

Aufgabenbeispiel: Mittelwert (arithmetisches Mittel) 2

Jahrgangsstufe: 7

Aus:

Landesinstitut für Schule / Qualitätsagentur (Hrsg.)

Kompetenzorientierte Diagnose

Aufgaben für den Mathematikunterricht

Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2006-02-01

S. 66 - 70

Aufgabe Mittelwert 2

Mittelwert (arithmetisches Mittel) 2 (prozessbezogen)

Hinweis: Der exakte Begriff „arithmetisches Mittel“ wird nicht an allen Schulen verwendet.

Die folgenden Aufgaben müssen daher den Schülerinnen und Schülern in der ihnen vertrauten Terminologie präsentiert werden.

1. Der Mittelwert der Zahlen 2; 11; 11; 16 soll berechnet werden.

Du siehst hier die Lösungen von Philipp, Ünal und Fabian.

Erkläre jeweils, wie die Schüler gerechnet haben, wie sie an den jeweiligen Term, das jeweilige Ergebnis wohl gekommen sind.

Ist das Ergebnis richtig? Welche Fehler wurden gemacht?

a) Philipp hat so berechnet: $2 + 11 + 11 + 16 : 4 = 28$

b) Ünal behauptet, dass der Mittelwert so berechnet wird: $\frac{2 + 11 + 11 + 16}{4} = \frac{40}{4}$

c) Fabian sagt, dass das alles zu viel Mühe mache: Der Mittelwert sei leicht abzulesen:

$$m = 11$$

2. Am 6.10. 2004 fand ich folgende Überschrift in der WAZ:

„Jeder deutsche Haushalt hat 1,14 Handys und 0,614 PC“

Erkläre möglichst genau, was diese Überschrift bedeutet.

Hinweise zur Aufgabenstellung

Mit der Aufgabe „Mittelwert“ sollen Information darüber gewonnen werden, über welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler im Bereich des Berechnens von Mittelwerten (arithmetischen Mitteln), des Argumentierens (erkennen von Fehlern, begründen) verfügen und welche individuelle Vorstellung sie von der Bedeutung des Mittelwertes in einer Alltagssituation (Aufgabenteil 2) haben (Modellieren).

Grundsätzlich ist die exakte Formulierung arithmetisches Mittel nicht bei allen Schülerinnen und Schülern zu erwarten, denn sie macht ja erst in Abgrenzung zu anderen Mittelwerten

(z.B. geometrisches Mittel) einen Sinn. Daher müssen die Aufgabenstellungen so präsentiert werden, wie sie den Schülerinnen und Schülern vertraut sind.

In Aufgabe 1 geht es wesentlich um die prozessbezogenen Kompetenzen Argumentieren und Begründen. Je nach Güte der Begründung zeigen sich unterschiedliche Grade an Argumentationsfähigkeit. Formale Begründungen (über Formeln) sind möglich, wie inhaltlich – sprachliche und solche über Gegenbeispiele. Jede Form von Begründung setzt aber eine gründliche Kenntnis des Mittelwertbegriffs voraus.

Aufgabenteil 2 verlangt die Bewertung einer Zeitungüberschrift. Hier sollen relevante Daten aus einem authentischen Text entnommen und kommentiert werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen erkennen, dass die Zahlenangaben Mittelwerte sind und diese erläutern.

Mit dieser Aufgabe können also Indikatoren zu unterschiedlichen Teilkompetenzen der Kernlehrpläne gewonnen werden. Eine entsprechende Zuordnung der wesentlichen Kompetenzen lässt sich etwa wie folgt vornehmen (in der Formulierung des Gesamtschulkernlehrplans):

	Schülerinnen und Schüler ...
1): Stochastik (Jg. 5/6) – mit Daten und Zufall arbeiten	
Auswerten	... bestimmen ... arithmetisches Mittel und Median
1): Argumentieren/Kommunizieren (Jg. 7/8) – kommunizieren, präsentieren und argumentieren	
Begründen	... nutzen mathematisches Wissen für Begründungen ...
2): Argumentieren/Kommunizieren (Jg. 7/8) – kommunizieren, präsentieren und argumentieren	
lesen	... ziehen Informationen aus einfachen mathemathikhaltigen ... Text[en], strukturieren und bewerten sie
2): Modellieren (Jg. 7/8) – Modelle erstellen und nutzen	
Mathematisieren	... übersetzen einfache Realsituationen in mathematische Modelle ...

