**Schach-Projekt**

**„Das Rösselsprungrätsel“**

**Modul 1: Rund um den Springer**

**Vorbemerkungen zum Schachprojekt**

Das vorliegende Schach-Projekt verfolgt das **Hauptziel**, Schülerinnen und Schülern Methoden und Strategien zu vermitteln, mit denen sie in der Lage sind, *systematisch* eine oder mehrere Lösung(en) für das sogenannte Rösselsprungrätsel (siehe Einleitungstext des 1. Moduls) zu finden. Um dies zu erreichen, müssen die Schülerinnen und Schüler einerseits mit der besonderen Zugweise des Springers vertraut gemacht werden und andererseits Methoden der **Graphentheorie** kennenlernen. Dies gelingt am besten über das Erreichen folgender **Teilziele**:

1. Teilziel: Kennenlernen und Üben der Zugweise des Springers

2. Teilziel: Modellieren und Lösen mithilfe der Graphentheorie

3. Teilziel: Argumentieren und Begründen anhand „aufgeräumter“ Graphen

4. Teilziel: Kennenlernen der „Warnsdorff-Regel“ sowie der Strategie „Teile und Herrsche“

Wegen dieser Zielsetzungen ist das Schach-Projekt in drei Module unterteilt:

Modul 1: Rund um den Springer (→ 1. u. 2. Teilziel)

Modul 2: Reduzierung des Rösselsprungrätsels (→ 2. u. 3. Teilziel)

Modul 3: „Warnsdorff-Regel“ und „Teile und Herrsche“ (→ 4. Teilziel)

Die drei Module bauen aufeinander auf, und es ist sinnvoll sie in der hier vorgestellten Reihenfolge auch zu behandeln (sofern man das o. g. Hauptziel erreichen möchte).

**Kommentar zum Modul 1: Rund um den Springer**

Das 1. Modul enthält die Inhalte:

* *Einleitungstext*
* *Probleme 1 – 4: Kennenlernen der besonderen Zugweise des Springers*
* *Probleme 5 – 7: Erste Springertouren*
* *Infoblatt: Ein Ausritt in die Graphentheorie*
* *Problem 8: Selbstständiges Lösen mithilfe eines aufgeräumten Graphen*

Bei dem Rösselsprungrätsel handelt es sich um ein Problem, welches sich Leonhard Euler im Jahre 1758 ausgedacht haben soll. Der ***Einleitungstext*** stellt den Schülerinnen und Schülern das Problem vor und soll ihnen aufzeigen, dass ein einfach formuliertes, klar zu verstehendes Problem durchaus extrem schwierig zu lösen ist. Es bietet sich an, den Einleitungstext mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam zu lesen. Hier können zusätzliche Informationen zu Leonhard Euler genannt werden. Auch soll an dieser Stelle die besondere Zugweise des Springers vorgestellt werden. Ein großes Schachbrett oder ein Computer mit Beamer können dies unterstützen. (Auf der Internetseite [www.schachforum.at/diagramme/](file:///D:\Eigene%20Dateien\Word-Texte\Landesverband\Unterrichtsmaterialien%20Bearbeitung\Schach%20neu\www.schachforum.at\diagramme\) findet man hierfür z.B. einen Schachdiagramm-Generator.)

Die Probleme 1 – 7 können so an die Schülerinnen und Schüler als Kopie ausgeteilt werden. Inhaltlich befassen sich die ersten vier Probleme mit der besonderen Zugweise des Springers, während die Probleme 5 – 7 zur Einführung in die Graphentheorie dienen. Das Problem 7 ist hierbei das schwierigste Problem: Es ist nicht zu erwarten, dass die Schülerinnen und Schüler bereits zu diesem Zeitpunkt selbstständig auf eine Lösung kommen. Ausprobieren kann aber hier durchaus gewinnbringend sein.

