**Vorbemerkung zum Modul**

Mustererkennung, also die Fähigkeit in komplexen Strukturen und Fragestellungen grundlegende Regel- und Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, ist eine wichtige Fertigkeit beim mathematischen Arbeiten.

Klassische Hilfsmittel, wie das Arbeiten mit Variablen und das Aufstellen von entsprechenden Gleichungen, sind in der Klassenstufe 5 und 6 noch nicht vertraut. Es ist Ziel dieses Moduls, die Schülerinnen und Schüler, die es gewohnt sind, Aufgaben einfach auszurechnen, zu bewegen, durch das Suchen nach Ähnlichkeiten und wiederkehrenden Strukturen zur Lösung zu gelangen. Dabei werden besonders Fertigkeiten wie Abstrahieren und systematisches Arbeiten geschult. Die Schülerinnen und Schüler haben die Möglichkeit (ohne das entsprechende Begrifflichkeiten oder Verfahren thematisiert werden), Erfahrungen zum induktiven Prinzip zu sammeln.

Da zahlreiche Aufgaben von geometrischen Strukturen ausgehen, haben die Schülerinnen und Schüler oft die Möglichkeit, zeichnerisch zu Teillösungen zu gelangen. Um dann den unterschiedlich einsetzenden Abstraktionsprozess nicht auszubremsen, lassen sich Teilaufgaben auch als Zusatzaufgaben einsetzen.

Unter Umständen können die ausgewählten Aufgaben auch Anlass bieten, Schülerinnen und Schüler mit Tabellenkalkulationen vertraut zu machen.

Zum Einstieg in dieses Modul können [PopUp-Karten](../../Projekte_und_Spiele/Pop_Up/Fraktale_Pop-Up-Karten.docx) verwendet werden. Für die ersten vier Generationen der einfachen Treppe stehen [Vorlagen](../../Projekte_und_Spiele/Pop_Up/Vorlagen_1_Generationen.docx) zur Verfügung. Die zugehörigen PopUp-Karten können den Schülerinnen und Schülern der Reihe nach gezeigt werden, so dass die Zahl der Treppenstufen durch einfaches Zählen ermittelt werden kann. Es ergibt sich

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Nr. der Karte | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Zahl der Stufen | 1 | 3 | 7 | 15 |

Entweder wird nun schrittweise weitergerechnet oder einzelne Schülerinnen oder Schüler erkennen, dass es sich um die um 1 verminderten Zweierpotenzen handelt.

Olympiadeaufgabe 490515

**Aufgabe:**

# Durch die Muster A und B wird jeweils eine Zahlenfolge beschrieben, wenn man die Anzahl der kleinen Quadrate zählt. Setze die Zahlenfolgen bis zur 10. Zahl fort, ohne die Muster zu zeichnen. Versuche, bei Muster A eine Methode zu finden, mit der du leicht z.B. die 21. Zahl oder die 77. Zahl berechnen kannst.

# 

# b) Durch die Würfelmauer (Muster C) wird ebenfalls eine Zahlenfolge beschrieben, wenn man die Anzahl der Würfel zählt. Schreibe die Folge bis zur 10. Zahl auf.



**Lösungsvorschlag:**

a) zum Muster A:

Für die ersten vier Stufen heißen die Bildungsvorschriften:

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Stufe | 1 |
| 2. Stufe | 1 + 3 = 4 |
| 3. Stufe | 1 + 3 + 5 = 9 |
| 4. Stufe | 1 + 3 + 5 + 7 = 16 |

Es wird für die nächste Stufe immer die nächste ungerade Zahl addiert. Die gesuchte Folge lautet somit 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

zum Muster B:

Für die ersten vier Stufen heißen die Bildungsvorschriften

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Stufe | 1 |
| 2. Stufe | 1 + 4 = 5 |
| 3. Stufe | 1 + 4 + 8 = 13 |
| 4. Stufe | 1 + 4 + 8 + 12 = 25 |

Es wird für die nächste Stufe immer das nächste Vielfache von 4 (das Vierfache der um Eins verringerten Stufenzahl) addiert. Die gesuchte Folge lautet bis zum 10. Glied:

1  5  13  25  41  61  85

 113  145  181

Eine Methode, mit der man bei Muster A auch für große Zahlen die Anzahl der Kästchen unmittelbar findet, ist das Quadrieren der Stufenzahlen. Also lautet das 21. Glied  und das 77. Glied ist . Dieses lässt sich auch gut durch Zerschneiden und Neuordnung der Doppeltreppe veranschaulichen und begründen.

b) zum Muster C:

Für die ersten vier Stufen heißen die Bildungsvorschriften

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Stufe | 1 |
| 2. Stufe | 1 + 3 = 4 |
| 3. Stufe | 1 + 3 + 6 = 10 |
| 4. Stufe | 1 + 3 + 6 + 10 = 20 |

Bei dieser Mauer wird jeweils ein Dreieck aus Würfeln "untergelegt", also kommen in der 5. Stufe (1+2+3+4+5=) 15 Würfel hinzu, so dass in der 5. Stufe (20+ 15 =) 35 Würfel vorhanden sind.

