



Mathematik-Olympiaden e. V.

Materialien für die Klasse 5/6

Zahlenrätsel 2

Lehrerversion

Vorbemerkungen zum Modul

Wie beim Modul „Zahlenrätsel“ im fünften Schuljahr geht es in den Aufgaben um Eigenschaften von Zahlen. Die Bearbeitung der folgenden Aufgaben führt zu verblüffenden Beobachtungen und regt zu umfangreichen Untersuchungen an. Die Lösung sollte zunächst durch Experimentieren mit den Zahlen gefunden werden. Danach eignen sich die erarbeiteten Aussagen zu Verallgemeinerungen und weiterführenden Vermutungen. Es geht letztendlich darum, eine geschickte und zeitsparende Vorgehensweise zu finden, um die Lösungen zu bestimmen.

Olympiadeaufgabe 370612

Diese Aufgabe regt zum Entdecken an. Unterschiedliche Antworten der Schülerinnen und Schüler sind zu erwarten. Lediglich in (d) wird gefordert, einen eindeutig beschriebenen Sachverhalt zu ermitteln. Unterschiedliche Antworten bei (a) bis (c) bieten die Möglichkeit, diese im Gespräch zu beurteilen. Daran anknüpfend sollen sie zu einer Weiterführung in mathematische Einsichten genutzt werden.

Aufgabe:

Rico löst die folgenden Aufgaben:

$$143 \cdot 14 = \quad 143 \cdot 28 = \quad 143 \cdot 42 = \quad 143 \cdot 63 =$$

Er macht dann einige interessante Beobachtungen.

- a) Nenne Beobachtungen, die Rico über die zweiten Faktoren und über die Ergebnisse gemacht haben kann!
- b) Versuche, ob sich entsprechende Beobachtungen auch machen lassen, wenn man für den zweiten Faktor geeignete Zahlen größer als 70 wählt!
- c) Gibt es zu diesen Beobachtungen eine Begründung, die auch noch auf weitere Produkte zutrifft? Auf welche Produkte? Wie lautet eine solche Begründung?
- d) Welches ist der größte dreistellige Faktor, der mit 143 multipliziert ein Ergebnis der Form $* * 0 * *$ liefert, worin die Sterne $*$ für geeignete Ziffern stehen?

Lösungshinweis:

- a) Die zweiten Faktoren sind Vielfache von 7, also Zahlen der Form $7 \cdot n$, dabei ist n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n < 10$. Als Ergebnis wurde jeweils die Zahl z mit der Zifferndarstellung $z = n00n$ erhalten.
- b) Wählt man als zweite Faktoren Vielfache $7 \cdot n$, wobei nun aber n zweistellig ist, etwa mit der Zifferndarstellung $n = ab$, so ist das Ergebnis jeweils $z = ab0ab$. Ist n dreistellig ($n = abc$), so ist das Ergebnis jeweils $z = abcabc$.
- c) Begründung der zu (a) und (b) angegebenen verallgemeinerten Beobachtungen:
Es gilt $143 \cdot 7 \cdot n = 1001 \cdot n$ und damit die angegebenen Zifferndarstellungen. Zur vertiefenden Betrachtung kann genauer vermerkt werden, dass hier das Assoziativgesetz $143 \cdot (7 \cdot n) = (143 \cdot 7) \cdot n$ angewandt wurde.
- d) Die überhaupt größte Zahl mit einer Zifferndarstellung $* * 0 * *$ ist die Zahl 99099. Nach der Begründung in c) ordnet sie sich mit $n = 99$, also $7 \cdot n = 693$ in die zu b) gemachte Beobachtung ein. Der gesuchte größte Faktor ist also 693. Er kann auch durch $99099 : 143 = 693$ gefunden werden.

Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:

Zu dieser Aufgabe stehen Hilfekärtchen in der Datei „[Zahlenraetsel 2_370612_Hilfe.docx](#)“ zur Verfügung

Olympiadeaufgabe 350612

Die Aufgabe lässt in allen Teilen mehrere Lösungen zu. In der Aufgabe, wie sie bei der Olympiade gestellt wurde, wird jedoch immer nur die Angabe einer Lösung gefordert. Daher ergeben sich vielfältige Erweiterungen der Aufgabe zur Differenzierung für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler.

