**Aufwärmen mit der Mathematik-Olympiade von 2012**

**Klasse 6**

**Vorbemerkungen zur AG-Sitzung**

Da die erste Runde der Mathematik-Olympiade in jedem Jahr im September startet, bietet es sich an, in einer der ersten Sitzungen einer AG nach den Sommerferien Informationen und Beispielaufgaben dieses Wettbewerbs an die Schülerinnen und Schüler weiterzugeben. Manche Teilnehmer der AG haben die Mathematik-Olympiade schon in der Grundschule oder in der Klasse 5 kennengelernt, andere erfahren jetzt erstmalig davon. Daher ist damit zu rechnen, dass in dieser Sitzung differenziert werden muss. Während die einen Schülerinnen und Schüler schon mit dem Wettbewerb vertraut sind und sich vielleicht sofort mit den aktuellen Aufgaben beschäftigen möchten, sind andere unsicher, ob sie sich die Teilnahme überhaupt zutrauen sollen. Speziell für diese Gruppe ist die hier angebotene Aufgabenauswahl gedacht. Die Schülerinnen und Schüler können die Erfahrung machen, dass die Wettbewerbsaufgaben durchaus von ihnen, wenigstens in Teilen, bearbeitet werden können.

Zum Ende des Hauptteils dieser Stunde sollten die aktuellen Aufgaben der ersten Runde des Wettbewerbs ausgegeben werden. Dazu sollten auch die Teilnahmebedingungen und die weiteren Wettbewerbsrunden angesprochen werden. Diese organisatorischen Informationen sind in dem Dokument „<Informationen_zur_Mathematikolympiade.docx>“ aufgelistet.

Olympiadeaufgabe 520612

Es handelt sich zwar um die zweite Aufgabe der ersten Runde. Sie wurde hier aber an die erste Stelle gesetzt, da insbesondere in den Teilen a) und b) die Schülerinnen und Schüler auf jeden Fall Teillösungen ermitteln können.

**Aufgabe:**

Lukas hat von seinem Großvater 20,12 € in 1-Cent-Münzen geschenkt bekommen. Er schüttete die Münzen auf den Tisch; da lagen nun 2012 Münzen. Lukas begann, sie in Quadraten anzuordnen. Mit einiger Geduld hatte er nach einer Weile 30 Quadrate aus 8 ∙8 Münzen, ein Quadrat aus 9 ∙ 9 Münzen, ein Quadrat aus 3 ∙ 3 Münzen – und die beiden letzten übrig bleibenden Münzen, so sagte er sich richtig, bilden ja zwei 1 x 1 Quadrate. Insgesamt hatte er also 34 Quadrate. Nun fragte er sich, ob man die 2012 Münzen nicht in deutlich weniger Quadraten anordnen könnte.

1. 2012 ist nun eine ziemlich große Zahl – er zerlegt zunächst die Zahlen von 1 bis 24 in Summen von möglichst wenigen Quadratzahlen

Gib jeweils eine solche Zerlegung für die Zahlen von 1 bis 24 an.

1. Jetzt traut Lukas sich an größere Zahlen: Gib jeweils eine solche Zerlegung mit möglichst wenigen Quadratzahlen für die Zahlen von 90 bis 101 an.

Beispiel: 30 = 5² + 2² + 1².

1. Lukas hatte ja 2012 Münzen. Finde eine Darstellung der Zahl 2012 als Summe von vier Quadratzahlen.

*Hinweis*: Es gilt allgemein der *Satz von Lagrange*: Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von höchstens vier Quadratzahlen schreiben.

**Lösungshinweis:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| a) | 1 = 1² | 9 = 3² | 17 = 4² + 1² |
| 2 = 1² + 1² | 10 = 3² + 1² | 18 = 3² + 3² |
| 3 = 1² + 1² + 1² | 11 = 3² + 1² + 1² | 19 = 3² + 3² + 1² |
| 4 = 2² | 12 = 2² + 2² + 2² | 20 = 4² + 2² |
| 5 = 2² + 1² | 13 = 3² + 2² | 21 = 4² + 2² + 1² |
| 6 = 2² + 1² + 1² | 14 = 3² + 2² + 1² | 22 = 3² + 3² + 2² |
| 7 = 2² + 1² + 1² + 1² | 15 = 3² + 2² + 1² + 1² | 23 = 3² + 3² + 2² + 1² |
| 8 = 2² + 2² | 16 = 4² | 24 = 4² + 2² + 2² |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| b) | 90 = 9² + 3² | 96 = 8² + 4² + 4² |
| 91 = 9² + 3² + 1² | 97 = 9² + 4² |
| 92 = 9² + 3² + 1² + 1²  = 7² + 5² + 3² + 3²  = 6² + 6² + 4² + 2² | 98 = 7² + 7² |
| 93 = 8² + 5² + 2² | 99 = 7² + 7² + 1²  = 9² + 3² + 3²  = 7² + 5² + 5² |
| 94 = 9² + 3² + 2² | 100 = 10² |
| 95 = 9² + 3² + 2² + 1²  = 7² + 6² + 3² + 1²  = 6² + 5² + 5² + 3² | 101 = 10² + 1² |

c) Beispiele sind 2012 = 44² + 6² + 6² + 2² = 43² + 9² + 9² + 1²

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Die Schülerinnen und Schüler beschäftigen sich zunächst in Einzelarbeit mit der Aufgabe und vergleichen anschließend die gefundenen Zerlegungen. Es kann dabei ein richtiger Wettbewerb entstehen, wer die Zerlegung einer Zahl mit der geringsten Anzahl von Quadratzahlen gefunden hat. Speziell bei der Zahl 12 in Aufgabenteil a) lassen sich manche Schülerinnen und Schüler durch eine vermeintliche Regelmäßigkeit verführen und denken nicht daran, dass der erste Summand auch einmal kleiner werden kann. Sie geben die Zerlegung 12 = 3² + 1² + 1² + 1² an, die jedoch verkürzt werden kann, wenn man mit 2² als erstem Summanden beginnt.

