„Warm-ups 3“

Die Grundkonzeption einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft bleibt selbstverständlich in das Er­mes­sen des jeweiligen Fachlehrers gestellt. Basierend auf den Grundüberlegungen von Helmut König, die in der Grunddokumentation unserer Arbeitsgruppe noch einmal präzisiert wurden, bietet es sich aber an, jede Arbeitsstunde mit einem „Warm-up“ zu beginnen, so dass die Schülerinnen und Schüler aus dem regulären Schulalltag in die Atmosphäre einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft ankom­men können und damit die Bereitschaft geweckt wird, sich auf die nachfolgende intensivere Beschäf­ti­gung mit einem Themengebiet wie Kryptogrammen oder geometrischen Fragestellungen einzulas­sen. Vergleichbar sind diese „Warm-ups“ – auch wenn Vergleiche dieser Art immer hinken – mit dem Warm­machen vor dem Sportunterricht oder den „Energizern“, die im Lions-Quest-Programm vor den eigent­lichen Inhalt der jeweiligen Stunde gestellt werden.

Selbstverständlich ist die Verwendung eines „Warm-ups“ nicht obligatorisch und es bietet sich auch nicht an, mehrere „Warm-ups“ nacheinander innerhalb einer AG-Stunde zu verwenden. Im Mittel­punkt sollte immer die Beschäftigung mit einem der umfassenderen und erweiterbaren Themen­kom­ple­xe stehen, die aus dem Bereich der Mathematik-Olympiade stammen. Das bedeutet natürlich nicht, dass auch diese „Warm-ups“ zu größeren Themenkomplexen ausgebaut werden können, die eben­falls eine intensive mathematische Strukturierung und Beschäftigung erlauben. Das ist aber nicht die Intention der hier vorgestellten Materialien.

Die Liste, die unten vorgestellt wird, speist sich aus vielen verschiedenen Quellen und erhebt selbst­ver­ständlich keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Gerade aus dem Bereich des Känguru-Wettbe­werbs lassen sich sehr viele Aufgaben als „Warm-up“ generieren, die viele interessante Anwendungs­mög­lichkeiten bieten. Auch die hier vorgestellten Beispiele aus dem Bereich der „black stories“ bein­hal­ten noch sehr viele weitere interessante Beispiele. Weiterhin sind in den einschlägigen Kno­bel­bü­chern – etwa von Sam Lloyd oder Martin Gardner – oder mathematischen Zeitschriften ebenfalls vie­le interessante Aufgaben enthalten.

Viele dieser hier vorgestellten „Warm-ups“ fördern Kompetenzen, die nicht ursächlich mathematisch er­scheinen mögen. Gefördert werden aber immer Fähigkeiten, die auch bei der Bearbeitung mathe­ma­tischer Sachverhalte sehr hilfreich sind. Allein die intensive Kommunikation über bestimmte In­hal­te, die genaue Beschreibung und nachfolgende Präzisierung vorgestellter Gedanken oder die Fä­hig­keit zu argumentieren dienen in vielen mathematischen Situationen dazu, seine Gedanken noch ein­mal neu zu strukturieren und Sachverhalte zu hinterfragen, die vielleicht implizit (oder sogar fälsch­li­cher­weise) als gegeben angenommen wurden, in Wirklichkeit aber entweder unerheblich oder sogar ir­re­führend sind.

Gerade diese Aufgaben bieten sich alle als vollkommen voraussetzungsfrei zu bearbeitende Aufgaben an. Deshalb sollten bei der Eingabe der Aufgaben keine weiteren Tipps gegeben werden, sondern al­lei­ne aus der Aufgabenstellung heraus die Ideen der Schülerinnen und Schüler entwickelt werden. Da­zu kann am besten die Aufgabe zu Beginn der AG-Stunde per Folie oder per Whiteboard ohne weitere Ansage projiziert werden.

