### Olympiadeaufgabe 480612

# Aufgabe:

Christian erklärt Sarah, dass es *arme* und *reiche* Zahlen gibt. „Arm ist eine Zahl, wenn die Summe der echten Teiler kleiner als die Zahl selbst ist. Reich ist eine Zahl, wenn die Summe der echten Teiler größer als die Zahl selbst ist.“

Dazu muss man wissen, was ***Teiler*** und ***echte Teiler*** einer Zahl sind. An Beispielen versteht man sofort, was Teiler sind:

* 3 ist ein Teiler von 15, weil man 15 durch 3 ohne Rest teilen kann.
* 14 ist kein Teiler von 35, weil man 35 nicht ohne Rest durch 14 teilen kann.
* Aber auch: 1 ist ein Teiler von 7, weil man 7 ohne Rest durch 1 teilen kann.
* Und natürlich ist jede Zahl von sich selbst Teiler!

Die ***echten Teiler*** einer Zahl sind alle Teiler außer der 1 und der Zahl selbst. (Beispiel: 30 hat die ***Teiler*** 1, 2, 3, 5, 10, 15 und 30 und die ***echten Teiler*** 2, 3, 5, 6, 10 und 15. Die Summe der echten Teiler der 30 ist dann 41.)

1. Sarah fragt: „Gibt es unter den Zahlen 9, 16, 18, 20, 25 und 36 reiche Zahlen?“
2. Sarah fordert nun Christian auf, unter den Zahlen von 1 bis 99 die kleinste und die größte *reiche* Zahl zu finden. (Achtung! Es ist die größte reiche Zahl gesucht, nicht die „*reichste*“!)
3. Sarah stellt fest: „Primzahlen sind die *ärmsten* Zahlen!“ Stimmt das?

**Lösungshinweis:**

1. Mit Hilfe der folgenden Tabelle findet man die reichen Zahlen schnell heraus:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zahl | Summe der echten Teiler | Relation |
| 9 | 3 | 9>3 |
| 16 | 2+4+8=14 | 16>14 |
| 18 | 2+3+6+9=20 | 18<20 |
| 20 | 2+4+5+10=21 | 20<21 |
| 25 | 5 | 25>5 |
| 36 | 2+3+4+6+9+12+18=54 | 36<54 |

Demnach sind die Zahlen 18, 20 und 36 reich.

1. Die Summe der Teiler von 96 ist 2+3+4+6+8+12+16+24+32+48=155>96. Die Zahl 97 hat keine echten Teiler und die Zahlen 98 und 99 haben als Summen ihrer echten Teiler 2+7+14+49=72<98 und 3+9+11+33=56<99. Daher ist 97 die größte reiche Zahl zwischen 1 und 99.
2. Primzahlen haben als Summe ihrer echten Teiler immer 0. Eine kleinere Summe echter Teiler ist nicht möglich.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Mit den in dieser Aufgabe eingeführten Begriffen können Schülerinnen und Schüler unmittelbar Vorstellungen verbinden. Die Aufgabenstellung regt zu umfangreichen Untersuchungen an, deren Ergebnisse zu weiteren Fragestellungen und Begriffsbildungen führen: Wie viele Zahlen muss man untersuchen, um alle Teilerpaare zu finden? Wie kann man sinnvoll „Reichtum“ von unterschiedlichen Zahlen miteinander vergleichen? Gibt es Zahlen, die weder reich noch besonders arm sind (vollkommene Zahl, falls die Summe der echten Teiler und 1 gleich der Zahl ist)? Kann an der Primfaktorzerlegung erkennen, ob Zahlen reich oder arm sind?

Es gibt zu dieser Thematik tiefgehende Fragen der Zahlentheorie, die sehr elementar formuliert werden können: Gibt es unendlich viele vollkommene Zahlen? Gibt es eine Formel für vollkommene Zahlen? Die Zahlen 220 und 284 sind miteinander befreundet, d.h. die Summe von 1 und den echten Teilern von 220 ergibt 284 und die Summe von 1 und den echten Teilern von 284 ergibt 220. Es kann immer nur eine arme mit einer reichen Zahl oder eine vollkommene Zahl mit sich selbst befreundet sein. Die Suche nach großen vollkommenen Zahlen oder Paaren befreundeter Zahlen ist sehr schwierig. Hier bietet sich eine Internetrecherche zu den bisher bekannten Ergebnissen an. Dabei können Geschichten zur Suche nach den Lösungen zu den erarbeiteten Fragen und zu den Schwierigkeiten bzw. dem Aufwand, der mit dieser Suche zusammenhängt, zusammengestellt werden.