Entsprechend ist die 6. Zahl der Folge (35 + 15 + 6 =) 56,

die 7. Zahl der Folge (56 + 21 + 7 =) 84,

die 8. Zahl der Folge (84 + 28 + 8 =) 120,

die 9. Zahl der Folge (120 + 36 + 9 =) 165,

die 10. Zahl der Folge (165 + 45 + 10 =) 220.

Eine andere Möglichkeit, diese Folge zu erzeugen, findet man unter Einbeziehung der Lösungen zu dem Muster A aus der Teilaufgabe a).

Stellt man sich die "äußere" Mauer des Musters C aufgeklappt vor, so findet man das Muster A wieder. Der verbleibende Rest vor dieser "äußeren" Mauer bildet dann das Muster C aus der vorvorletzten Stufe.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Stufe | Muster A | C der vorvorletzten Stufe | Muster C |
| 1 | 1 |  | 1 |
| 2 | 4 |  | 4 |
| 3 | 9 | 1 | 10 |
| 4 | 16 | 4 | 20 |
| 5 | 25 | 10 | 35 |
| 6 | 36 | 20 | 56 |
| 7 | 49 | 35 | 84 |
| 8 | 64 | 56 | 120 |
| 9 | 81 | 84 | 165 |
| 10 | 100 | 120 | 220 |

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Für das Muster B ist in der Wettbewerbsaufgabe keine explizite Berechnungsformel verlangt. Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler möchten manchmal jedoch eine solche Formel ermitteln. Dabei können sie auf unterschiedliche Arten argumentieren.

Geometrische Argumentationen:

Man kann jede Figur der Folge zusammengesetzt denken aus schwarzen und weißen kleinen Quadraten. Die Anzahl der schwarzen Quadrate ergibt dann die Zahlen der Folge.

Man beobachtet, dass jede hinzukommende Schicht gleich viele schwarze und weiße Quadrate enthält. Da es in der ersten Stufe nur ein schwarzes Quadrat gibt, gibt es in jeder Figur ein schwarzes Quadrat mehr als weiße Quadrate. Insgesamt befindet sich jede Figur innerhalb eines Quadrates der Seitenlänge . Deshalb gibt es in der Figur mit der Nummer *n* genau schwarze Quadrate.

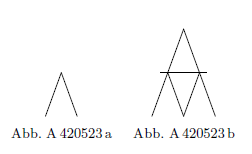
Eine alternative geometrische Argumentation betrachtet die schwarzen Quadrate spaltenweise.

Die Figur mit der Nummer *n* hat *n* Spalten mit je *n* schwarzen Quadraten (rot) und *n* – 1 Spalten mit je schwarzen Quadraten. Somit beträgt die Zahl der schwarzen Quadrate .

Ebenfalls möglich ist eine algebraische Argumentation. In der Figur mit der Nummer n gibt es schwarze Quadrate. Das lässt sich umformen zu

Olympiadeaufgabe 420523

**Aufgabe:**

Aus zwei Karten kann man den Anfang eines Kartenhauses bauen (siehe Abb. A 420523a).

Um ein zweistöckiges Haus zu bauen, benötigt man 7 Karten (siehe Abb. A 420523b).

1. Wie viele Karten benötigt man für ein vierstöckiges Haus?
2. Wie viele Stockwerke hat das Kartenhaus, das man aus den 104 Karten eines Kartenspiels bauen kann? Wie viele Karten bleiben übrig?

**Lösungsvorschlag:**

a) Sicherlich findet man durch Probieren die ersten Lösungen:

Für ein dreistöckiges Haus benötigt man für die oberen beiden Stockwerke – die bilden ein zweistöckiges Haus – 7 Karten. Für das Grundgeschoss werden 3 Karten mehr benötigt als für das 1. Stockwerk, also (5 + 3 =)8 Karten.

Insgesamt benötigt man daher (7 + 5 + 3 = ) 15 Karten.