Aufgabe:

Ruth beschriftet sechs Kärtchen, jedes mit genau einer der Ziffern 1, 2, 4, 5, 7, 8, so dass jede dieser Ziffern auf genau einem Kärtchen steht.

- a) Sie will die Kärtchen einmal so legen, dass eine Additionsaufgabe zweier dreistelliger Zahlen mit dem Ergebnis 702 entsteht. Gib eine Möglichkeit an.

$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ + \square \square \square \\ \hline 7 \ 0 \ 2 \end{array}$$

- b) Ein anderes Mal soll eine Additionsaufgabe dreier zweistelliger Zahlen mit dem Ergebnis 135 entstehen. Gib eine Möglichkeit an.

$$\begin{array}{r} \square \square \\ + \square \square \\ + \square \square \\ \hline 1 \ 3 \ 5 \end{array}$$

- c) Nun sollen die Kärtchen so gelegt werden, dass eine Additionsaufgabe zweier dreistelliger Zahlen mit

einem möglichst großen dreistelligen Ergebnis entsteht. Gib eine Möglichkeit hierzu an.

d) Ebenso soll mit den Kärtchen durch Addition dreier zweistelliger Zahlen eine möglichst große zweistellige Summe entstehen. Wie lautet diese Summe? Gib eine solche Addition an.

e) Schließlich sollen die Kärtchen so gelegt werden, dass durch Addition zweier dreistelliger Zahlen eine überhaupt möglichst große Summe entsteht. Wie lautet sie? Gib eine solche Addition an.

Lösungshinweis:

a) Es gibt die Möglichkeiten

$$\begin{array}{r} 124 \\ + 578 \\ \hline 702 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 215 \\ + 487 \\ \hline 702 \end{array}$$

sowie diejenigen, die entstehen, indem man (unabhängig voneinander) die Reihenfolge der Einer, der Zehner, der Hunderter jeweils unter sich beliebig wählt.

b)

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 45 \\ + 78 \\ \hline 135 \end{array}$$

sowie diejenigen, die entstehen, indem man (unabhängig voneinander) die Reihenfolge der Einer, der Zehner, der Hunderter jeweils unter sich beliebig wählt.

c)

$$\begin{array}{r} 124 \\ + 875 \\ \hline 999 \end{array}$$

Auch hier können die Einer, Zehner und Hunderter zwischen den Summanden ausgetauscht werden.

d)

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 27 \\ + 58 \\ \hline 99 \end{array}$$

Auch hier können die Einer, Zehner und Hunderter zwischen den Summanden ausgetauscht werden.

e)

$$\begin{array}{r} 741 \\ + 852 \\ \hline 1593 \end{array}$$

Auch hier können die Einer, Zehner und Hunderter zwischen den Summanden ausgetauscht werden.

Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:

Es bietet sich an, den Schülerinnen und Schülern Karten mit den Ziffern aus der Aufgabenstellung zur Verfügung zu stellen. Eine Vorlage dazu findet sich in der Datei „[Zahlenraetsel 2 350612 Hilfe.docx](#)“.

Mögliche Erweiterungen der Aufgabe:

Hat man in Teil a) die beiden angegebenen Lösungen gefunden, ist noch nicht sicher, ob damit wirklich alle Lösungen erfasst wurden. Für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler bietet es sich an, dieser Frage nachzugehen. Dabei kann das Argumentieren eingeübt werden.

Betrachtet man die Einerstelle in der Addition, so muss sich die Ziffer 2 in der Summe ergeben. Mit den vorgegebenen Ziffern ist das nur in den Kombinationen $4 - 8$ oder $5 - 7$ möglich.

In analoger Weise kann bei den Teilen b) – e) argumentiert werden. Dabei müssen in den Teilen d) und e) Fallunterscheidungen gemacht werden.