Um das Problem 7 *systematisch* lösen zu können, ist es notwendig das [***Infoblatt***](file:///C:\Dokumente%20und%20Einstellungen\Stefan%20Möllenberg\Eigene%20Dateien\Downloads\Infoblatt_Graphentheorie.docx) gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern zu besprechen. Hier wird eine Methode vorgestellt, wie man mithilfe von Graphen, insbesondere von „aufgeräumten“ Graphen, die vorgegebene Problemstellung modellieren und schließlich lösen kann. Mit diesem Wissen kann dann anknüpfend an Problem 7 das Problem 8 selbstständig von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden.

Mit der Lösung des 8. Problems sind das 1. und 2. Teilziel voll erreicht.

**Lösungen zu den einzelnen Problemen**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **Problem (Der Ausritt des Springers)**   Ein weißer Springer steht auf dem Feld E5, das ist eines der vier Felder in der Mitte des Schachbretts (beachte die Koordinaten unter dem bzw. links neben dem Schachbrett: die Buchstaben geben dabei die Linie, die Zahlen die Reihe an, in welcher der Springer steht)  ***Frage:***  ***Wie viele Felder kann der Springer von hier aus nach genau zwei Zügen erreichen?*** |  |

**Lösungsvorschlag:**

Da der Springer bei jedem Zug seine Feldfarbe wechselt, wird er nach zwei Zügen erneut auf einem schwarzen Feld stehen. Allerdings kann er fünf Felder nicht mit zwei Zügen erreichen. Diese sind die Felder A1, C3, G3, G7 und C7. Somit kann der Springer mit nur zwei Zügen insgesamt 27 (schwarze) Felder erreichen.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **Problem (Schritt)**   Ein weißer Springer steht auf dem Feld D4.  ***Fragen:***  ***Wie viele Züge braucht der Springer mindestens, um auf sein rechtes Nachbarfeld E4 zu gelangen?***  *Erkläre, warum das deiner Meinung nach die minimale Anzahl an Zügen ist.* |  |

**Lösungsvorschlag:**

Der Springer wechselt bei jedem seiner Züge die Farbe des Feldes (von einem schwarzfarbigen Feld springt er also auf ein weißfarbiges Feld und andersherum genauso). Um also das (weiße) Nachbarfeld zu erreichen, ist somit eine ungerade Anzahl an Zügen notwendig. Da das Nachbarfeld mit einem Zug offensichtlich nicht erreichbar ist, sind mindestens drei Züge notwendig. Hierfür gibt es insgesamt 12 verschiedene Wege (vgl. Ergänzungen der Aufgabe). Zum Beispiel: D4 – E6 – G5 – E4.

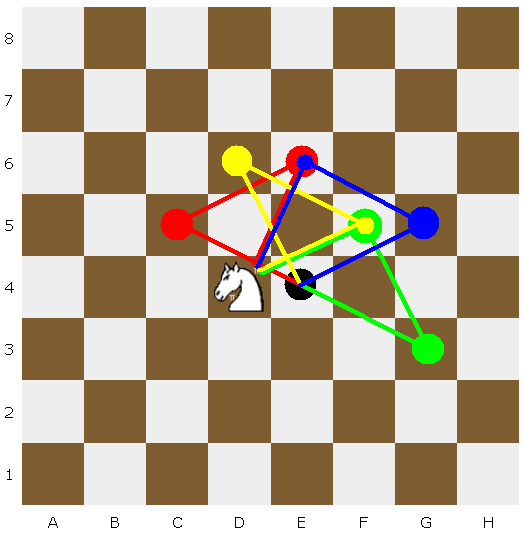
**Ergänzungen der Aufgabe:**

***Vertiefungsfrage:***

***Existieren mehrere Wege mit der minimalen Anzahl von drei Zügen? Wenn ja, wie viele genau?***

Mit ein bisschen Ausprobieren erhält man insgesamt 12 verschiedene Wege. Aus Gründen der Symmetrie sind hier nur 4 Möglichkeiten dargestellt. (Die Felder C6 und C2 dürfen nicht „angezogen“ werden.)