# Summen aufeinanderfolgender, natürlicher Zahlen

Die folgenden drei Aufgaben behandeln aufeinander aufbauend die Thematik von aufeinanderfolgenden Zahlen. Sie lassen sich wegen ihres entdeckenden Charakters und der Möglichkeit, weiterführend zu experimentieren und eigene Fragen zu formulieren, als zusammenhängendes Forschungsprojekt behandeln.

#### Olympiadeaufgabe 360613

**Aufgabe:**

Die Zahl 135 kann in verschiedener Weise als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dargestellt werden, wobei die 0 nicht als Summand zugelassen werden soll. Beispiele:

135 = 44 + 45 + 46 oder

135 = 2 + 3 + 4 + … + 14 + 15 + 16

1. Gib mindestens zwei weitere Darstellungen von 135 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen an.
2. Auch die Zahl 15 kann als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dargestellt werden. Gib **alle** diese Darstellungen an. Erkläre auch, warum es keine weiteren gibt.
3. Peter meint: „Aus der Tatsache, dass 213 : 3 = 71 gilt, kann man eine Darstellung von 213 als Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gewinnen, nämlich ...“

**Lösungshinweis:**

1. Neben den beiden genannten gibt es noch folgende Darstellungen:

135 = 67 + 68

135 = 25 + 26 + 27 + 28 + 29

135 = 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25

135 = 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19

135 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18

1. 15 = 7 + 8

15 = 4 + 5 + 6

15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5

Andere Darstellungen kann es nicht geben, weil

* man mindestens zwei Zahlen addieren muss,
* eine Darstellung mit mehr als 5 Summanden nicht möglich, weil eine solche Summe dann größer als 1 + 2 + 3 + 4 + 5 ist,
* man 15 nicht als Summe von 4 aufeinanderfolgenden Zahlen schreiben kann; eine solche Summe würde stets zwei gerade und zwei ungerade Zahlen enthalten, also selbst gerade sein. 15 ist aber eine ungerade Zahl.

1. Nach Peters Feststellung gilt:

213 = 3 · 71 = 71 + 71 + 71

Durch die Überlegung, dass sich der Wert der Summe nicht ändert, wenn man die ersten Summanden um 1 verkleinert und zugleich den dritten Summanden um 1 vergrößert, kann man die Darstellung 213 = 70 + 71 + 72 erhalten.

Allgemein gilt für eine natürliche, durch 3 teilbare Zahl x mit x = 3 · n:

x = (n-1) + n + (n+1)

### Olympiadeaufgabe 360623

**Aufgabe:**

Frank und Beyhan stellen sich Aufgaben der folgenden Art:

Eine natürliche Zahl wird gegeben; gesucht wird ihre Darstellung als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, wobei die 0 nicht als Summand zugelassen sein soll.

Frank hat als jeweils gegebene Zahl alle natürlichen Zahlen von 2 bis 10 durchprobiert. Er behauptet: „ Unter diesen Zahlen gibt es mindestens zwei, bei denen die Aufgabe nicht lösbar ist.“

Beyhan hat als jeweils gegebene Zahl alle natürlichen Zahlen von 10 bis 20 mit genau einer Ausnahme durchprobiert. Er behauptet: „Für alle Zahlen, die ich durchprobiert habe, ist die Aufgabe lösbar.“

1. Zeige, dass Frank Recht hat.
2. Zeige, dass es zehn Zahlen unter den elf natürlichen Zahlen von 10 bis 20 gibt, so dass Beyhan Recht hat, wenn er gerade diese zehn Zahlen durchprobiert hat.
3. Nachdem Beyhan nun noch die vorher weggelassene Zahl probiert hat, behauptet er: „Für diese Zahl ist die Aufgabe nicht lösbar.“ Hat er auch hiermit Recht? Begründe deine Antwort.

