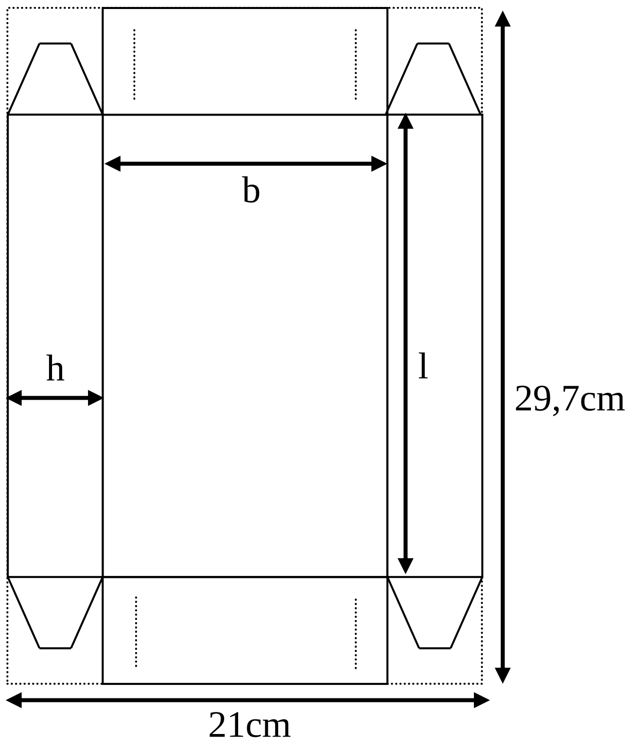
## A03 – Einstieg in die Analysis – Wertetabelle und Koordinatensystem

### Vorbereitung zur Auflösung Kartonaufgabe

Beim Basteln der Kartons fällt einem sofort auf, dass sich alle weiteren Eigenschaften (Länge, Breite und Volumen) automatisch ergeben, sobald die Höhe festgelegt ist.

Hier liegt es nahe, dass z.B. das Volumen als Funktion in Abhängigkeit von der Höhe ausgedrückt werden kann.

Um das besser zu verstehen, hier eine Skizze des Kartons.




*h* ist die Höhe des fertigen Kartons, *b* die Breite und *l* die Länge.
Ein DIN-A4-Blatt hat eine Länge von 29,7cm und eine Breite von 21cm.

Das Volumen des fertigen Kartons wird berechnet mit $V = l \cdot b \cdot h$.

Dabei ist $l = 29{,}7 - 2 \cdot h$. Der Karton ist also so lang wie das Blatt, abzüglich der beiden nach oben gefalteten Seiten, die jeweils der Höhe des Kartons entsprechen.
Entsprechend ist $b = 21 - 2 \cdot h$.

Beides in die obere Formel eingesetzt ergibt $V = (29{,}7 - 2 \cdot h) \cdot (21 - 2 \cdot h) \cdot h$, was somit eine Berechnungsformel ist, die nur noch von der Höhe *h* abhängig ist.

Das ist somit eine Funktion, die das Volumen direkt aus der Höhe berechnet.

$$V(h) = (29{,}7 - 2 \cdot h) \cdot (21 - 2 \cdot h) \cdot h$$

## A03 – Einstieg in die Analysis – Wertetabelle und Koordinatensystem

### Darstellungsformen von Funktionen

Am Beispiel der Karton-Funktion werden hier zwei typische Darstellungsformen / Diagrammtypen vorgestellt: Die Wertetabelle und das Koordinatensystem.

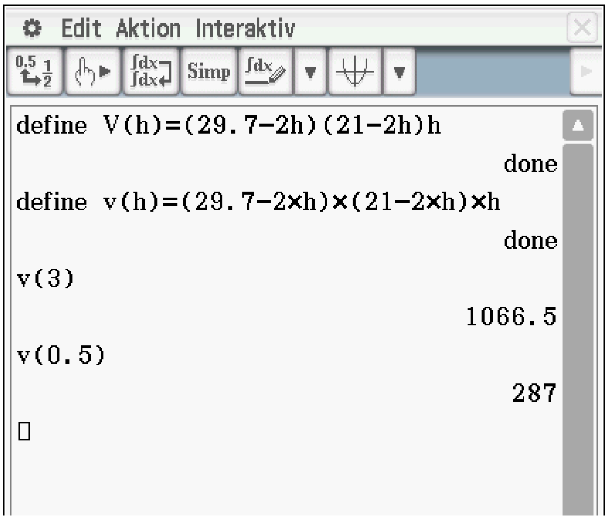
Durch die Funktion $V(h)=(29{,}7-2\cdot h)\cdot(21-2\cdot h)\cdot h$ ist eine eindeutige Zuordnung von Wert und Funktionswert gegeben. In diesem Fall wird der Höhe des Kartons (Wert) das resultierende Volumen (Funktionswert) zugeordnet.