Anmerkung: Springt der Springer zuerst nach links, so muss er auf die Felder B5 bzw. B3 springen (von hier aus gibt es dann wiederum je 2 Möglichkeiten das Zielfeld E4 zu erreichen). Der Springer darf nicht zuerst auf die Felder C6 bzw. C2 springen, da er dann mehr als nur drei Züge bis zum Zielfeld E4 benötigt.



|  |  |
| --- | --- |
| 1. **Problem (Trab)**   Ein weißer Springer steht auf dem Eckfeld A1.  ***Frage:***  ***Wie viele Züge braucht der Springer mindestens, um auf sein diagonales Nachbarfeld B2 zu gelangen?***  *Erkläre, warum das deiner Meinung nach die minimale Anzahl an Zügen ist.* | **?** |

**Lösungsvorschlag:**

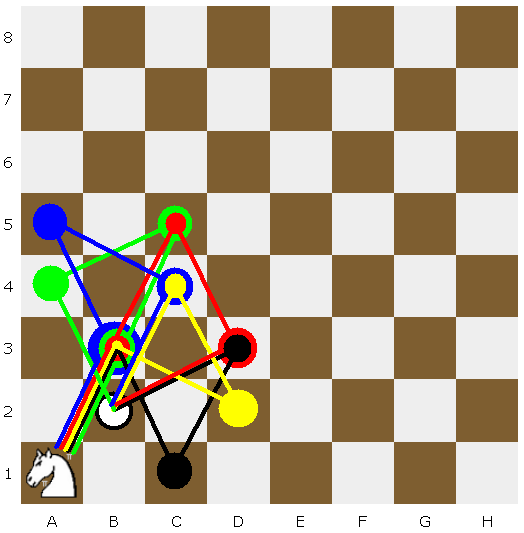
Da beide Felder (Start- als auch Zielfeld) schwarz sind, ist hier nun eine gerade Anzahl an Zügen notwendig. Da zwei Züge offensichtlich nicht ausreichen, ist vier die minimale Anzahl an Zügen. Insgesamt gibt es hierbei 10 verschiedene Wege (vgl. Ergänzungen der Aufgabe). Zum Beispiel: A1 – B3 – A5 – C4 – B2.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

***Vertiefungsfrage:***

***Existieren mehrere Wege mit der minimalen Anzahl von vier Zügen? Wenn ja, wie viele genau?***

Insgesamt existieren 10 verschiedene Wege. Aus Gründen der Symmetrie sind hier 5 verschiedene Möglichkeiten dargestellt. Entsprechendes erhält man, wenn der Springer zuerst auf das Feld C2 zieht.



Lösungen:

A1 – B3 – D2 – C4 – B2

A1 – B3 – C1 – D3 – B2

A1 – B3 – C5 – D3 – B2

A1 – B3 – A5 – C4 – B2

A1 – B3 – C5 – A4 – B2

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **Problem (Die Diagonaltour)**   Ein weißer Springer steht auf dem Eckfeld A1.  ***Frage:***  ***Wie viele Züge braucht der Springer mindestens um jeweils vom Startfeld A1 auf die übrigen sechs Diagonalfelder zu gelangen?*** | **?**  **?**  **?**  **?**  **?**  **?** |

**Lösungsvorschlag:**

Da alle Felder A1, B2, C3, D4, E5, F6, G7 und H8 schwarz sind, ist hierbei stets eine gerade Anzahl von Zügen notwendig. Im folgenden Bild ist in die entsprechenden Felder jeweils die minimale Anzahl an Zügen eingetragen.

|  |  |
| --- | --- |
| **4**  **2**  **4**  **4**  **4**  **6**  **4** | Lösungsbeispiele:  A1 – B3 – A5 – C4 – B2  A1 – B3 – C1 – E2 – C3  A1 – B3 – D4  A1 – B3 – D4 – C6 – E5  A1 – B3 – C5 – D7 – F6  A1 – B3 – D4 – E6 – G7  A1 – B3 – D4 − F5 − E7 − G6 − H8 |

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **Problem (Im Pferdestall)**   Ein weißer Springer steht in der rechten unteren Ecke eines 3x3 Schachbretts.  ***Frage:***  ***Kann der Springer so über das 3x3 Schachbrett ziehen, dass er jedes der 9 Felder genau einmal betritt?***  *Begründe deine Lösung.* |  |

**Lösungsvorschlag:**

Der weiße Springer kann das Feld in der Mitte nicht erreichen. Dadurch ist das obige Problem nicht lösbar!