Man kann diese Aufgaben auch als bewussten Gegenpol zu den die Diskussion und Kommunikation för­dernden Aufgaben aus der Mathematik-Olympiade einsetzen, indem sie innerhalb der ersten Mi­nu­ten einer Arbeitsgemeinschaft auf Schnelligkeit bearbeitet werden. Dabei sollte die Schülerin oder der Schüler, der meint, eine Lösung zu haben, diese der Lerngruppe vorstellen. Wenn diese falsch ist oder es Ergänzungen gibt, können diese selbstverständlich im Anschluss vorgestellt werden. Es sollte aber nicht so sein, dass die Bearbeitung und Diskussion dieser „Warm-ups“ deutlich mehr als 10 Mi­nu­ten einnehmen.

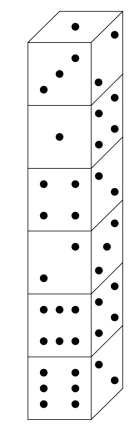
Selbstverständlich ist die hier angegebene Reihenfolge der „Warm-ups“ weder verbindlich noch in ir­gend­einer Weise nach Schwierigkeit geordnet. Sie können je nach Bedarf oder Vorlieben kombiniert oder auch weggelassen werden. Viel Vergnügen mit den hier vorgestellten Beispielen, die alle schon in­nerhalb von mathematischen Arbeitsgemeinschaften erprobt worden sind.

**Warm-up 61: Apfelernte**

Bei einer Apfelernte können fünf Helfer fünf Äpfel in fünf Sekunden pflücken. Wie viele Helfer wären erforderlich, um pro Minute 60 Äpfel zu pflücken?

Lösung:

Eine Minute ist das Zwölffache von fünf Sekunden. 60 Äpfel sind auch das Zwölffache von fünf Äpfeln. Also braucht man weiterhin nur fünf Helfer.

**Warm-up 62: Würfelturm**

In der Abbildung sich sechs Würfel übereinander gestapelt. Einige Seiten mit Augenzahlen sind sichtbar. Wie groß ist die Summe aller nicht sichtbaren Augenzahlen?

Lösung:

Pro Würfel gibt es 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 Augen. Die sechs Würfel haben zusammen also 126 Augen. Sichtbar sind insgesamt 40 Augen. Somit sind 86 Augen nicht sichtbar.

**Warm-up 63: Vertauschen von Ziffern**

Betrachte die Differenz zweier zweistelliger Zahlen, bei denen die eine aus der anderen durch Vertauschen der Ziffern entsteht. Fällt dir etwas auf? Kannst du das auch beweisen?

Lösung:

Die Differenz dieser beiden Zahlen ist immer ein Vielfaches von 9. Man kann dies einsehen, indem man die eine Zahl als 10x+y und die andere als 10y+x schreibt, wobei x und y die Zehner- bzw. die Einerziffer der ersten Zahl sind. Dann ist die Differenz 10x+y – (10y+x) = 9x – 9y = 9 (x – y) und damit ein Vielfaches von 9, da x-y eine ganze Zahl ist.

**Warm-up 64: Drei Altersangaben**

Wenn man die Ziffern des Alters von Steffen vertauscht, erhält man das Alter von Holger. Die Differenz der Lebensalter von Steffen und Holger ergibt das doppelte Alter von Thomas. Hol­ger ist zehnmal so alt wie Thomas. Wie alt ist jeder?

Lösung:

Die Differenz zwischen zwei beliebigen Zahlen mit vertauschten Ziffern ist immer ein Vielfa­ches von 9. In der konkreten Anwendungssituation muss die Differenz genau gleich 9 sein, da sonst die erste Bedingung nicht erfüllt sein kann. Dann ist aber das Alter von Thomas die Hälfte von 9, also 4,5 Jah­re. Holger ist zehnmal so alt wie Thomas, also 45 Jahre, Steffen ist dann 54 Jahre alt.