**Lösungshinweis:**

1. Für die Zahlen 2, 4 und 8 ist die Aufgabe nicht lösbar. Es genügt also, zwei dieser drei Beispiele anzugeben und zu begründen.

Begründung für 2: Es müssen in der Darstellung mindesten zwei unterschiedliche Summanden vorkommen. Da 1 + 2 = 3 > 2 ist, hat 2 keine solche Darstellung.

Begründung für 4: Eine Darstellung mit drei oder mehr aufeinanderfolgenden Summanden ist nicht möglich, da 1 + 2 + 3 = 6 > 4 ist. Eine Darstellung mit zwei aufeinanderfolgenden Summanden ist nicht möglich, da einer der Summanden gerade und der andere ungerade sein müsste. Damit wäre die Summe ungerade und ungleich 4.

Begründung für 8: Eine Darstellung mit vier oder mehr aufeinanderfolgenden Summanden ist nicht möglich, da 1 + 2 + 3 + 4 = 10 > 8 ist. Eine Darstellung mit zwei Summanden ist nicht möglich (siehe Argumentation für die Zahl 4). Drei aufeinanderfolgende Zahlen haben bei der Division durch 3 die Reste 0, 1 und 2, die Summe dieser Zahlen ist daher immer durch 3 teilbar und kann damit nicht 8 ergeben.

1. Für die Zahlen von 10 bis 20 mit Ausnahme von 16 ist eine Darstellung als Summe aufeinanderfolgender Zahlen möglich:

10 = 1 + 2 + 3 + 4

11 = 5 + 6

12 = 3 + 4 + 5

13 = 6 + 7

14 = 2 + 3 + 4 + 5

15 = 7 + 8

17 = 8 + 9

18 = 5 + 6 + 7

19 = 9 + 10

20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6

Wenn Beyhan diese Zahlen durchprobiert hat, behält er also recht.

1. Die Zahl 16 lässt sich nicht als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen. Beyhan behält also wieder Recht.

Begründung:

Eine Darstellung mit sechs oder mehr aufeinanderfolgenden Summanden ist nicht möglich, da 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 > 16 ist.

Eine Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch fünf teilbar, da unter diesen Zahlen bei der Teilbarkeit durch 5 jeder der Reste 1, 2, 3 und 4 vorkommt. Daher ist auch eine Darstellung mit fünf Summanden unmöglich.

Die analoge Argumentation für den Fall von vier Summanden führt zu dem Ergebnis, dass eine solche Summe bei der Division durch 4 den Rest 2 lässt und damit nicht 16 sein kann.

Für drei und zwei Summanden argumentiert man wie im Fall der Zahlen 4 und 8.

### Olympiadeaufgabe 360636

**Aufgabe:**

1. Finde alle Darstellungen der Zahl 35 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (wobei die Null nicht als Summand zugelassen ist)! Zeige auch, dass es keine weiteren Darstellungen dieser Art für die Zahl 35 gibt.
2. J. Sylvester (1814 – 1897) hat folgenden Satz bewiesen:

*Jede natürliche Zahl ab 3 hat genau so viele Darstellungen als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, wie sie ungerade Teiler hat. Dabei wird die Zahl* 1 *nicht als Teiler mitgezählt, wohl aber die Zahl selbst (falls sie ungerade ist).*

Zeige, dass dein Ergebnis der Aufgabe a) mit dem Satz von Sylvester in Einklang steht.

In den folgenden Aufgaben kannst du den Satz von Sylvester anwenden, ohne ihn zu beweisen:

1. Wie viele Darstellungen als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen hat die Zahl 115? Wie viele solche Darstellungen hat die Zahl 90?
2. Zeige, dass jede Potenz von 2 überhaupt keine Darstellung als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen hat.

Zeige, dass dagegen jede natürliche Zahl ab 3, die nicht Potenz von 2 ist, mindestens eine solche Darstellung hat.

**Lösungshinweis:**

1. Die Zahl 35 hat folgende Darstellungen der genannten Art:

35 = 17+18

= 5+6+7+8+9

= 2+3+4+5+6+7+8

Weitere solche Darstellungen gibt es nicht. Dies kann man folgendermaßen begründen:

Man kann eine Darstellung mit drei Summanden ausschließen, denn wegen

10+11+12 = 33 < 35 < 38 = 11+12+13

ist jede Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen entweder größer oder kleiner als 35.