In d) bietet sich die Betrachtung der Zehnerstelle an. Es darf kein Übertrag auftreten. Das ist mit den Kombinationen $1 - 2 - 4$ oder $1 - 2 - 5$ möglich. Die Summe muss an dieser Stelle jedoch den Wert 9 oder den Wert 8 (bei einem Übertrag aus der Einerstelle) haben. Damit einfällt die Kombination $1 - 2 - 4$.

Geht man bei Aufgabenteil e) wieder von der Einerstelle aus, wäre außer der Kombination $1 - 2$ auch die Kombination $5 - 8$ möglich. Diese führt jedoch auf einen Widerspruch.

Eine andere Erweiterung der Aufgabe besteht darin, in den einzelnen Aufgabenteilen die Möglichkeiten zu zählen, die sich bei Vertauschung der Ziffern ergeben. Damit wird die Strategie des systematischen Zählens angesprochen. Diese Erweiterung bereitet zusätzlich die nachfolgende Aufgabe vor.

Olympiadeaufgabe 390521

In dieser Aufgabe kann die Strategie des systematischen Zählens hilfreich eingesetzt werden.

Aufgabe:

Wir betrachten alle dreistelligen Zahlen.

- a) Bei wie vielen dieser Zahlen ist die letzte Ziffer die Summe der ersten beiden Ziffern?
- b) Bei wie vielen dieser Zahlen ist die letzte Ziffer die Differenz der ersten beiden Ziffern? Das heißt: Bei wie vielen dreistelligen Zahlen ergibt sich die letzte Ziffer, wenn man die zweite Ziffer von der ersten oder die erste von der zweiten subtrahiert?

Lösungshinweis:

a) Die letzte Ziffer kann nicht 0 sein, denn dazu müssten auch die ersten beiden Ziffern 0 sein, und die Zahl wäre nicht mehr dreistellig. Es kommen also die Ziffern 1, 2, 3, ..., 8, 9 in Frage.

Für die Endziffer 1 gibt es für die ersten beiden Ziffern nur eine Möglichkeit, nämlich die 10.

Für die Endziffer 2 gibt es für die ersten beiden Ziffern zwei Möglichkeiten, nämlich 11 und 20.

Für die Endziffer 3 gibt es für die ersten beiden Ziffern drei Möglichkeiten, nämlich 12 und 21 sowie 30.

Dies lässt sich bis zur Endziffer 9 fortsetzen, bei der es dann neun Möglichkeiten gibt: 18 und 81, 27 und 72, 36 und 63, 45 und 54 sowie 90.

Insgesamt gibt es also $1 + 2 + \dots + 8 + 9 = 45$ Möglichkeiten.

b)

Wenn die letzte Ziffer 0 ist, müssen die ersten beiden Ziffern gleich sein. Damit sind die Zahlen 110, 220, ..., 990 möglich. Das sind 9 Zahlen.

Wenn die letzte Ziffer 1 ist, gibt es zwei Möglichkeiten.

Die erste Ziffer kann um 1 größer sein als die zweite. Möglich sind 981, 871, ..., 211, 101. Das sind 9 Zahlen.

Die erste Ziffer kann auch um 1 kleiner sein als die zweite. Dazu müssen die beiden ersten Ziffer vertauscht werden. Das ist bei 8 Zahlen möglich. Bei 101 geht das nicht, denn dann wäre die entstehende Zahl zweistellig.

891, 781, ..., 121.

Insgesamt gibt es 17 Zahlen, die auf die Ziffer 1 enden.

Wenn die letzte Ziffer 2 ist, gibt es die Möglichkeiten

972, 862, ..., 312, 202 und

792, 682, ..., 132.

Das sind $8+7 = 15$ Zahlen.

In gleicher Weise findet man 13 Zahlen, die auf die Ziffer 3 enden, 11 Zahlen, die auf die Ziffer 4 enden, usw. Insgesamt ergeben sich $9 + 17 + 15 + 13 + \dots + 1 = 90$ Zahlen.

Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:

Falls die Schülerinnen und Schüler keinen Zugang zur Lösung der Aufgabe finden, kann man die Aufgabe vereinfachen. Bevor alle Möglichkeiten systematisch gefunden und dann gezählt werden, bietet es sich an, im ersten Schritt einige dieser Zahlen zu ermitteln. Dazu werden Hilfen in der Datei „[Zahlenraetsel 2 390521 Hilfe.docx](#)“ angeboten

Olympiadeaufgabe 350721

Die Aufgabe knüpft an die Aufgabe 350612 (Aufgabe 2 dieses Moduls) an. Hier werden jedoch in der originalen Aufgabenstellung schon die Aspekte gefordert, die bei 350612 in den vorgeschlagenen Erweiterungen angesprochen werden.

Aufgabe:

Petra beschriftet drei Kärtchen mit der Ziffer 3, drei Kärtchen mit der Ziffer 5 und drei Kärtchen mit der Ziffer 9. Sie will dann diese Kärtchen so legen, dass eine Additionsaufgabe dreier dreistelliger Zahlen mit dem Ergebnis 1887 entsteht.

+			
+			
<hr/>			
	1	8	8
			7

a) Gib zwei verschiedene Möglichkeiten an, die Kärtchen in der gewünschten Art zu legen!

b) Wie viele derartige Möglichkeiten gibt es insgesamt?

Lösungshinweis:

a) Eine mögliche Lösung ist :

$$\begin{array}{r} 333 \\ + 555 \\ + 999 \\ \hline 1887 \end{array}$$

Außerdem sind alle Lösungen möglich, die entstehen, indem man (unabhängig voneinander) die Reihenfolge der Einer, der Zehner, der Hunderter jeweils unter sich beliebig wählt, zum Beispiel

$$\begin{array}{r} 335 \\ + 553 \\ + 999 \\ \hline 1887 \end{array}$$

b) Die Einerziffer 7 in der Summe kann mit den vorgegebenen Ziffern nur erreicht werden, wenn die Einerziffer der drei Summanden entweder 9, 9, 9, oder in irgendeiner Reihenfolge 3, 5, 9 lauten. Der Fall 9, 9, 9 scheidet aber aus, da er wegen $9 + 9 + 9 = 27$ einen Übertrag 2 in der Zehnerstelle ergibt, so dass die Zehnerziffern der Summanden eine auf 6 endende Summe haben müssten; dies ist mit den vorgegebenen Ziffern nicht zu erreichen.

Also verbleibt für die Einerziffer der Summanden nur der Fall 3, 5, 9. Er ergibt wegen $3 + 5 + 9 = 17$ den Übertrag 1, so dass auch für die Zehnerziffern eine auf 7 endende Summe zu erreichen ist. Mit derselben Begründung wie eben verbleibt auch hierfür nur der Fall 3, 5, 9, und dasselbe gilt nochmals für die Hunderterziffern.

Für die Einer-, Zehner- und Hunderterziffern gibt es jeweils, unabhängig voneinander, 6 Möglichkeiten der Reihenfolge. Daher gibt es insgesamt $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ Möglichkeiten, die Kärtchen in der gewünschten Art zu legen.

Anmerkung zur Aufgabe und zum Einsatz:

Die Aufgabe sollte zunächst von den Schülerinnen und Schülern selbstständig in Partner-/Gruppenarbeit gelöst werden. Dabei können Karten zum Einsatz kommen, die mit den vorgegebenen Ziffern beschriftet sind. Eine Vorlage steht in der Datei „[Zahlenraetsel 2 350721 Hilfe.docx](#)“ zur Verfügung.

Eine Lösung werden die Schülerinnen und Schüler sicherlich schnell finden. Nach der Gruppenarbeitsphase werden die Lösungen präsentiert und diskutiert.

Mögliche Fragestellungen hierbei sind:

- Warum gibt es unterschiedliche Lösungen?
- Wie kann man systematisch alle Lösungen finden?
- Kann man arbeitsteilig in den Gruppen vorgehen?
- Wie viele Lösungen gibt es?

