**Aufwärmen mit der Mathematik-Olympiade von 2012**

**Vorbemerkungen zur AG-Sitzung**

Da die erste Runde der Mathematik-Olympiade in jedem Jahr im September startet, bietet es sich an, in einer der ersten Sitzungen einer AG nach den Sommerferien Informationen und Beispielaufgaben dieses Wettbewerbs an die Schülerinnen und Schüler weiterzugeben. Manche Teilnehmer der AG haben die Mathematik-Olympiade schon in der Grundschule kennengelernt, andere erfahren jetzt auf der weiterführenden Schule erstmalig davon. Daher ist damit zu rechnen, dass in dieser Sitzung differenziert werden muss. Während die einen Schülerinnen und Schüler schon mit dem Wettbewerb vertraut sind und sich vielleicht sofort mit den aktuellen Aufgaben beschäftigen möchten, sind andere unsicher, ob sie sich die Teilnahme überhaupt zutrauen sollen. Speziell für diese Gruppe ist die hier angebotene Aufgabenauswahl gedacht. Die Schülerinnen und Schüler können die Erfahrung machen, dass die Wettbewerbsaufgaben durchaus von ihnen, wenigstens in Teilen, bearbeitet werden können.

Zum Ende des Hauptteils dieser Stunde sollten die aktuellen Aufgaben der ersten Runde des Wettbewerbs ausgegeben werden. Dazu sollten auch die Teilnahmebedingungen und die weiteren Wettbewerbsrunden angesprochen werden. Diese organisatorischen Informationen sind in dem Dokument „<Informationen_zur_Mathematikolympiade.docx>“ aufgelistet.

Olympiadeaufgabe 520511

Die erste Aufgabe der Klasse 5 aus der 52. Olympiade 2012/2013 bietet sich als Einstieg an. Gerade im Aufgabenteil a) können die Schülerinnen und Schüler leicht Lösungen finden, da es nicht nur eine Lösung gibt.

**Aufgabe:**

Zeichne zwei Kreise und zwei Geraden, dass die jeweilige Figur

1. genau neun Schnittpunkte aufweist;
2. genau zehn Schnittpunkte aufweist;
3. genau elf Schnittpunkte aufweist.
4. Ist es möglich, eine Figur aus zwei Kreisen und zwei Geraden mit elf Schnittpunkten zu zeichnen, wenn die Geraden senkrecht aufeinander stehen sollen? Zeichne gegebenenfalls eine solche Figur

*Hinweis:* Eine Gerade hat – im Unterschied zu einer Strecke – keine Endpunkte.

**Lösungshinweis:**

Da zwei Kreise höchstens zwei Schnittpunkte, ein Kreis und eine Gerade ebenfalls höchsten zwei Schnittpunkte und zwei Geraden höchstens einen Schnittpunkt haben, kann es bei zwei Kreisen und zwei Geraden maximal elf Schnittpunkte geben. Auch Berührpunkte können als Schnittpunkte gewertet werden.

Hier sind jeweils einige Möglichkeiten dargestellt.

1. 
2. 
3. 
4. 

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Die Schülerinnen und Schüler sollten sich zunächst in Einzelarbeit mit der Lösung der Aufgabe beschäftigen und dann ihre Lösungen untereinander vergleichen. So lernen sie die für Arbeitsgemeinschaften typische Vorgehensweise gleich zu Beginn der AG kennen. Eventuell können zum Abschluss die gefundenen Lösungen für die gesamte Gruppe an der Tafel vorgeführt werden.

### Mögliche Erweiterungen der Aufgabe:

Die Schülerinnen und Schüler können untersuchen, welche anderen Anzahlen von Schnittpunkten noch möglich sind. Lassen sich alle Anzahlen von 0 bis 11 erreichen?