Alternative Lösung:

Die Differenz zwischen zwei beliebigen Zahlen mit vertauschten Ziffern ist immer 9 oder ein Vielfa­ches von 9. Die verschiedenen Möglichkeiten werden systematisch durchprobiert:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Differenz | 9 | 18 | 27 |
| Alter von Thomas | 4,5 | 9 | 13,5 |
| Alter von Holger | 45 | 90 | 135 |

Bei der Differenz 18 wäre Steffen dann 09 Jahre alt. Die Differenz der Alter wäre aber nicht 18.

Bei der Differenz 27 ergibt sich ein unrealistisches Alter von Holger.

Bei noch größeren Differenzen ist das Alter von Holger erst recht unrealistisch.

Also kommt nur die erste Möglichkeit in Frage: Stef­fen ist 54 Jahre alt.

**Warm-up 65: Die zauberhafte Geldbrücke**

Paul und ein Zauberer standen an einer Brücke. Paul hatte einen kleinen Geldbetrag in der Ta­sche. Der Zauberer machte Paul folgenden Vorschlag: „Immer, wenn du über diese Brücke gehst, wirst du hinterher doppelt so viel Geld in der Tasche haben wie zuvor.“ „Stimmt das wirk­lich?“ fragte Paul erfreut. „Selbstverständlich“, antwortete der Zauberer. „Aber natürlich musst du mir für diesen zauberhaften Rat für jeden Gang über die Brücke 24 Cent geben.“ „Wa­rum nicht?“ dachte sich Paul. „Wenn ich jedes Mal doppelt so viel Geld bekomme, wer­den die 24 Cent nicht viel ausmachen.“ Gesagt, getan! Paul ging über die Brücke und auf zau­ber­hafte Weise verdoppelte sich sein Geld. Er warf dem Zauberer 24 Cent zu und ging zum zwei­ten Mal über die Brücke. Wieder verdoppelte sich sein Geld und der Zauberer bekam wie­der seinen Anteil. Auf geht’s zum dritten Brückengang! Aber als Paul dem Zauberer seine 24 Cent gab, hatte er kein Geld mehr. Wie viel Geld hatte Paul vor seinem Treffen mit dem Zau­berer in der Tasche?

Lösung:

Mit der Methode des Rückwärtsrechnens kommt man ohne Probleme zur richtigen Lösung. Nach dem letzten Gang hatte Paul noch genau 24 Cent, vor dem Gang also 12 Cent. Diese 12 Cent erhöhen sich um 24 Cent - die Paul nach dem vorletzten Gang abgeben musste - auf 36 Cent, die er nach dem zwei­ten Gang hatte. Vor dem zweiten Gang hatte er demnach 18 Cent. Mit der gleichen Argumenta­ti­on folgt, dass er nach dem ersten Gang vor dem Abgeben des Geldes an den Zauberer 42 Cent hat­te. Vor dem ersten Gang und dem Treffen mit dem Zauberer hatte Paul also 21 Cent in der Tasche.

**Warm-up 66: Hocker und Stühle**

In einem Raum stehen 6 Hocker mit drei Beinen und 8 Stühle mit vier Beinen. Einige Hocker und einige Stühle sind besetzt. Alle Menschen, die dort sitzen haben zwei Beine. Insgesamt stehen 68 Beine auf dem Boden. Wie viele Stühle sind höchstens unbesetzt?

Lösung:

Je mehr Stühle besetzt sind, desto mehr Beine stehen auf dem Boden. Wenn alle Stühle unbesetzt sind, sind es 32 Beine. Für jeden besetzten Stuhl erhöht sich die Zahl der Beine um 2. Maximal können es 48 Beine sein.

Genauso sieht man, dass die Zahl der Beine bei den besetzten oder unbesetzten Hockern eine gerade Zahl von 18 bis 30 sein muss.

Bei fünf unbesetzten Stühlen müssten alle Hocker besetzt sein, um auf die Summe 68 zu kommen. Bei sechs unbesetzten Stühlen kommt man höchstens auf die Summe 66. Also sind höchstens fünf Stühle unbesetzt.

