Trassierung von Straßen

Modellierung ganzrationaler Funktionen (Knickfreiheit, Krümmungsruckfreiheit)

Autoren:
Cornelia Nicksch
Dr. Olaf Noll

Gesamtschule Sophie-Scholl, Remscheid

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial

Kurzbeschreibung

Das Unterrichtsvorhaben beschreibt die Modellierung ganzrationaler Funktionen über die Trassierung von Straßen. Dabei werden wichtige Kernkompetenzen der Analysis im Sachzusammenhang vertieft. Insbesondere das Krümmungsverhalten wird intensiv thematisiert. Daher ist das vorgestellte Unterrichtsvorhaben eher für den **Leistungskurs** geeignet. Die Schüler erfahren den GTR dabei als wichtiges Werkzeug, um die Aufgabe in angemessener Zeit zu erfassen und zu bearbeiten. Die Fertigkeiten der Schüler den GTR zu bedienen werden dabei automatisch verfeinert.

Mit besonderem Blick auf die Abiturvorbereitungen ist ein gefestigtes Wissen im Bereich der Modellierungskompetenz und im Umgang mit dem Werkzeug GTR außerordentlich wichtig.

Das Unterrichtsvorhaben gliedert sich in 8 Sequenzen, die insgesamt ca. 2-4 Unterrichtsstunden á 45 min umfassen (je nachdem, ob die Übungsaufgaben (AB2 und AB3) im Unterricht oder als Hausaufgabe bearbeitet werden).

Übersicht über die Unterrichtssequenzen

	Sequenz	Material	mögl. Arbeitsform	Zeit
1	Erarbeitung von Bedingungen zur Modellierung	Aufgaben 1-3, AB 1	Einzelarbeit	15
2	Sammeln der Ergebnisse		Plenum	5
3	Modellierung des Straßenverlaufs I	Aufgaben 4-5, AB 1	Einzelarbeit	25
4	Info zur Erweiterung der Kriterien	Aufgabe 6, AB 1		5
5	Modellierung des Straßenverlaufs II	Aufgabe 7, AB 1	Einzelarbeit	15
6	Vergleich und Beurteilung der Modellierungen I und II	AB 2	Partner- oder Gruppenarbeit	20
7	Übungsaufgabe	AB 2	Evtl. HA	
8	Übungsaufgabe	AB 3	Evtl. HA	

Didaktische Hinweise

Idealerweise erfolgt das Unterrichtsvorhaben nach Einführung in das Thema „Funktionsgleichungen anhand von gegebenen Eigenschaften bestimmen“ (Steckbriefaufgaben).

Die Unterrichtseinheit wurde mit dem TI-*n*spire CX CAS erstellt. In der Modelllösung sind auch Lösungshinweise für den TI-*n*spire CX (ohne CAS) enthalten. Es können aber auch andere GTR benutzt werden, wenn unten genannte Funktionalitäten vorhanden sind.

Benötigte Funktionalitäten des GTR

- Funktionen abschnittsweise zeichnen
- Lösung linearer Gleichungssysteme
- Ableitungen an einer Stelle bestimmen

Benötigte Vorkenntnisse der Schüler mit dem GTR:

- Lösung linearer Gleichungssysteme
- Funktionen mit dem GTR zeichnen.
- Ableitung an einer Stelle bestimmen

Die Behandlung der Trassierung bietet einige wesentliche Vorteile:

- Vertiefende Einblicke in die Zusammenhänge zwischen Funktionen und Ableitungen abseits der üblichen Aufgabenformate zur HOP/TIP/WEP-Ermittlung
- Festigt das abschnittweise Darstellen von Funktionen mit Hilfe des GTR
- Effektive Methode zur Bearbeitung von Steckbriefaufgaben mit Hilfe des GTR
- Verdeutlicht die Nutzbarkeit von Symmetrieeigenschaften
- Ermöglicht die Veranschaulichung der Eigenschaften „Stetigkeit“ und „Differenzierbarkeit“ von Funktionen

Weitere Hinweise zur Durchführung:

Bei einer Beschränkung auf Knickfreiheit kann die Aufgabe auch im Grundkurs bearbeitet werden (Wegfall von Aufgabe 6 und 7 des AB 1 sowie von AB 2).

Nach der ersten Erarbeitungsphase (Sequenz 1), wird eine Plenumsphase zur Ergebnissicherung empfohlen, um eine zielführende Modellierungssequenz zu gewährleisten.

Aufgrund der Komplexität der Überlegungen sollte AB 2 mindestens in Partnerarbeit bearbeitet werden.

Arbeitsblatt 3 verlangt eine umgekehrte Vorgehensweise, da gegebene Funktionen zuerst am Grafen betrachtet und Ergebnisse dann rechnerisch hinsichtlich der Trassierungskriterien überprüft werden. Im Grundkurs wird wieder auf die Krümmungsruckfreiheit verzichtet und nur die Knickfreiheit betrachtet.

Lehrplanbezug

Thema: Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen (KLP, S. 30)

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung,
- interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang,
- bestimmen Parameter einer Funktion mit Hilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“).

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte) (KLP, S. 19-24)

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum…
  …Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen,
  …Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle,
  …Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle,
- nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen,
- entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus,
- reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge.

Modellieren (strukturieren, mathematisieren, validieren)

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor,
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle,
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells,
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation,
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung,
- verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen.

Problemlösen (erkunden, lösen, reflektieren)

Die Schülerinnen und Schüler

- analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- erkennen Muster und Beziehungen,
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege,
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Symmetrien verwenden, Zurückführen auf Bekanntes,
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus,
- interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung.

Trassierung von Straßen

Argumentieren (vermuten, begründen, beurteilen)
Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Vermutungen auf,
- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (Trassierungskriterien I, II und III),
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen.

Kommunizieren (rezipieren, produzieren, diskutieren)
Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen,
- beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen,
- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege,
- verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus,
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
- dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar,
- erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie,
- nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
- vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen,
- führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei.

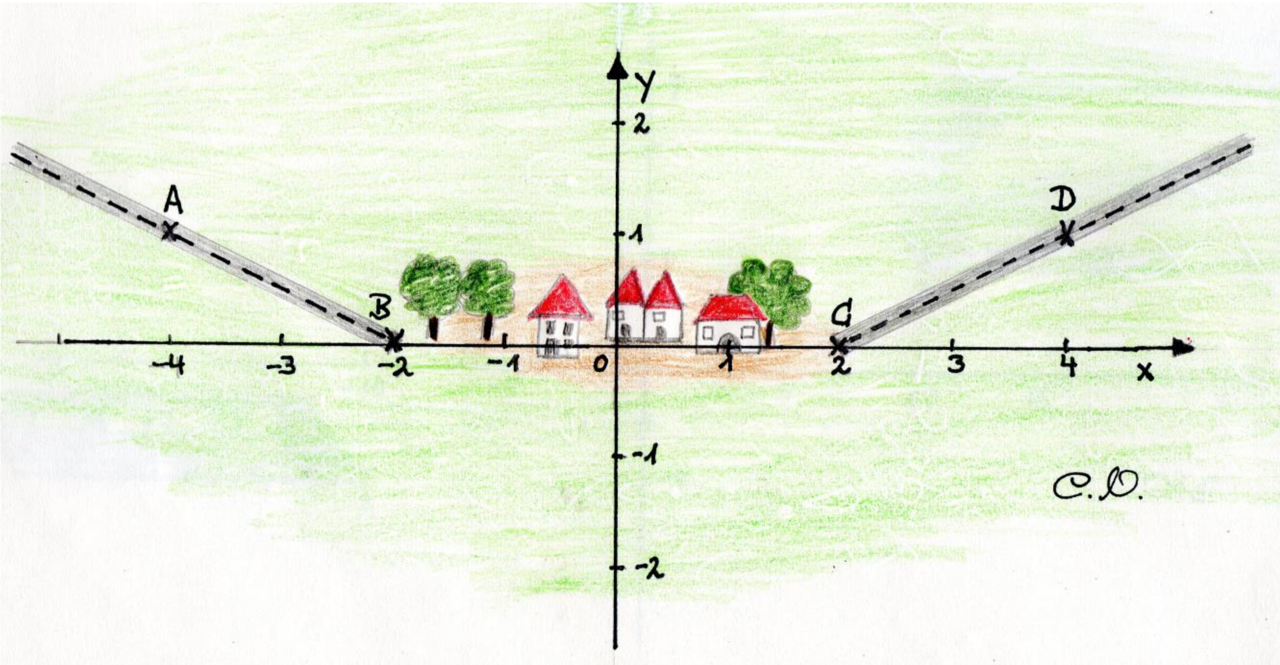
Material:

M1

Straßenplanung - Ist jede Kurve die richtige Kurve?

Bei der Planung eines Neubaugebietes soll eine bestehende Sackgasse mit der zum Neubaugebiet führenden Straße verbunden werden.

Dabei ist es nötig, diese Verbindungsstraße möglichst „gut“ an die bereits vorhandenen Straßenstücke anzuschließen.
Die Planer von Straßen NRW haben ein Koordinatensystem auf eine Planungskarte gelegt.



1 LE ≙ 1km ; A(-4|1) B(-2|0), C(2|0), D(4|1)

1) *Zeichnen Sie einen möglichen Straßenverlauf in das Koordinatensystem ein.*

2) *Nennen Sie Bedingungen, die für den Verlauf der geplanten Straße gelten müssen.*

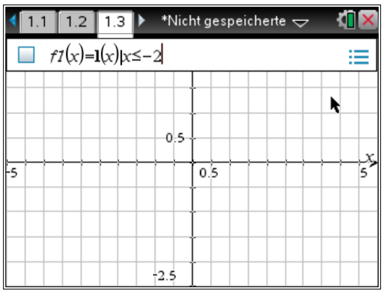
3) *Geben Sie mindestens zwei geeignete Funktionstypen an, die den Verlauf der Verbindungsstraße beschreiben.*

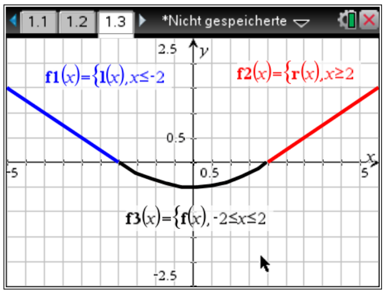
Trassierung von Straßen

4) *Bestimmen Sie geeignete ganzrationale Funktionen zweiten und dritten Grades mit dem GTR/CAS.*

5) *Zeichnen Sie die Graphen der gefundenen Funktionen, indem Sie nach folgender Anleitung vorgehen.*

- Definieren Sie die Funktionen l für das linke Straßenstück, r für das rechte Straßenstück und f für ihre gefundene Funktion im Calculator-Fenster.
- Im Graphs-Fenster stellen Sie eine geeignete Fenstergröße ein.
- Dann zeichnen Sie die linke Gerade l für $x \leq -2$ wie im Screenshot ein. Verfahren Sie in gleicher Weise für die rechte Gerade r ($x \geq 2$) sowie für die Parabel f ($-2 \leq x \leq 2$).





Infokasten Trassierungskriterien

Damit der Verkehrsteilnehmer geschmeidig und ohne unnötige Lenkbewegungen die Straße befahren kann, ist außer der Versatz- und Knickfreiheit auch die sogenannte Krümmungsruckfreiheit notwendig. Dies bedeutet mathematisch eine Übereinstimmung des Krümmungsverhaltens der Übergänge.

An der Übergangsstelle x_0 gilt für zwei Funktionen s und t allgemein:

I: Versatzfreiheit: $s(x_0) = t(x_0)$

II: Knickfreiheit:

III: Krümmungsruckfreiheit:

6) *Ergänzen Sie die mathematischen Bedingungen II und III im Infokasten.*

7) *Bestimmen Sie eine neue Funktion g, die zusätzlich an den Übergangsstellen „krümmungsruckfrei“ ist.*

Trassierung von Straßen

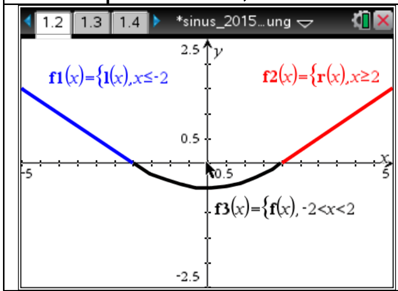
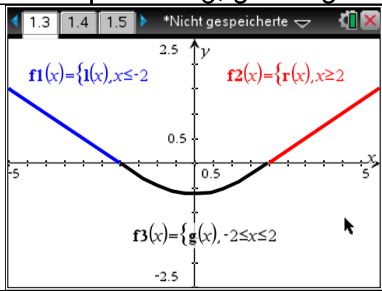
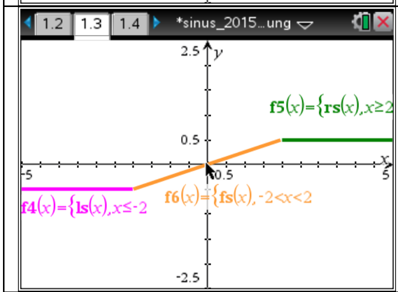
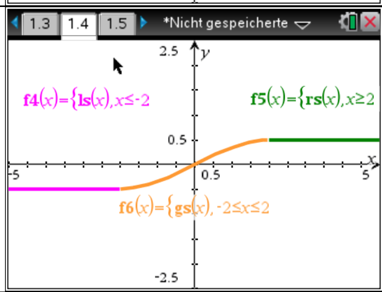
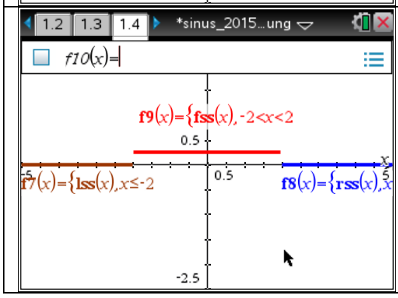
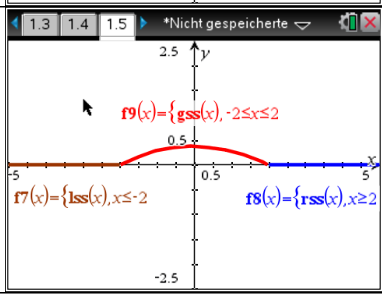
M2

Vergleich der Funktionen f und g

Sie sehen im Vergleich auf der linken Seite die zuerst gefundene Funktion f und deren Ableitungen. Auf der rechten Seite die neu gefundene Funktion g und ihre Ableitungen.

Diskutieren Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede und beurteilen Sie deren Auswirkungen auf die Trassierung.

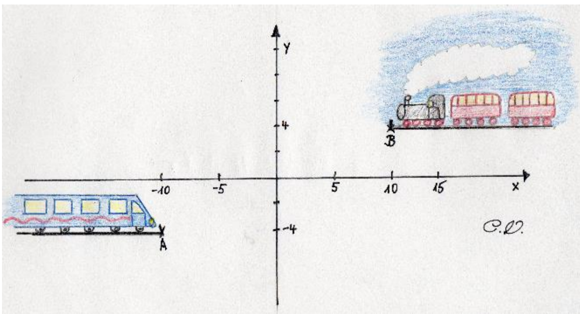
Protokollieren Sie ihre Ergebnisse in der mittleren Spalte.

<table>
<tr><th>Graphen von f, f‘ und f“</th><th>Kommentare</th><th>Graphen zu g, g‘ und g“</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

Übungsaufgabe zur Trassierung

Bei Bahngleisen spielt die Krümmungsruckfreiheit aufgrund der besonderen technischen Voraussetzungen von Zügen (Größe, Masse, Gleisaufbau) eine noch größere Rolle.

Zwei gerade Streckenteile mit $l(x) = -4$ für $x \leq -10$ und $r(x) = 4$ für $x \geq 10$ sollen durch eine Modellierung einer Funktion f unter Beachtung der Trassierungskriterien verbunden werden. (1 LE ≙ 10m)



SINUS Nordrhein-Westfalen

Trassierung von Straßen

M3

Ein Besuch im Zoo

Eine geradlinige, parallel zur x-Achse verlaufende Straße ist jeweils bis zu den Anschlussstellen A(0|2) und C(5|2) fertiggestellt. Jetzt soll das fehlende Stück gebaut werden, allerdings so, dass die Straße durch B(4|1) und damit am Zoo vorbeiführt (1 LE ≙ 100m).

a) Fertige eine Skizze an.

b) Zwei Ingenieurbüros geben Vorschläge ab. Vorschlag des Büro 1 ist die Funktion f

mit $$f(x) = \frac{1}{64}x^6 - \frac{15}{64}x^5 + \frac{75}{64}x^4 - \frac{125}{64}x^3 + 2$$

Büro 2 gibt als Vorschlag eine zusammengesetzte Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} g1(x) = \frac{13}{128}x^3 - \frac{15}{32}x^2 + 2 & für\ 0 \leq x \leq 4 \\ g2(x) = -\frac{7}{8}x^3 + \frac{45}{4}x^2 - \frac{375}{8}x + \frac{129}{2} & für\ 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$ an.

Zeichnen Sie beide Funktionen mit dem GTR/CAS und vergleichen Sie die Lösungen der beiden Büros. (Definieren Sie die zusammengesetzte Funktion einzeln ohne Einschränkung des Definitionsbereichs, die Einschränkung erfolgt erst im Graphs-Fenster)

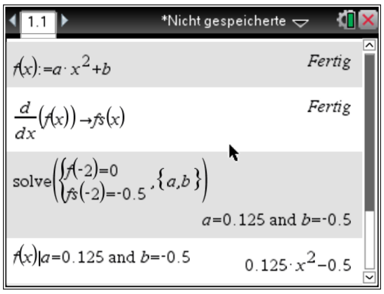
c) Überprüfen Sie optisch durch mehrfaches Zoomen, ob die Knickfreiheit von g und r am Punkt C gewährleistet ist.

d) Überprüfen Sie beide Funktionen f und g rechnerisch auf die Einhaltung der Trassierungskriterien in den Punkten A, B und C.

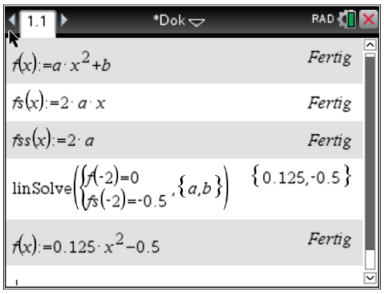
Lösungen der Aufgaben

zu M1

1) individuelle Lösungen
2) Achsensymmetrisch: $f(-2) = 0 \; und \; f'(-2) = -0{,}5 \; oder \; f(2) = 0 \; und \; f'(2) = 0{,}5$
3) Funktion 2. Grades und Funktion 3. Grades
4) Lösen des linearen Gleichungssystems:



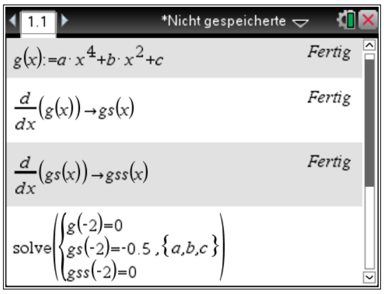
CAS

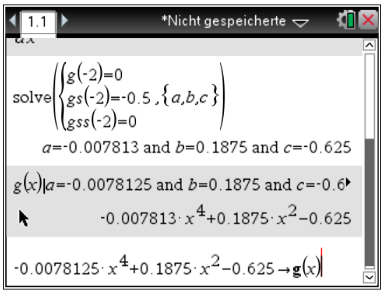


GTR

Bei der Version ohne CAS (rechts) müssen die Ableitungen händisch gemacht und definiert werden. Ebenso muss f(x) per Hand mit den gefundenen Koeffizienten neu definiert werden.

5) Siehe Arbeitsblatt (CAS und GTR funktionsgleich)
6) Knickfreiheit: $s'(x_0) = t'(x_0)$; Krümmungsruckfreiheit: $s''(x_0) = t''(x_0)$
7) Es wird eine achsensymmetrische Funktion 4. Grades als Modellierung verwendet. Die neue Bedingung $g''(-2) = 0 \; oder \; g''(2) = 0$ wird ergänzt.



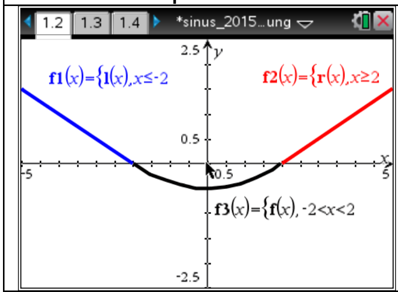
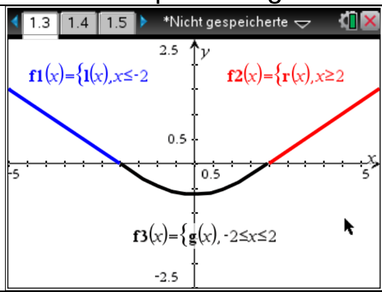
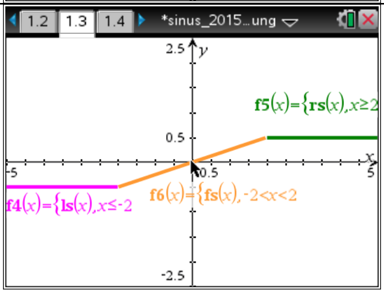
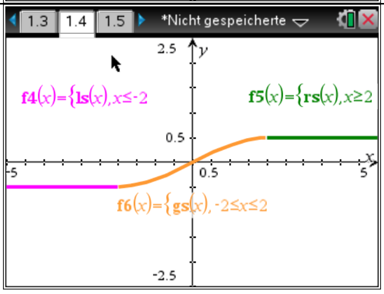
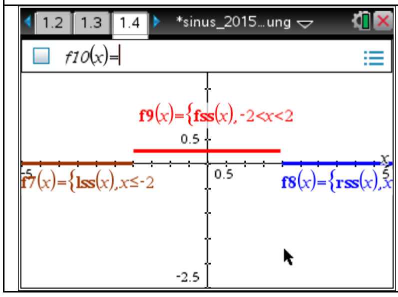
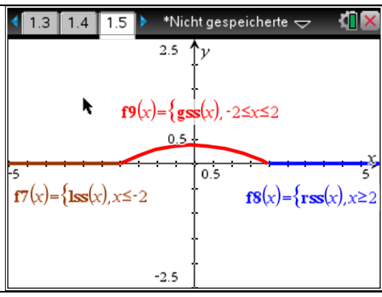


Für die GTR Version gelten die Einschränkungen von Aufgabe 4.

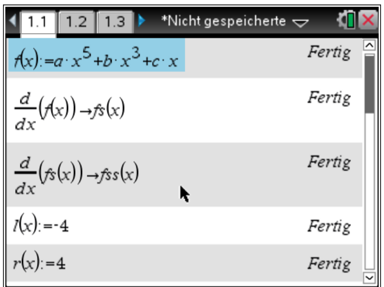
Die Koeffizienten von g(x) können automatisch übernommen werden, indem man in die Eingabezeile g(x)| eintippt, dann mit den Cursortasten die Zeile mit den Koeffizienten markiert und mit Enter in die Eingabezeile kopiert. (Nur CAS)

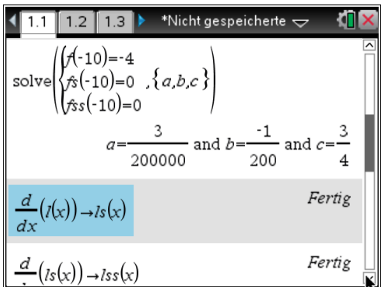
Trassierung von Straßen

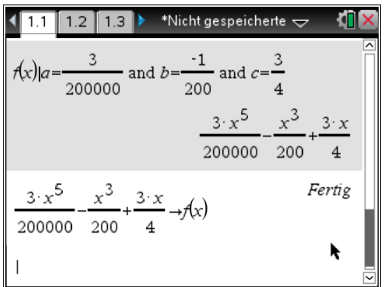
zu M2

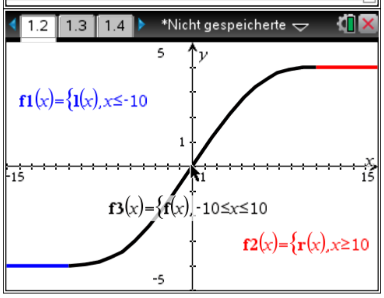
<table>
<tr><th>Graphen zu f</th><th>Kommentare</th><th>Graphen zu g</th></tr>
<tr><td>
</td><td>wenig Unterschiede
Der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt bei g etwas tiefer.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Beide Graphen zeigen stetige Funktionen.
Funktionswerte der Ableitung stimmen an den Übergangsstellen überein.
Die Ableitungsfunktion von f ist linear, von g ist sie 3. Grades.
Die Übergänge des Graphen von f‘ sind nicht knickfrei.
Achtung: Abgrenzung vom ursprünglichen knickfreien Übergang von f.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Das Krümmungsverhalten von f ist nicht „versatzfrei“.
Das Krümmungsverhalten von g ist „versatzfrei“.
Die zusammengesetzte Funktion links ist nicht stetig, rechts ist sie stetig.</td><td>
</td></tr>
</table>

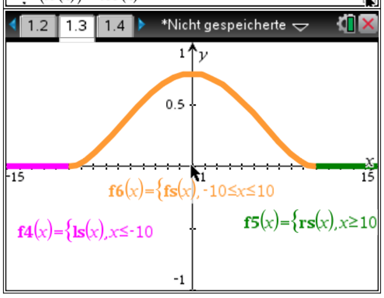
Lösung der Übungsaufgabe (Trassierung Bahngleise) in Screenshots (hier CAS-Version):

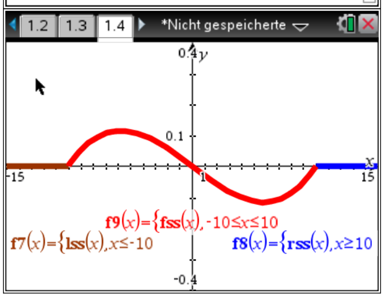










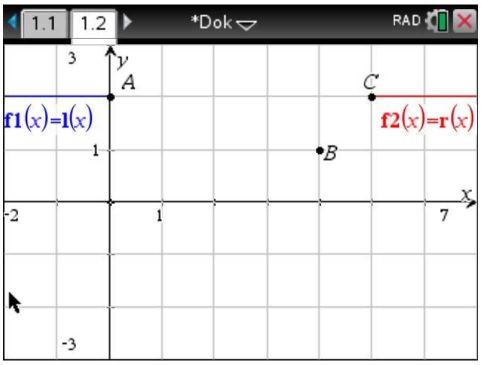


Lösungen, die eine Funktion 3. Grades als Ansatz beinhalten, müssen nochmal auf die Krümmungsruckfreiheit überprüft werden.

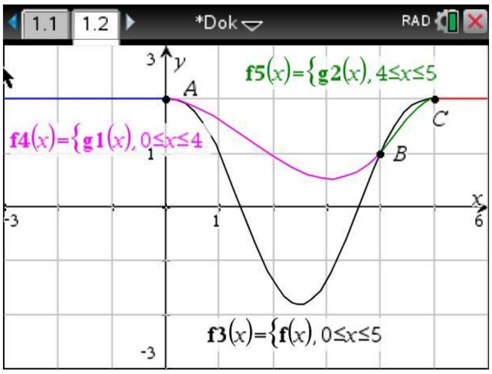
Trassierung von Straßen

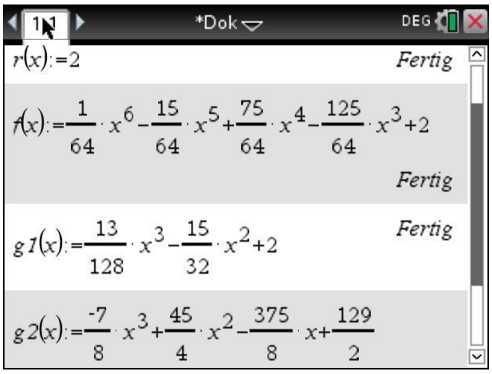
zu M3

a) Skizze/Zeichnung:

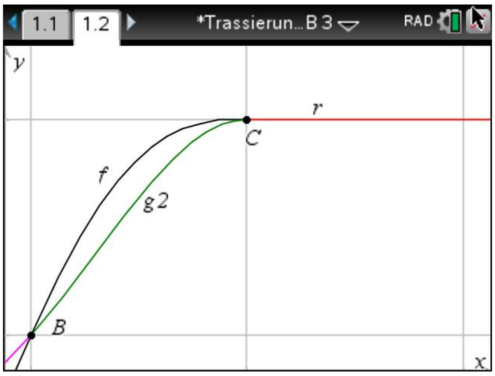


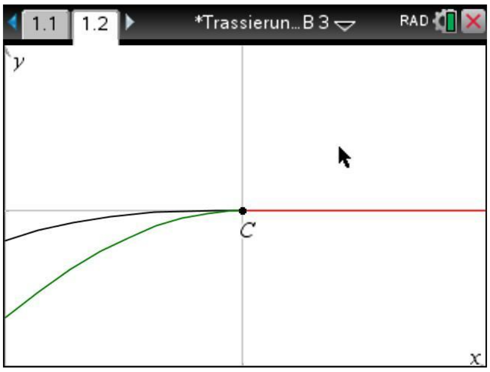
b) Definition der Funktionsterme l(x), r(x), f(x), g1(x) und g2(x). Abschnittsweises Zeichnen durch Einschränkung des Definitionsbereichs z.B. f4(x)=g1(x)|0≤x≤4





c) Der Übergang im Punkt C von g2 nach r sieht in der Abbildung erst mal nicht knickfrei aus, nach mehrmaligem Heranzoomen kann man aber optisch auf Knickfreiheit schließen.





d) Die Werte der ersten und zweiten Ableitungen der aneinander stoßenden Funktionen an den Punkten A(0|2), B(4|1) und C(5|2) werden verglichen. Die Werte der ersten Ableitungen sind sowohl bei f und g sowie den Geraden l und r in den Punkten A, B und C gleich, woraus die Knickfreiheit geschlossen werden kann. Die Werte der 2. Ableitung sind allerdings bei g an den Punkten A(0|2) und C(5|2) nicht gleich Null (=Wert der 2. Ableitung jeder Geraden), daher ist dort keine Krümmungsruckfreiheit gegeben. In B verläuft g versatz-, knick- und krümmungsfrei.