Olympiadeaufgabe 520514

Die vierte Aufgabe dieses Aufgabensatzes beruht auf einem Spiel. Bei der Lösung dieser Aufgabe erfahren die Schülerinnen und Schüler, dass es oft sinnvoll ist, erst einmal verschiedene Varianten einer Aufgabe auszuprobieren. In diesem Fall bedeutet das, dass sie das Spiel einige Male spielen und dadurch auf Ideen zur Lösung kommen.

**Aufgabe:**

Anna und Ben haben sich ein Spiel ausgedacht:

Sie beginnen mit einer beliebigen zweistelligen Zahl.

In einem Zug können sie entweder

1. Eine Ziffer streichen, solange die Zahl noch zweistellig ist, oder
2. Eine Ziffer um eins verkleinern.

Das Spiel endet, wenn die 1 dasteht. Gewonnen hat, wer den letzten Zug macht, also die 1 erzeugt.

Anna beginnt immer.

*Beispiel für einen Spielverlauf*: Sie beginnen mit der Zahl 32. Anna ist am Zug und streicht die vordere Ziffer. Es bleibt die 2. Ben verkleinert die 2 um 1. Damit ist das Spiel zu Ende, und Ben hat gewonnen.

1. Kann Anna bei der Startzahl 32 durch geschicktes Spielen sicher gewinnen? Begründe deine Aussage.
2. Untersuche die Spiele für die Startzahlen 38, 66, 55 und 86, wenn beide Spieler optimal spielen. Wer wird dann jeweils gewinnen?
3. Für welche Startzahlen kann Anna, und für welche Startzahlen kann Ben sicher gewinnen? Schreibe nicht alle Zahlen auf, sondern beschreibe, welche Eigenschaften die Zahlen haben müssen.

**Lösungshinweis:**

1. Anna gewinnt, wenn sie zunächst die Ziffer 2 streicht. Es bleibt die 3 übrig. Ben muss auf 2 verkleinern, und Anna verkleinert auf 1.
2. Wenn Anna optimal spielt, kann sie bei den Startzahlen 38 und 55 gewinnen



Bei den Startzahlen 66 und 86 gewinnt Ben immer.

Wenn Anna zu Beginn eine Ziffer streicht, bleibt eine gerade Zahl (entweder 6 oder 8) übrig. Nun verkleinern Ben und Anna abwechselnd die Zahl um 1. Dann muss Ben zwangsläufig gewinnen:



Wenn Anna jedoch bei diesen Startzahlen zu Beginn eine der Ziffern um 1 verkleinert, wird diese Ziffer ungerade. Ben muss dann, wenn er optimal spielt, im nächsten Schritt die verbliebene gerade Zahl streichen. Anna muss mit einer ungeraden Zahl weiter spielen:



1. Die Beispiele legen die Vermutung nahe, dass Ben den Sieg nur dann erzwingen kann, wenn beide Ziffern der Startzahl gerade sind. Die Begründung verläuft analog zu Teil b).

In allen anderen Fällen gewinnt Anna. Sie kann dann nämlich durch Streichen einer Ziffer erreichen, dass am Ende ihres Zuges jeweils eine einstellige, ungerade dasteht. Da nun nur noch um eins verkleinert wird, erzeugt Ben immer eine gerade und Anna eine ungerade Zahl. Da die 1 eine ungerade Zahl ist, muss Anna den letzten Zug machen und gewinnen.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Es bietet sich an, die Aufgabenstellungen a) bis c) zunächst zurückzuhalten, bis die Schülerinnen und Schüler die Spielregel genau verstanden haben und selber einige Runden des Spieles gespielt haben. Sie werden dann die Erfahrung gemacht haben, dass das Spiel „langweilig“ wird, sobald man eine einstellige Zahl erreicht hat. Da dann nur noch in jeder Runde die Zahl um 1 verringert wird, kann man genau voraussagen, wer den letzten Zug machen wird: der Spieler, der eine einstellige gerade Zahl bekommt und diese zu einer ungeraden macht, wird schließlich gewinnen.