**Warm-up 67: 20 und eine weitere Zahl**

Wenn man von 20 und einer kleineren Zahl jeweils die Hälfte der kleineren abzieht, dann ist die Dif­ferenz aus 20 und der Hälfte der kleineren dreimal so groß wie die aus der kleineren und ihrer Hälfte. Wie lautet die kleinere Zahl?

Lösung:

Die kleinere Zahl ist 10 und damit genau halb so groß wie 20. Wenn man die Hälfte der kleineren Zahl mit m bezeichnet, ist die Dif­fe­renz aus ihr und ihrer Hälfte ebenfalls m. Das Dreifache dieser Zahl ist 3m und die Differenz aus 20 und der Hälfte der kleineren Zahl 20 – m. Da 3m und 20 – m gleich sein sollen, gilt 20 = 4m, damit m = 4 und es ergibt sich 10 als die kleinere Zahl.

Anmerkung: Diese Aufgabe eignet sich als Hinführung auf das folgende Warm-up.

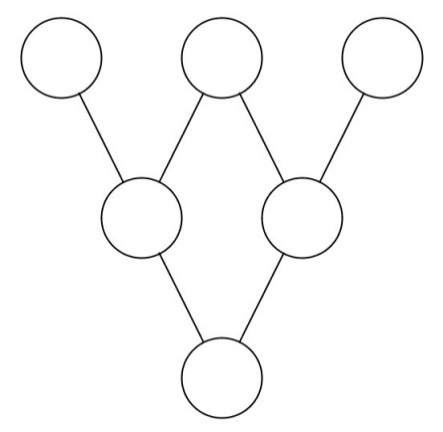
**Warm-up 68: Zwei Zahlen**

Wenn man von jeder von zwei verschiedenen Zahlen die Hälfte der kleineren abzieht, dann ist die Dif­ferenz aus der größeren und der Hälfte der kleineren dreimal so groß wie die aus der kleineren und ihrer Hälfte. Um wieviel ist dann die größere Zahl größer als die kleinere?

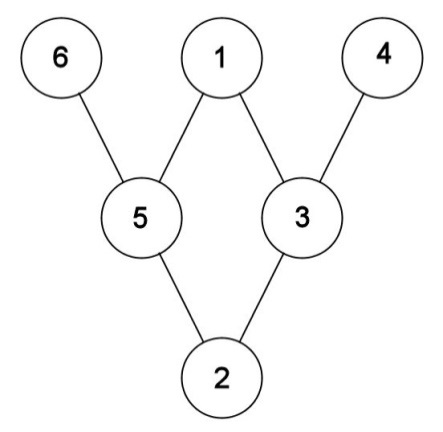
Lösung:

Sie ist genau doppelt so groß. Wenn man die Hälfte der kleineren Zahl mit m bezeichnet, ist die Dif­fe­renz aus ihr und ihrer Hälfte ebenfalls m. Die Differenz aus der größeren Zahl und der Hälfte der klei­ne­ren Zahl ist 3m. Dann ist die kleinere Zahl m+m=2m und die größere 3m+m=4m. Die beiden Zahlen ste­hen also im Verhältnis 2:1 zueinander.

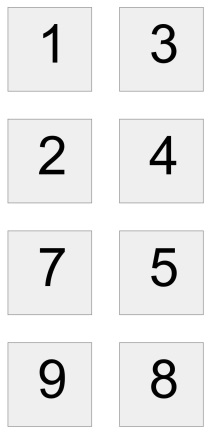
Anmerkung: Man sollte die Schülerinnen und Schüler auf die Lösungsidee des vorherigen Warm-up ver­weisen. Allgemein sollten die Schülerinnen und Schüler durch diese beiden Warm-ups erkennen, dass es eine gute Strategie ist, zunächst einmal mit konkreten Zahlen einige Beispiele durchzu­rech­nen, um hinter das allgemeine Prinzip einer Aufgabe oder auf eine Lösungsidee zu kommen.

**Warm-up 69: Zahlen in Dreiecken**

Die Zahlen von 1 bis 6 sollen so in die Kreise eingetragen werden, dass in dem Kreis, der sich unter zwei Kreisen befindet, immer die Differenz der Zahlen aus den oberen Kreisen steht.