Für ein vierstöckiges Haus benötigt man (15 + 8 + 3 =) 26 Karten.

b) Wenn man diesen Gedanken fortführt, kommt man zu folgenden Ergebnissen:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Stufe |  |  |
| 1 |  | 2 |
| 2 | 2 + 2 + 3 | 7 |
| 3 | 7 + 5 + 3 | 15 |
| 4 | 15 + 8 + 3 | 26 |
| 5 | 26 + 11 + 3 | 40 |
| 6 | 40 + 14 + 3 | 57 |
| 7 | 57 + 17 + 3 | 77 |
| 8 | 77 + 20 + 3 | 100 |
| 9 | 120 + 23 + 3 | 126 |

Es lässt sich aus 104 Karten ein Kartenhaus mit acht Stockwerken bauen, und es bleiben 4 Karten übrig.

Eine andere Herangehensweise kann zu folgender (für einige Schüler vielleicht auch plausibleren) Lösung führen.

Die Stützenanzahl (2 Karten je Stütze) der unteren Ebene entspricht der Stufenzahl, zwischen zwei benachbarten Stützen liegt jeweils eine Karte, es wird also eine Karte weniger als die Stufenzahl benötigt. Somit erhält man die Anzahl der Karten der untersten Stufe, indem man die Stufenanzahl verdreifacht und diese Zahl um Eins verringert. Die restliche Kartenanzahl entspricht der Anzahl der Karten des Kartenhauses zur vorhergehenden Stufe. Somit lassen sich für die verschiedenen Stufen folgende Kartenanzahlen bestimmen:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Stufe | Kartenanzahl der untersten Stufe | gesamte Kartenanzahl |
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 5 | 7 |
| 3 | 8 | 15 |
| 4 | 11 | 26 |
| 5 | 14 | 40 |
| 6 | 17 | 57 |
| 7 | 20 | 77 |
| 8 | 23 | 100 |
| 9 | 26 | 126 |

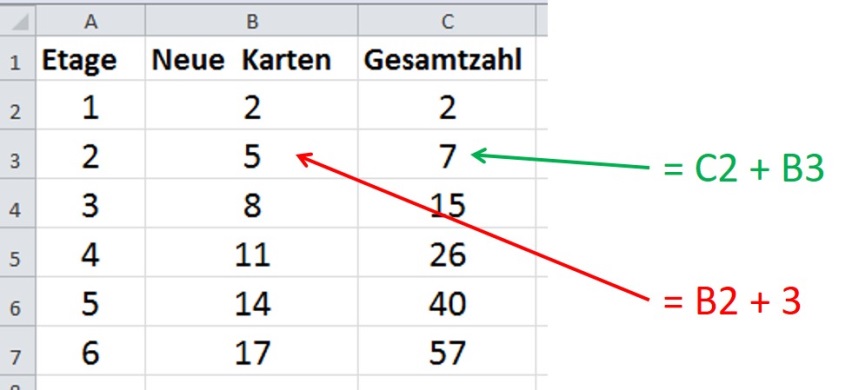
**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Der unterrichtliche Einsatz von Variablen zur Darstellung von mathematischen Zusammenhängen ist in den Klassenstufen 5 und 6 im Allgemeinen nicht eingeführt. Es ist also durchaus wahrscheinlich, dass für einen Teil der Schüler das Ermitteln von Zwischengrößen mit der Stufenanzahl nicht unmittelbar verständlich ist (und unter Umständen eine zusätzliche Schwierigkeit verkörpern kann). Man sollte beim Erarbeiten der entsprechenden Bildungsvorschriften mit den verbalen Formulierungen argumentieren, möglicherweise lässt sich die Darstellung mit Variablen zusätzlich einführen.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Für starke Schüler bietet sich an die beiden Lösungen zu vergleichen und gemeinsame Gedanken herauszuarbeiten.

Die Aufgabe eignet sich in besonderer Weise, um eine Tabellenkalkulation einzusetzen.



Olympiadeaufgabe 440522

**Aufgabe:**

Anne legt ein Rechteck aus 2 mal 3 gleich großen Quadraten (siehe Abbildung A 440522 a). Dieses Rechteck nennen wir das Rechteck der nullten Stufe. Um dieses Rechteck legt sie eine Reihe Quadrate (s. Abb. A 440522 b) und erhält das Rechteck der ersten Stufe. Nun legt sie wieder eine Reihe Quadrate und so entsteht das Rechteck der zweiten Stufe. usw.



a) Aus wie vielen Quadraten besteht das Rechteck der dritten Stufe?

b) Aus wie vielen Quadraten besteht das Rechteck der 20. Stufe? Ermittle das Ergebnis durch eine Rechnung.

c) Anne stellt fest, dass es unter diesen Rechtecken eines gibt, dass genau fünfmal so viele Quadrate enthält wie ein anderes. Für welche Rechtecke gilt dies?