Dabei entstehen sogenannte Wertepaare bzw. Punkte.

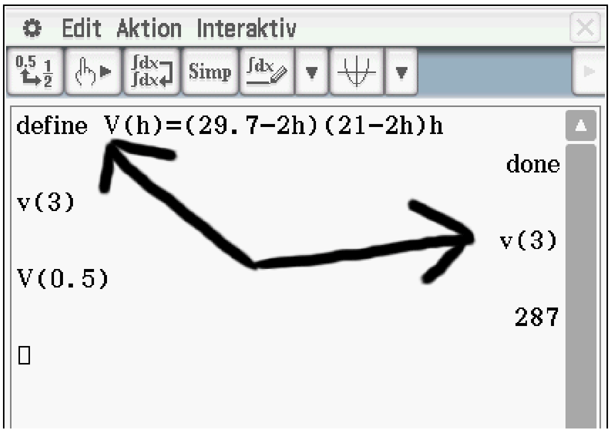
Beispiele:
$$V(3)=(29{,}7-2\cdot 3)\cdot(21-2\cdot 3)\cdot 3=(29{,}7-6)\cdot(21-6)\cdot 3=23{,}7\cdot 15\cdot 3=1066{,}5$$
$$V(0{,}5)=(29{,}7-2\cdot 0{,}5)\cdot(21-2\cdot 0{,}5)\cdot 0{,}5=287$$

Ein Karton mit 3cm Höhe hat somit ein Volumen von 1066,5cm³, während ein Karton mit einem flachen Rand von 0,5cm und großer Grundfläche nicht so effektiv ist und nur 287cm³ Volumen hat. (1000cm³ sind übrigens 1Liter.)

Die Berechnung funktioniert natürlich auch per Taschenrechner. Dabei ist es egal, ob die Multiplikationszeichen ausgeschrieben werden. Beide Eingaben führen zum gleichen Erfolg.




Der Taschenrechner unterscheidet zwischen Groß- und Kleinschreibung. Wer V(h) definiert muss auch mit V(3) rechnen bzw. bei v(h) wird v(3) verwendet.



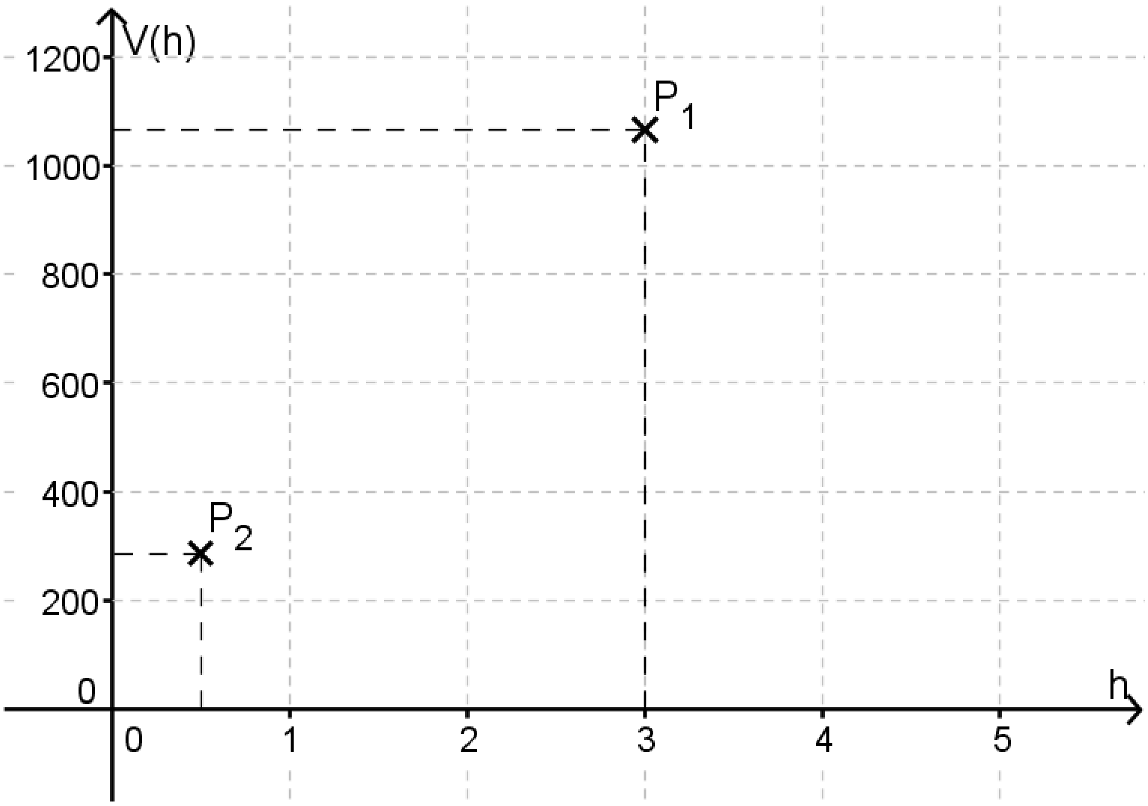
### A03 – Einstieg in die Analysis – Wertetabelle und Koordinatensystem