Lösung:

Die größte Zahl, also die 6, muss in der obersten Reihe stehen, da sie nicht eine Differenz aus andern Zahlen sein kann. Die Positionen der anderen Zahlen müssen durch Ausprobieren gefunden werden. Eine mögliche Lösung ist angegeben.

**Warm-up 70: Gleiche Summen**

Dargestellt sind acht Karten, die in zwei Reihen liegen. Durch Umlegen möglichst weniger Karten soll erreicht werden, dass die Summen der Zahlen in beiden Reihen gleich sind.

Lösung:

Alle Zahlen zusammen haben die Summe 39. Da das eine ungerade Zahl ist, kann man zunächst vermuten, dass man gleiche Summen in beiden Reihen nicht erreichen kann. Betrachtet man die Zahlen genauer, stellt man fest, dass die Zahl sechs fehlt. Diese Zahl kann man aber durch Drehen der Karte mit der Zahl 9 bekommen. Dann ist die Summe aller Zahlen 36, und es sollte möglich sein, die Summen 18 für die beiden Reihen zu bekommen. Das geht tatsächlich, wenn man die beiden Karten in der untersten Reihe vertauscht.

**Warm-up 71: Socken und Schuhe**

Meine kleine Schwester und ich teilen sich - leider - ein einziges Zimmer. Nun musste ich einmal ein Paar Socken und ein Paar Schuhe aus meinem Schrank holen, während meine Schwester noch im dunk­len Zimmer schlief. Ich fand alle Schuhe und Socken so, wie ich sie hinterlassen hatte, nämlich als großen Haufen von sechs Schuhen und 24 braunen und schwarzen Socken. Mir war inzwischen schon egal, welche Schuhe und welche Socken ich anziehen wollte - nur sollten es jeweils zwei von ei­nem Paar sein. Wie viele Schuhe und wie viele Socken musste ich mindestens aus dem dunklen Zim­mer mitnehmen, damit ich sicher ein Paar gleicher Schuhe und ein ebensolches Paar Socken da­bei hatte?

Lösung:

Man muss mit dem schlimmsten möglichen Fall argumentieren. Der besteht darin, dass man drei Schu­he von verschiedenen Paaren sowie eine schwarze und eine braune Socke aus dem Zimmer holt. Der nächste Schuh gehört sicher zu einem der bisherigen Schuhe und die nächste Socke ist sicher braun oder schwarz. Damit ergeben sich vier Schuhe und drei Socken als die sichere Variante, wenn man nicht zwei verschiedene Schuhe oder Socken an den Füßen haben möchte.

**Warm-up 72: Drei Verkehrsmittel**

Ein Motorradfahrer war von einem Postamt zum Flugplatz zur Ankunft eines Flugzeugs ge­schickt wor­den. Das Flugzeug kam aber vor der fahrplanmäßigen Zeit an und die Post war mit einem Rad­fah­rer zum Postamt geschickt worden. Als der Radfahrer eine halbe Stunde des Weges zu­rück­ge­legt hat­te, begegnete er dem Motorradfahrer, der die Post übernahm und unverzüglich umkehrte. Im Post­­amt traf der Motorradfahrer 20 Minuten früher ein, als er hätte da sein müssen. Wieviel Mi­nu­ten vor der fahrplanmäßigen Zeit war das Flugzeug angekommen?