Entsprechendes folgt wegen

7+8+9+10 = 34 < 35 < 38 = 8+9+10+11

für vier Summanden und wegen

3+4+5+6+7+8 = 33 < 35 < 39 = 4+5+6+7+8+9

für sechs Summanden.

Es kann auch keine Darstellung mit acht oder mehr Summanden geben, da

1+2+3+4+5+6+7+8 = 36 > 35

ist.

1. Die Teiler der Zahl 35 ermittelt man schnell mit Hilfe der Primfaktorzerlegung:

35 = 5 · 7

Damit ergibt sich, dass die drei Zahlen 5, 7 und 35 die einzigen von 1 verschiedenen ungeraden Teiler der Zahl 35 sind. Dies steht im Einklang mit dem Satz von Sylvester.

1. Die Teiler werden wieder mit Hilfe der Primfaktorzerlegungen ermittelt:

115 = 5 · 23 und 90 = 2 · 3 · 3 · 5

Die Zahl 115 hat daher genau die drei ungeraden Teiler 5, 23 und 115. Die Zahl 90 genau die fünf ungeraden Teiler 3, 5, 9, 15 und 45. Aus dem Satz von Sylvester ergibt sich nun, dass 115 genau drei und 90 genau fünf Darstellungen der genannten Art besitzt.

1. Eine Zweierpotenz kann keine ungeraden Teiler haben. Daher hat sie nach dem Satz von Sylvester keine Darstellung als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen.
2. Eine natürliche Zahl, die größer als 2 ist und keine Zweierpotenz ist, hat mindesten einen ungeraden (Prim)teiler und nach dem Satz von Sylvester daher auch mindesten eine Darstellung als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen.

**Anmerkungen zu den Aufgaben und zum Einsatz:**

Forschungsprojekte zu dieser Aufgabe sollten immer zunächst vom Experimentieren mit Zahlen, die als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen dargestellt werden, ausgehen.

Die Aufgabenstellung d) lässt sich in mehrfacher Hinsicht verallgemeinern: Aus welchen Teilbarkeitseigenschaften lassen sich Rückschlüsse auf die Darstellung als Summe aufeinanderfolgender, natürlicher Zahlen ziehen? Welche Situation ergibt sich für genau einen ungeraden Primteiler und welche Situation ergibt sich für unterschiedliche ungerade Primteiler bzw. eine Potenz eines ungeraden Primteilers in der Primfaktorzerlegung? Welche Rückschlüsse lassen sich aus der Darstellbarkeit als Summe aufeinanderfolgender, natürlicher Zahlen auf die Teilbarkeitseigenschaften der jeweiligen Zahl ziehen, falls es beispielsweise nur eine oder zwei solcher Darstellungen gibt?

Ein spannendes Forschungsthema kann es sein, den Spezialfall des Satzes von Sylvester zu beweisen, dass eine Zweierpotenz keine Darstellung als Summe aufeinanderfolgender, natürlicher Zahlen hat. Dazu beschäftigt man sich zunächst mit schwächeren Aussagen wie: Eine Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen kann keine Zweierpotenz sein. Diese Aussage kann man entsprechend für weitere Anzahlen von Summanden zeigen. Als Kernidee für den allgemeinen Fall hält man fest, dass eine solche Darstellung immer aus gerade vielen ungeraden Summanden besteht. Wenn k deren arithmetisches Mittel ist, lassen sich diese Summanden als k - 1, k + 1, k - 3, k + 3 usw. darstellen. Auch für die geraden Summanden erhält man einschränkende Aussagen, aus denen man die weitere Argumentation zusammensetzen kann.

Die vertiefte Beschäftigung mit Summen aufeinanderfolgender, natürlicher Zahlen sollte auch auf die Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen führen:

.

Diese Formel kann sehr elementar und anschaulich oder auch über die Anekdote vom kleinen Gauß erarbeitet werden. Je nach Lerngruppe kann eine Formalisierung, wie sie in der obigen Gleichung erfolgt ist, gewinnbringend oder nicht weiter notwendig sein. Eine Verallgemeinerung auf eine Summe, wie sie in der Aufgabenstellung behandelt wird, kann ebenfalls elementar und anschaulich erarbeitet werden und führt auf folgende Formel:

.