Erwartete bzw. mögliche Bearbeitungen

1. a) Philipp hat einen arithmetischen Fehler begangen: Klammern fehlen.
- b) Ünals Ergebnis ist richtig, es fehlt nur das Kürzen.
- c) Fabian hat eine Möglichkeit zur Bestimmung des Median (Zentralwert) angegeben.

Schülerinnen und Schüler können zeigen, dass sie die arithmetischen Fehler finden, die Berechnung des arithmetischen Mittels beherrschen und diesen vom Median unterscheiden können.

- Philipp hat das richtig – so mache ich das auch.
- Ünal hat recht, er muss nur $40 : 4$ rechnen, dann kommt das Ergebnis 10 heraus. Philipp hat das falsch gerechnet, weil er sofort dividiert, obwohl er erst die Summe bilden soll und dann durch 4 teilen muss.
- Fabians Ergebnis ist falsch. Er hat einen anderen Mittelwert berechnet. Der heißt Zentralwert.

2. Es gibt keine 1,14 Handys und keine 0,614 PC. Beide Geräte gibt es nur als ganze Zahlen. Die angegebenen Werte sind also offenbar Durchschnittswerte. Das bedeutet, dass etwa in 100 deutschen Haushalten im Schnitt 114 Handys anzutreffen sind und in 1000 Haushalten mit 614 PC zu rechnen ist.

- Es gibt mehr Handys als PCs in Deutschland. Fast die Hälfte mehr.
- Jeder Haushalt besitzt mehr Handys als PCs.
- Das ist der Mittelwert / Durchschnitt in deutschen Haushalten..
- Man hat mehrere Haushalte genommen und dann geguckt, wie viele Handys und PCs in jedem sind und dann den Durchschnitt genommen.
- Die haben den Prozentsatz ausgerechnet. Das heißt, fast jeder hat ein Handy, aber nicht jeder einen PC.
- Ich denke, dass das Handy besser als der Computer ist: Handys kann man überall hin mitnehmen, aber Computer nicht.
- Handys sind viel wichtiger als PCs, weil es mehr Handys gibt.

Diagnostische Informationen

Diagnostische Informationen zum Mittelwertbegriff lassen sich aus allen Teilaufgaben gewinnen.

In den Aufgabenteilen 1 werden Rückschlüsse über die Argumentationsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler möglich. Die Lösungen zielen darauf ab:

- die Fähigkeit, den Lösungsweg eines anderen nach zu vollziehen,
- ein gegebenes Ergebnis zu analysieren und zu bewerten,
- eine Begründung für ein richtiges oder ein Gegenbeispiel für ein falsches Ergebnis zu liefern,
- die Fähigkeit, ein falsches Ergebnis zu korrigieren.

In Aufgabe 2 ergibt sich die Möglichkeit aus den Lösungen zu schließen auf:

- die Fähigkeit, einen einfachen authentischen Text zu verstehen,
- die Fähigkeit, relevante Daten (Dezimalbrüche) zu interpretieren,
- die Fähigkeit, die eigene Interpretation für andere nachvollziehbar darzustellen.

Passende Fragen zur Selbsteinschätzung

Wenn Schülerinnen und Schüler die Aufgabe 1 bearbeitet haben, so können sie voraussichtlich z. B. die folgenden Fragen zur Selbsteinschätzung fundiert beantworten – bzw. vor der Bearbeitung getroffene Einschätzung ggf. revidieren –

Wie sicher bist du, wenn du ...

- ... den Lösungsweg eines anderen nachvollziehen sollst?
- ... eine Begründung für die Richtigkeit einer Lösung angeben sollst?
- ... begründen sollst, dass eine Rechnung falsch ist – einen Fehler in der Rechnung eines anderen finden sollst?
- ... mit Brüchen rechnen sollst?
- ... zwischen verschiedenen Mittelwerten unterscheiden sollst?