Olympiadeaufgabe 360636

In dieser Aufgabe wird der Satz von Sylvester den Schülerinnen und Schülern mitgeteilt. Die Gültigkeit des Satzes wird an einem Beispiel überprüft. Anschließend wird der Satz angewendet. Dabei spielen die Primfaktorzerlegung und die sich daraus ergebende Anzahl von Teilern eine Rolle. Da solche Themen vielfach im regulären Unterricht nicht mehr vorkommen, muss eventuell der AG-Leiter an dieser Stelle zunächst Informationen geben.

Aufgabe:

a) Finde alle Darstellungen der Zahl 35 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (wobei die Null nicht als Summand zugelassen ist). Zeige auch, dass es keine weiteren Darstellungen gibt.

b) J. Sylvester (1814 – 1897) hat folgenden Satz bewiesen:

Jede natürliche Zahl ab 3 hat genau so viele Darstellungen als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, wie sie ungerade Teiler hat. Dabei wird die 1 nicht als Teiler mitgezählt, wohl aber die Zahl selbst (falls sie ungerade ist).

Zeige, dass dein Ergebnis der Aufgabe a) mit dem Satz von Sylvester im Einklang steht!

In den folgenden Aufgaben kannst du den Satz von Sylvester anwenden, ohne ihn zu beweisen:

c) Wie viele Darstellungen als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen hat die Zahl 115? Und wie viele die Zahl 90?

d) Zeige, dass jede Potenz von 2 überhaupt keine Darstellung als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen hat!

e) Zeige, dass dagegen jede natürliche Zahl ab 3, die nicht Potenz von 2 ist, mindestens eine solche Darstellung hat.

Lösungshinweis:

a) Die Zahl 35 hat folgende Darstellungen der genannten Art:

$$35 = 17 + 18$$

$$35 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

Arbeitsgruppe MAFiSuS. Michael Rüsing (Essen), Andrea Frie (Duisburg), Thomas Giebisch (Remscheid), Gaby Heintz (Neuss), Steffen Heyroth (Essen), Matthias Lippert (Remscheid), Frederick Magata (Düsseldorf), Stefan Möllenberg (Düsseldorf), Holger Reeker (Dortmund), Burkhard Rüsing (Goch), Ellen Voigt (Wuppertal)

$$35 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8.$$

Weitere solche Darstellungen gibt es nicht. Dies kann zum Beispiel so gezeigt werden:
Wegen $10 + 11 + 12 = 33$ und $11 + 12 + 13 = 36$ ist jede Summe aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen entweder (wenn ihr erster Summand höchstens 10 ist) kleiner als 35 oder (wenn ihr erster Summand mindestens 11 ist) größer als 35.

Entsprechend folgt aus $7 + 8 + 9 + 10 = 34$ und $8 + 9 + 10 + 11 = 38$, dass keine Summe aus vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 35 ergeben kann. Ebenso schließt man für sechs Summanden aus $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$ und $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$ sowie für acht und mehr Summanden aus $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$.

b) Aus der Zerlegung $35 = 5 \cdot 7$ in Primfaktoren folgt, dass die ungeraden und von 1 verschiedenen Teiler von 35 die drei Zahlen 5, 7, und 35 sind. Nach dem Satz von Sylvester muss es also drei Darstellungen von 35 geben. Dies entspricht den in a) gefundenen Darstellungen.

c) Aus den Zerlegungen $115 = 5 \cdot 23$ bzw. $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ in Primfaktoren ergibt sich, dass die ungeraden und von 1 verschiedenen Teiler von 115 genau die drei Zahlen 5, 23 und 115 sind bzw. die von 90 genau die fünf Zahlen 3, 5, 9, 15 und 45.

Also hat 115 genau drei Darstellungen der genannten Art. 90 hat genau fünf solche Darstellungen.

d) Eine Zweierpotenz kann keine ungeraden Teiler haben. Daher hat sie nach dem Satz von Sylvester keine Darstellung als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen.

e) Eine natürliche Zahl, die größer als 2 ist und keine Zweierpotenz ist, hat mindestens einen ungeraden Teiler und nach dem Satz von Sylvester daher auch mindestens eine Darstellung als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen.

