorschlag:**

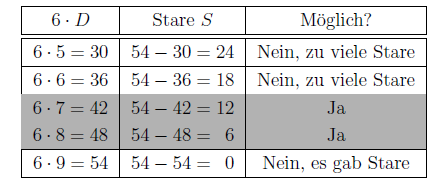
Es seien A, D, F und S die Anzahlen der Amseln, Drosseln, Finken und Stare. Die Gesamtzahl setzt sich zusammen aus A + D + F + S = 54.

Aus den Angaben von Manuela weiß man, dass 2・D = A und 3・ D = F gilt.

Ersetzt man die Anzahl der Amseln und der Finken in der obigen Gleichung, so erhält man

2D + D + 3D + S = 54. Diese Gleichung kann man zusammenfassen zu 6D + S = 54.

Durch systematisches Probieren erhält man folgende Möglichkeiten:



Mit Hilfe der Gleichungen 2 ∙D = A und 3 ∙ D = F können jetzt die Anzahlen der Amseln

und Finken bestimmt werden.

Es gibt also zwei Möglichkeiten für die Anzahlen:

I) Es waren 7 Drosseln, 21 Finken, 14 Amseln und 12 Stare oder

II) Es waren 8 Drosseln, 24 Finken, 16 Amseln und 6 Stare.

Die beiden genannten Möglichkeiten erfüllen tatsächlich die gestellten Bedingungen:

Wegen 16 + 8 + 24 + 6 = 54 und 14 + 7 + 21 + 12 = 54 sind es in beiden Fällen insgesamt

54 Vögel. Da 8 die Hälfte von 16 und 7 die Hälfte von 14 ist, sind es halb so viele Drosseln wie Amseln

Wegen 24 = 3 ・ 8 und 21 = 3 ・ 7 sind es dreimal so viele Finken wie Drosseln.

Wegen 6 < 15 und 12 < 15 ist auch die letzte der gestellten Bedingungen erfüllt.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Die Vorbereitung, bevor die eigentliche systematische Betrachtung in einer Tabelle bei dieser Aufgabe beginnt, ist relativ umfangreich und vielleicht für die Jahrgangsstufe aufgrund fehlender Kenntnisse in der Gleichungslehre nur schwer zu bewerkstelligen. Dennoch ergibt sich hier ein Beispiel, bei dem sowohl die vorhandene Lösung nicht ausschließlich durch Probieren gefunden werden kann als auch die gefundenen Lösungen deutlich gegenüber den Fällen, die nicht zur Lösungsmenge gehören, mit verschiedenen Argumenten abgegrenzt werden müssen. Auch die Probe gehört in dieser Aufgabe unverzichtbar hinzu, da nicht klar ist, dass alle gemachten Aussagen für die Berechnung der Lösung wirklich notwendig waren. Damit könnte sich der Fall ergeben, dass durch die Probe am Aufgabentext noch eine oder mehrere der Lösungen ausgeschlossen werden müssen.

# Olympiadeaufgabe 490633

Als letztes Beispiel dieses Moduls soll eine recht schwierige Aufgabe stehen, die mehrere der bisher behandelten Aspekte zusammenführt. Elemente der Mehrdeutigkeit der Lösung, der systematischen Probiertabelle und dem Ansatz des Rückwärtsrechnens müssen zunächst einmal von den Schülerinnen und Schülern gefunden und anschließend geeignet kombiniert werden, um an die Lösung dieser Aufgabe zu gelangen.

**Aufgabe:**

Frau Hase hat in ihrem Garten einen Kirschbaum gepflanzt, den sie am Wochenende ganz stolz betrachtet, denn in diesem Jahr trägt er endlich Früchte und diese werden nun nacheinander reif. An jedem Tag pflückt sie die neu gereiften Kirschen.

Am Montag kann sie die ersten vier Kirschen ernten, am Dienstag pflückt sie ein Drittel aller

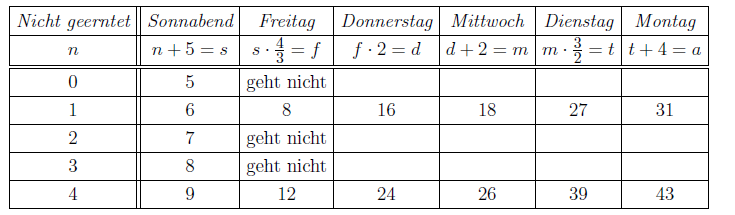
noch am Baum befindlichen Kirschen. Am Mittwoch kann Frau Hase leider nur zwei rote

Kirschen ernten. Dafür kann sie am Donnerstag die Hälfte der verbleibenden Kirschen genießen. Am Freitag erntet sie zusammen mit ihrer Freundin ein Viertel der restlichen Kirschen. Am Sonnabend kann sie sich noch fünf Kirschen gönnen, und dann verbleiben weniger als 5 Kirschen auf dem Baum.

Wie viele Kirschen kann der Baum von Frau Hase getragen haben?

**Lösungsvorschlag:**

Es bietet sich hier an, mit einer Probiertabelle zu arbeiten und rückwärts zu rechnen:



Ebenso kann man mit einer Tabelle „vorwärts rechnen“ – dann bedarf es allerdings eines

Arguments, mit welchen Zahlen begonnen wird.

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass es genau zwei Lösungen gibt: Entweder waren 43 Kirschen an ihrem Baum oder 31 Kirschen.

*Hinweis*: Wenn die beiden Lösungen durch Probieren gefunden wurden, dann muss auch

nachgewiesen werden, dass es keine weiteren Lösungen geben kann.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Auch bei dieser Aufgabe ist der oben genannte Lösungsvorschlag natürlich nur einer von vielen möglichen. Trotzdem erscheint es sinnvoll, noch einmal deutlich auf die großen Vorteile des Prinzips des Rückwärtsrechnens hinzuweisen. Alle notwendigen Begründungen zur Vollständigkeit der durchgeführten Betrachtungen erleichtern sich um ein Vielfaches, wenn von diesem Prinzip ausgegangen wird. Nach der erfolgreichen Bearbeitung dieser Aufgabe sollten die Schülerinnen und Schüler über ein ausreichendes Repertoire in diesem Themenfeld verfügen, um gewisse Elemente auch sinnvoll in anderen mathematischen Bereichen oder bei Problemlösungen in Klassenarbeiten anwenden zu können.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

In den Aufgabensammlungen der Mathematikolympiade finden sich noch sehr viele weitere Beispiele – sowohl einfacherer als auch wesentlich schwierigerer Natur -, die zur weitergehenden Beschäftigung mit diesem mathematischen Themenfeld Anregungen bieten. Eine zweite Zusammenstellung zum Themenfeld „systematisches Probieren“ gibt es auch noch als Modul für die Jahrgangsstufen 7 und 8.