Die Aufgabe 2 führt zu folgenden Selbsteinschätzungsfragen:

Wie sicher bist du, wenn du ...

- ... einen kurzen Zeitungstext verstehen sollst?
- ... Dezimalzahlen in einer Sachsituation angemessen erklären sollst?
- ... anderen deine Erklärung mitteilen sollst?

Vorschläge zum Einsatz der Aufgabe

Es ist nicht daran gedacht, alle Aufgabenteile gleichzeitig zu präsentieren. Je nach Jahrgangsstufe und unterrichtlichen Voraussetzungen kann es sinnvoll sein, der Gesamtgruppe z. B. nur die Aufgabe 2 zu geben. Anschließend wird bei den Schülerinnen und Schülern, die diese Aufgabe nicht angemessen lösen konnten, genauer analysiert, wo die Schwierigkeiten liegen – ob etwa der Mittelwertbegriff nicht verstanden wurde (z.B. durch die Bearbeitung von 1 oder Teilaufgaben der Aufgabe Mittelwert 1).

Der Fokus der Diagnose bei der Präsentation dieser Aufgaben liegt auf den prozessbezogenen Kompetenzen (Argumentieren, Begründen, Modellieren).

Bei der Besprechung der Ergebnisse im Unterricht könnte man dann auf allgemeine Lösungsstrategien zum Argumentieren und Begründung eingehen.

- Welche Verfahren kann ich anwenden, um ein Ergebnis zu überprüfen?
- Wo reicht ein Beispiel, wo muss eine ausführliche Begründung erfolgen?
- Welche typischen algebraischen Fehler erkennst du?

Alternative Aufgabenstellungen

Es ist auch möglich, die zugrundeliegenden Daten einem authentischen (Zeitungs-) Text oder einer Grafik entnehmen zu lassen. Allerdings ist dann die Unabhängigkeit der Analyse der verschiedenen Kompetenzen nicht mehr gegeben: Ein Scheitern kann eventuell auch auf der mangelnden Lesekompetenz der Bearbeiter basieren. Eine interessante, anwendungsorientierte Darbietung findet sich in der Aufgabe „Weitsprung“ der ersten Lernstandserhebung in NRW 2004.

Ein weiterer Literaturtipp hierzu: FURDEK, Attila (2001). *Fehler-Beschwörer. Typische Fehler beim Lösen von Mathematikaufgaben*. Books on Demand, Achern. (ISBN 3-8311-2110-9)

Weitere ähnliche Aufgaben

Aus der Aufgabe „Mittelwert 2“ lassen sich schnell Aufgaben ähnlichen Typs gewinnen, wenn z. B. anstelle des Mittelwertes andere statistische Größen wie der Median oder Streumaße (Spannweite, Quartile) genommen werden.

Wichtig für den Charakter der Aufgabe ist aber, dass Begründungen und Bewertungen von vorgegebenen Lösungen vorgenommen werden müssen.

Bitte beachten Sie:

1. Sofern nicht gesondert gekennzeichnet, ist alles Material in diesem Angebot urheberrechtlich geschützt und darf in keiner anderen Weise verwendet werden, als es in den allgemeinen Urheberrechtsbestimmungen auf [learn:line](#) oder im Text der Seite genehmigt ist. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Rechte an eingestellten Beiträgen bei den Autoren verbleiben. Eine unautorisierte Veröffentlichung an anderen Orten insbesondere zu kommerziellen Zwecken ist nicht zulässig.

2. Nicht-kommerzielle Besucher dieser Seite dürfen jegliches Material nur zur privaten, nicht-kommerziellen Verwendung herunterladen. Angestellte, Agenten, Mitglieder oder andere Vertreter eines Unternehmens / einer Organisation dürfen Material von dieser Seite nur für nicht-kommerzielle Zwecke innerhalb des Unternehmens oder der Organisation herunterladen. Diese Befugnis setzt die Beachtung jeglicher urheberrechtlicher oder eigentumsrechtlicher Bestimmungen, denen das Material unterliegt, voraus.

Nachfragen / Feedback unter <http://www.sinus.nrw.de/projekt5>