Diese Wertepaare können auch kürzer aufgeschrieben werden, in der sogenannten Punktschreibweise: $P_1(3|1066,5)$; $P_2(0,5|287)$

Noch übersichtlicher ist eine Wertetabelle:

| $h$ in cm | $V(h)$ in cm³ |
|---|---|
| 3 | 1066,5 |
| 0,5 | 287 |

Jedes Wertepaar kann auch als **<u>ein</u>** Punkt in einem Koordinatensystem dargestellt werden.




Hinweise zum Koordinatensystem:

- Die Achsen stehen immer senkrecht zueinander.
- Die Skalierung entlang jeder Achse ist gleichmäßig.
- Die Skalierung an beiden Achsen darf dabei verschieden sein.
- Im Koordinatenursprung ist immer der Punkt (0|0).
- Die Achse für die Werte ($x$-Werte) ist die horizontale Achse.
- Die Achse für die Funktionswerte ($y$-Werte) ist die vertikale Achse.
- Pfeilspitzen werden nur oben und rechts (am positiven Ende der Achse) gemacht.
- Die Achse wird an ihrer Spitze beschriftet.

## A03 – Einstieg in die Analysis – Wertetabelle und Koordinatensystem

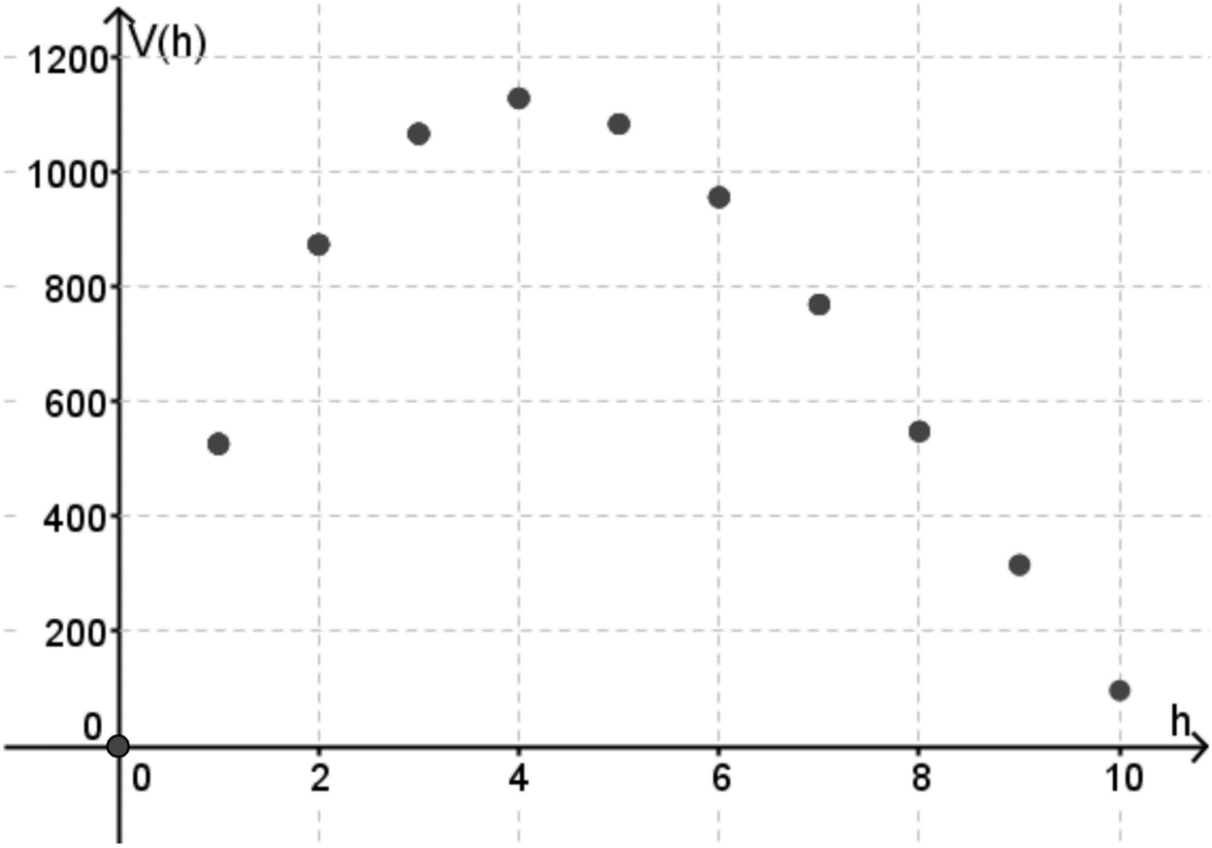
### Der Graph einer Funktion

Durch das Eintragen sehr vieler Punkte entsteht eine zunehmend durchgehende Linie.

Die Darstellung aller (unendlich vielen) Punkte wird dann als Graph der Funktion bezeichnet.

(Zu beachten: Hier fehlt Ihnen noch die Technik, unendlich genau zu arbeiten. Sie können sich im Moment nur durch Probieren einer exakten Darstellung annähern. Im Beispiel ist an der Stelle 4 ($x$-Wert 4) nicht der höchste Punkt des Graphen, sondern etwas weiter rechts. Diese Techniken erlernen Sie teilweise nach im folgenden Unterrichtsverlauf, teilweise aber erst im 3. Semester.)