Mögliche Erweiterungen der Aufgabe:

In Teil a) wird die Gültigkeit des Satzes nur für die Zahl 35 geprüft. Schülerinnen und Schüler, die schnell mit der Bearbeitung fertig sind, können die Gültigkeit für weitere Zahlen prüfen.

Der Satz macht nur eine Existenzaussage. Die Schülerinnen und Schüler können versuchen, die Zerlegungen konkret zu finden.

Olympiadeaufgabe 370634

In dieser Aufgabe wird bestimmt, welche Möglichkeiten es gibt, vorgegebene Summen von Augenzahlen beim Würfeln mit zwei Würfeln zu erzielen. Daraus wird in intuitiver Weise eine Wahrscheinlichkeitsaussage getroffen.

Aufgabe:

Der große italienische Mathematiker und Physiker Galileo Galilei (1564 – 1642) wurde gefragt, welche Augensumme beim Würfeln mit drei Würfeln häufiger auftreten muss, die Augensumme 9 oder die

Augensumme 10. Denke Dir drei voneinander unterscheidbare Würfel (z.B. einen roten, einen grünen und einen blauen) und überlege Dir, wie viele Möglichkeiten es für das Auftreten der Augensumme 10 und für das Auftreten der Augensumme 9 gibt. Welches zusammenfassende Urteil hatte aufgrund Deines Ergebnisses Galilei geben können?

Lösungshinweis:

Im Folgenden werden die Möglichkeiten bei drei unterscheidbaren Würfeln untersucht:

a) Augensumme 10

Sind die Augenzahlen auf den Würfeln verschieden voneinander, so können die drei Würfel die Augenzahlen 1 – 3 – 6 oder 1 – 4 – 5 oder 2 – 3 – 5 anzeigen. Dabei ist noch nicht festgelegt, welcher der Würfel welche Augenzahl anzeigt. Die Möglichkeiten sind in der Tabelle dargestellt.

Roter Würfel	Grüner Würfel	Blauer Würfel
1	3	6
1	6	3
3	1	6
3	6	1
6	1	3
6	3	1

Die Kombination 1 – 3 – 6 kann somit auf 6 Arten erreicht werden.

Das ist auch bei jeder der beiden anderen Kombinationen der Fall, so dass es 18 Möglichkeiten gibt.

Falls zwei Würfel die gleiche Augenzahl anzeigen, lässt sich die Summe 10 mit den Kombinationen 2 – 2 – 6 oder 2 – 4 – 4 oder 3 – 3 – 4 erzielen. Bei jeder dieser Kombinationen kann die Zahl die nicht doppelt vorkommt, entweder vom roten oder vom grünen oder vom blauen Würfel angezeigt werden. Damit kann jede Kombination auf drei Arten erzielt werden. Insgesamt gibt es 9 Möglichkeiten.

Es ist nicht möglich, die Summe 10 zu erreichen, wenn alle drei Würfel die gleiche Zahl anzeigen.

Somit gibt es 27 Möglichkeiten für die Augensumme 10.

b) Augensumme 9

Sind alle Augenzahlen verschieden, können die Kombinationen 1 – 2 – 6 oder 1 – 3 – 5 oder 2 – 3 – 4 vorkommen. Wie im Teil a) kann jede Kombination auf 6 Arten erreicht werden, so dass es 18 Möglichkeiten gibt.

Falls zwei Würfel die gleiche Augenzahl anzeigen, sind die Kombinationen 1 – 4 – 4 oder 2 – 2 – 5 möglich. Wie oben ergibt das 6 Möglichkeiten.

Zusätzlich liefert das Ergebnis 3 – 3 – 3 auch noch die Augensumme 9.

Damit gibt es 25 Möglichkeiten für die Augensumme 9.

Galilei urteilte somit, dass beim Werfen mit Würfeln in großen Versuchsserien die Augensumme 10 wahrscheinlicher als die Augenzahl 9 fällt.