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **Problem (Der kleiner Springertausch)**   Hierbei handelt es sich wohl um eines der ältesten Schachrätsel der Welt. Es befinden sich insgesamt 4 Springer auf einem 3x3 Schachbrett.  ***Frage:***  ***Wie viele Züge brauchst du, damit die beiden Farben ihre Plätze tauschen?***  *Überlege, wie viele Züge mindestens nötig sind.* |  |

**Lösungsvorschlag:**

Die Lösung zu diesem Problem – insbesondere die Herangehensweise – ist auf dem Infoblatt „Ein Ausritt in die Graphentheorie“ ausführlich dargestellt. Dieses Blatt sollte unbedingt gemeinsam mit den SuS besprochen werden!

In Kürze:

Mithilfe des „aufgeräumten“ Graphen lässt sich dieses Problem recht anschaulich lösen, wie man an der folgenden Bilderfolge gut erkennen kann (alle Springer bewegen sich dabei im Uhrzeigersinn) – insgesamt braucht man also 16 Züge:

|  |  |
| --- | --- |
| Ausgangsstellung: | … nach 4 Zügen: |
| … nach 8 Zügen: | … nach 12 Zügen: |
| … nach 16 Zügen: |  |

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **Problem (Der großer Springertausch – Teil 1)**   Auf einem recht seltsam geformten Schachbrett mit lediglich zehn Feldern stehen zwei weiße sowie zwei schwarze Springer. Die schwarzen Springer sollen nun mit den weißen die Plätze tauschen.  ***Frage:***  ***Findest du eine Lösung?*** |  |

**Lösungsvorschlag:**

Siehe Lösungsvorschlag zum 8. Problem!

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **Problem (Der großer Springertausch – Teil 2)**   Auf einem recht seltsam geformten Schachbrett mit lediglich zehn Feldern stehen zwei weiße sowie zwei schwarze Springer. Die schwarzen Springer sollen nun mit den weißen die Plätze tauschen.  ***Frage:***  ***Wie viele Züge sind dafür mindestens nötig?***  Strategie:   1. Zeichne den Graphen. 2. Räume den Graphen auf! 3. Versuche nun die Aufgabe zu lösen. |  |

**Lösungsvorschlag:**

Zu (a):

Der Graph hat insgesamt 10 Knoten und 9 Kanten (vgl. Bild unten). Auffällig dabei ist, dass es drei Knoten gibt, von denen jeweils nur eine Kante abgeht.

|  |  |
| --- | --- |
| **A1**  **A2**  **A3**  **A4**  **B1**  **B2**  **B3**  **C3**  **D3**  **C2** |  |

Zu (b):

Der Graph in „aufgeräumter“ Form ist überraschenderweise sehr übersichtlich. Er hat quasi die Struktur einer Bahnstrecke mit Abstellgleis:

D3

B3

A1

C2

A3

B1

C3

A4

B2

A2



Zu (c):

Mithilfe des „aufgeräumten“ Graphen lässt sich die Lösung sehr einfach finden.

|  |  |
| --- | --- |
| Graph | Schachbrett |
| Start: |  |
| … nach insgesamt 12 Zügen: |  |
| … nach insgesamt 16 Zügen: |  |
| … nach insgesamt 26 Zügen: |  |
| … nach insgesamt 32 Zügen: |  |
| … nach insgesamt 40 Zügen (Ziel): |  |