Da die Aufgabe zeitaufwändig ist, kann in der AG-Sitzung nach einer gewissen Zeit abgebrochen und mit der Besprechung begonnen werden, zum Bespiel wenn der Teil a) von allen Schülerinnen und Schülern weitgehend bearbeitet ist. Die restlichen Lösungen können in der nachfolgenden Sitzung verglichen werden. Dann haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, weitere Zerlegungen außerhalb der AG zu ermitteln. Es ist jedoch nicht günstig, das als eine verpflichtende Hausaufgabe zu stellen.

Olympiadeaufgabe 520611

In der ersten Aufgabe der Runde geht es um die Bestimmung verborgener Zahlen. Mit unterschiedlichen Ansätzen kann die Aufgabe bearbeitet werden.

**Aufgabe:**

Eine Disziplin bei Sportfest ist Ballweitwurf. Sechs Schüler warfen die folgenden Weiten:

Bea warf 6 m weiter als Annika. Annika wurde von Jens um 11 m übertroffen. Dominic warf genau so weit wie Jens, Anika fehlten 9 m an der Wurfweite von Paul, Maike schaffte 3 m mehr als Annika.

So viel steht fest.

1. Sportlehrer Weitmüller sagt: „Insgesamt habt ihr 154 m geworfen.“

Welche Wurfweite ergibt sich daraus für jedes Kind?

1. Dominic denkt einen Augenblick nach und sagt dann: „Aber Herr Weitmüller, Ihre Gesamtsumme kann einfach nicht stimmen. Ich habe wirklich 11 m weiter geworfen als Annika, aber das war auch eineinhalb Mal so weit wie Annikas Wurf.“

Nehmen wir an, dass Dominic Recht hat – wie weit hat Dominic dann geworfen?

Alle Angaben zu den Unterschieden der Wurfweiten sollen weiterhin stimmen. Wie groß sind dann die Wurfweiten der sechs Kinder, und wie groß ist die Gesamtweite aller Würfe zusammengenommen?

**Lösungshinweis:**

1. Die Aufgabe kann dadurch gelöst werden, dass alle Wurfweiten auf die Wurfweite von Annika bezogen werden und dann eine Gleichung aufgestellt wird. Dieser Ansatz entspricht der vom Olympiadeverein veröffentlichen Musterlösung. Es gilt dann:

, , , , .

Berücksichtigt man Annika selber, ergibt sich die Summe , und diese soll den Wert 154 haben. Damit ist und weiter , , , , .

Eine alternative Lösung, die nicht den für Schülerinnen und Schüler der Klasse 6 schwierigen Ansatz über Gleichungen nutzt, besteht darin systematisch zu arbeiten. Probiert man jedoch alle möglichen Weiten aus, wird die Lösung sehr aufwändig, obwohl diese Vorgehensweise möglich ist.

Aus den Informationen der Aufgabe lässt sich eine Reihenfolge der Schülerinnen und Schüler ablesen: A - M - B - P - J, D.

Bei insgesamt 154 Punkten, kann man erwarten, dass Kinder, die in der Mitte dieser Reihenfolge liegen etwa 154 m : 6 ≈ 26 m erreicht haben. Versuchsweise wird für Paul einmal die Weite von 26 m eingesetzt. Dann hätte Annika 9 m weniger, also 17 m erreicht.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | M | B | P | J | D | Summe |
| 17 | 20 | 23 | 26 | 28 | 28 | 142 |

Da diese Summe zu klein ist, kann man es mit einem größeren Wert für Paul versuchen.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | M | B | P | J | D | Summe |
| 18 | 21 | 24 | 27 | 29 | 29 | 148 |
| 19 | 22 | 25 | 28 | 30 | 30 | 154 |

Da bei weiterer Erhöhung der Weite von Paul alle anderen Weiten sich ebenfalls erhöhen, und damit auch die Summe, kann es keine weiteren Lösungen geben.

Man kann aber auch feststellen, dass die erste Summe um 12 zu klein ist, und sofort für jedes Kind die Weite um 2 m erhöhen.

Selbstverständlich kann man bei jeder anderen Startweite die Beobachtung machen, um wieviel die Summe von der geforderten Summe abweicht, und daraus sofort auf die richtigen Weiten kommen.

1. Nach der Aussage von Dominic sind 11 m die Hälfte der von Annika geworfenen Weite, also hat Annika in diesem Fall 22 m weit geworfen. Alle Weiten aus Teil a) müssen um 3 m erhöht werden, die Summe erhöht sich dann um 18 m.

Eine Lösung mit Hilfe der Gleichung ist auch denkbar, aber in der Klasse 6 eher nicht zu erwarten.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Es ist günstig, den Aufgabenteil b) zunächst zurückzuhalten. Er kann dann Schülerinnen und Schülern angeboten werden, die besonders schnell die anderen Aufgaben gelöst haben.