Lösung:

Der Motorradfahrer war 20 Minuten weniger unterwegs, als er gebraucht hätte, um den Weg zum Flug­platz und wieder zurück zum Postamt zurückzulegen. Die Zeitersparnis entstand dadurch, dass er die­ses Mal nicht bis zum Flugplatz fuhr. Diese 20 Minuten hätte er für die Strecke vom Treffpunkt mit dem Radfahrer bis zum Flugplatz und zurück benötigt. Um den Weg nur in einer Richtung zu­rück­zu­le­gen, hätte er demnach 10 Minuten gebraucht. Wir wissen aber auch, dass der Motorradfahrer den Rad­fahrer traf, als dieser 30 Minuten unterwegs war, das heißt eine halbe Stunde nach der Ankunft des Flugzeugs. Da der Motorradfahrer zur korrekten Zeit vom Postamt weggefahren war und er zu die­sen 30 Minuten noch 10 Minuten bis zum Flugplatz gebraucht hätte, folgern wir, dass das Flug­zeug 40 Minuten vor der fahrplanmäßigen Ankunft auf dem Flugplatz eingetroffen war.

**Warm-up 73: Geburtstagskuchen**

Zu jedem Geburtstag habe ich einen Kuchen bekommen, auf dem so viele Kerzen waren wie mein Alter an diesem Tag war. Im Laufe meines Lebens habe ich bisher 210 Kerzen auf den Geburtstagskuchen ausgepustet. Wie alt bin ich?

Lösung:

Man kann der Reihe nach die Zahlen 1 + 2 + 3 + … addieren und findet, dass man 20 Jahre alt ist.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Summenformel von Gauß zu nutzen. Die Zahl 210 muss sich als schreiben lassen. Die algebraische Lösung der Gleichung ist in der Klasse 6 nicht zu erwarten. Man kann aber gezielt nach der Lösung suchen. Es ist . Also ist .

**Warm-up 74: Das Alter des Freundes**

Ein Freund von mir hat einen Sohn, der älter als 45 Jahre ist. Kürzlich erzählte er mit, dass man das Alter seines Sohnes erhält, wenn man die Ziffern seines Alters umdreht. Außerdem ist der Sohn 27 Jahre jünger als der Freund. Der Freund ist noch nicht 80 Jahre alt.

Lösung:

Probiert man einige Zahlen aus, so stellt man fest, dass die Differenz zwischen einer zweistelligen Zahl und der Zahl mit den vertauschten Ziffern immer ein Vielfaches von 9 ist. Wenn die Ziffern sich um eins unterscheiden, ist die Differenz 9, unterscheiden sie sich um 2 ist die Differenz 18 usw.

Da hier die Differenz 27 ist, müssen sich die Ziffern um 3 unterscheiden.

Alle Möglichkeiten ab 45 werden aufgelistet:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Alter des Sohnes | 47 | 58 | 69 |
| Alter des Freundes | 74 | 85 | 96 |

Nur die erste Möglichkeit trifft zu.

**Warm-up 75: Saftbecher**

Auf einem Tisch stehen 14 Becher. Sieben Becher sind mit Saft ganz gefüllt, die sieben anderen sind nur bis zur Hälfte gefüllt. Kann man die Becher so in drei Gruppen aufteilen, dass in jeder Gruppe gleich viel Saft enthalten ist?

Lösung:

Die sieben vollen Becher entsprechen 14 halb gefüllten Bechern. Auf dem Tisch steht also die gleiche Saftmenge, die in 21 halb gefüllten Bechern wäre. Die Gruppen müssen nun so gebildet werden, dass in jeder Gruppe die Saftmenge von 7 halb gefüllten Bechern sich befindet.

Eine mögliche Aufteilung ist:

Gruppe 1: 3 volle Becher, ein halb gefüllter Becher;

Gruppe 2: 3 volle Becher, ein halb gefüllter Becher;

Gruppe 3: 1 voller Becher, fünf halb gefüllte Becher.

**Warm-up 76: Köpfe und Beine**

Bei einem Zoobesuch hat ein Besucher insgesamt 36 Tierköpfe und 100 Tierbeine gezählt. Wie viele zweibeinige und wie viele vierbeinige Tiere hat er gesehen?

Lösung:

Wären alle Tiere vierbeinig, so hätte der Besucher Beine gezählt. Da er nur 100 Beine gezählt hat, müssen 22 zweibeinige Tiere dabei gewesen sein. Er hat also 22 zweibeinige und 14 vierbeinige Tiere gesehen.