| $h$ in cm | $V(h)$ in cm³ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 526,3 |
| 2 | 873,8 |
| 3 | 1066,5 |
| 4 | 1128,4 |
| 5 | 1083,5 |
| 6 | 955,8 |
| 7 | 769,3 |
| 8 | 548 |
| 9 | 315,9 |
| 10 | 97 |



## A03 – Einstieg in die Analysis – Wertetabelle und Koordinatensystem


Was lässt sich nun alles über den Karton sagen?

(Überprüfen Sie die Aussagen anhand des Graphen bzw. denken Sie an den realen Karton!)

- Der Karton mit dem größten Fassungsvermögen hat eine Höhe von etwa 4cm.
  (Genau genommen: $h_{optimal} = \frac{169-\sqrt{7771}}{20} \approx 4{,}042$)
- Es passen also in einen aus einem DIN-A4-Blatt gefalteten Karton fast 1128,5cm³ Süßigkeiten.
- Es sind Höhen zwischen 0 und 10,5cm möglich.
- Kartons mit einem Fassungsvermögen von über einem Liter ergeben sich bei Kartonhöhen zwischen etwa 2,5cm und 5,7cm.
- Der optimale Karton hat eine Länge von 21,62cm und eine Breite von 12,9cm.
- Besonders hohe und besonders Flache Kartons sind ungünstig.
- Ein 8cm hoher Rand ist genauso ungünstig wie ein nur 1,05cm hoher Rand.
  In beiden Fällen gibt es 548ml Süßigkeiten, also weniger als die Hälfte im Vergleich zum Optimum.
- Der Graph der Funktion *V* hat keine Symmetrieachse.
  …übrigens hat der Graph eine Symmetrie, aber woanders: