

## Einstieg in die Differentialrechnung II – Der Differenzenquotient

In der vergangenen Sitzung haben Sie sich erarbeitet, wie Sie im Anwendungskontext bestimmte Berechnungen durchführen können.

Der Anwendungskontext war:

An einem bestimmten Tag wird der Wasserstand in einem Zylinder, der die Niederschlagsmenge misst, durch folgende Funktion modelliert.

$$h(t) = \frac{1}{300}t^3 - \frac{1}{7}t^2 + 3t$$

Dabei gibt  $h(t)$  die Höhe des Wasserstandes im Zylinder in cm an.  $t$  ist die Zeit in Stunden. Gemessen wird 24 Stunden lang. Es sind also Werte für  $t$  zwischen 0 und 24 zulässig.  $t = 0$  entspricht 0:00 Uhr;  $t = 14,5$  entspricht 14:30 Uhr usw.

Folgende Berechnungen haben Sie durchgeführt:

- **Füllstand des Zylinders zu einer bestimmten Uhrzeit**

Zum Beispiel: Wie viel Wasser war um 12:30Uhr im Messzylinder?

$$h(12,5) = \frac{1}{300} \cdot 12,5^3 - \frac{1}{7} \cdot 12,5t^2 + 3 \cdot 12,5 \approx 21,689$$

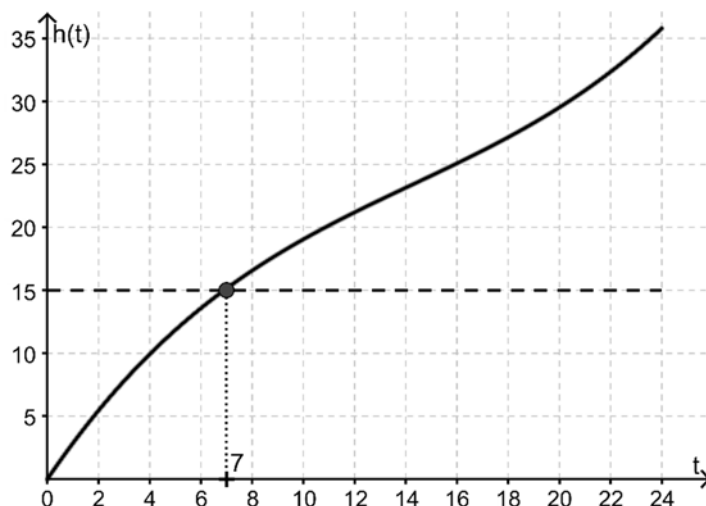
Es waren um 12:30 Uhr etwa 21,689cm Wasser im Zylinder.

- **Uhrzeit, ab der eine bestimmte Regenmenge erreicht ist**

Zum Beispiel: Ab Wie viel Uhr waren mehr als 15cm Wasser im Zylinder?

Graphische Lösung:

15 cm Wasser waren seit etwa 7 Uhr im Zylinder.



Rechnerische Lösung:

$$h(t) = 15 \rightarrow \frac{1}{300} \cdot t^3 - \frac{1}{7} \cdot t^2 + 3 \cdot t - 15 = 0 \rightarrow t \approx 6,9$$

(Zum Beispiel per Taschenrechner: Mode - EQN - Typ4 oder mit SOLVE)

Mehr als 15 cm Wasser waren nach 6:54 Uhr im Zylinder.

## Einstieg in die Differentialrechnung II – Der Differenzenquotient

- **Menge des Niederschlags (bzw. hinzugekommene Menge im Zylinder) in einem bestimmten Zeitraum**

Zum Beispiel:

Zwischen 14 Uhr und 16 Uhr betrug die Niederschlagsmenge etwa 1,935cm.

$$\begin{aligned}h(14) &\approx 23,147 & h(16) &\approx 25,082 \\h(16) - h(14) &\approx 25,082 - 23,147 = 1,935\end{aligned}$$

Zwischen 14:30 Uhr und 15:20 Uhr betrug die Niederschlagsmenge gut 0,8cm.

$$\begin{aligned}h(14,5) &\approx 23,626 & h\left(15\frac{1}{3}\right) &\approx 24,429 \\h\left(15\frac{1}{3}\right) - h(14,5) &\approx 24,429 - 23,626 = 0,803\end{aligned}$$

- **Durchschnittliche Niederschlagsmenge pro Stunde für einen bestimmten Zeitraum**

Anhand der Werte lässt sich schlecht erkennen, ob es zwischen 14 und 16 Uhr stärker geregnet hat als zwischen 14:30 Uhr und 15:20 Uhr.

Aussagekräftiger ist die Niederschlagsmenge pro Stunde:

Zwischen 14 und 16 Uhr betrug die Niederschlagsgeschwindigkeit  $0,9675 \frac{\text{cm}}{\text{Stunde}}$

$$0,9675 = \frac{1,935}{2} = \frac{1,935}{16 - 14} = \frac{h(16) - h(14)}{16 - 14}$$

Im Vergleich dazu:  $\frac{h(15\frac{1}{3}) - h(14,5)}{15\frac{1}{3} - 14,5} = \frac{0,803}{\frac{5}{6}} = 0,9636$

Es hat also zwischen 14 und 16 Uhr heftiger geregnet als zwischen 14:30 Uhr und 15:20 Uhr.

Die Formel zur Berechnung des durchschnittlichen Regenfalls pro Stunde (durchschnittliche Regengeschwindigkeit oder **durchschnittliche Änderungsrate**) für einen bestimmten Zeitraum von  $t_1$  bis  $t_2$  lässt sich somit aufschreiben als:

$$\frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Diese Berechnungs-Formel heißt: **Differenzenquotient**.