**Lösungsvorschlag:**

a) Da das Rechteck der nullten Stufe eine Breite von 2 und eine Länge von 3 Kästchen besitzt, folgt .

Da beim Übergang zu einem Rechteck der nächsthöheren Stufe stets sowohl die Länge, als auch die Breite um genau 2 Einheiten zunimmt, gilt







Diese Lösung lässt sich auch durch Abzählen der Quadrate einer zeichnerischen Lösung darstellen.

alternative Lösung:









(Hier wurde ein unmittelbar einsichtiges Rekursionsprinzip angewandt.)

b) Analog zur Lösung a) erhält man .

Alternativ ist es auch denkbar, von den Kästchenzahlen der Aufgabe a) auf die Bildungsvorschrift zu schließen, also:









somit 

c) Wenn ein Rechteck 5-mal so groß sein soll wie ein anderes Rechteck, dann muss dessen Flächeninhalt durch 5 teilbar sein. Wegen , , , , , ,... könnte dies für ein Rechteck der 1.,  4. oder 6. Stufe der Fall sein. Durch systematisches Untersuchen dieser möglichen Fälle erkennt man, dass gilt. Folglich enthält das Rechteck der 6. Stufe genau 5-mal so viele Quadrate wie das Rechteck der 2. Stufe.

**Anmerkungen zur Aufgaben und zum Einsatz:**

Motivation für die Teilaufgabe b) ist es, die Anzahl der Kästchen unmittelbar aus der Stufenanzahl zu bestimmen. Die Stufe 20 stellt immer noch eine Größenordnung dar, bei der einzelne Schülerinnen und Schüler versuchen, durch schrittweises Rechnen die Lösung zu finden. Diesen Schülerinnen und Schülern könnte man unter Umständen die entsprechende Aufgabe für eine noch höhere Stufenzahl stellen.

Zur Bestimmung der durch 5-teilbaren Rechtecke in Teilaufgabe c) ist es durchaus sinnvoll, auch ein systematisches Vorgehen anzusprechen. Da sich die Längen der Rechteckseiten immer in Zweierabständen erhöhen, ist, vorausgesetzt ich habe ein entsprechendes Rechteck gefunden, auch das Rechteck der darauffolgenden 5. Stufe ebenfalls durch 5 teilbar. Also *F*1; *F*6, *F*11, *F*16 bzw. *F*4, *F*9, *F*14 und *F*19. Ebenso lässt sich auch erkennen, dass die entsprechenden Reihen mit *F*2; *F*3 und *F*5 nicht durch 5 teilbar sind.

Olympiadeaufgabe 440533



**Aufgabe:**

In einem Sportgeschäft soll eine Schaufensterdekoration aus Tennisbällen entstehen. Die Bälle sollen eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche bilden. (Wie so etwas aus fünf Bällen aussieht, zeigt Abbildung A 440533; die jeweils obere Schicht liegt auf den Lücken der unteren.)

Der Dekorateur hat 300 Bälle zur Verfügung, von denen er so viele wie möglich für seine Pyramide einsetzen will.

a) Wie viele Stockwerke oder Schichten hat die entstehende Pyramide?

b) Wie viele Bälle bleiben übrig?

c) Diese Zahl von übrig bleibenden Bällen ist dem Dekorateur zu hoch. So geht er zum Lager und holt neue Hunderter-Kartons mit Tennisbällen. Schafft er es, mit 400, 500, 600, ..., 900, 1000 Bällen Pyramiden zu bauen und weniger Bälle übrig zu behalten?

**Lösungsvorschlag:**

Zunächst einmal tritt in jeder Schicht eine Quadratzahl von Bällen auf. Nach oben liegen die Bälle immer auf Lücke, und da es z.B. bei 7 Bällen genau 6 Lücken gibt, hat das Stockwerk oberhalb des Stockwerks mit 7⋅7 = 49 Bällen genau 6⋅6 = 36

Bällen.

Die Aufgabe verlangt also die Summe von Quadraten:









...





a) Also kann der Dekorateur eine neunstufige Pyramide bauen.

b) Er behält 15 Bälle über.

c) Die weiteren Quadratsummen bis 1000 lauten:









Keine dieser Zahlen liegt dichter als 15 am nächsten Hunderter, also ist der Einsatz des Dekorateurs vergebens.

Weitere interessante Schichtanzahlen sind:

16 Schichten mit 1496 verwendeten Bällen,

24 Schichten mit 4900 verwendeten Bällen.

Olympiadeaufgabe 410632

Die folgende Aufgabe knüpft an die vorhergehende Aufgabe an. Durch die veränderte Grundfläche ist eine unmittelbare Berechnung der Grundfläche nicht mehr möglich. Das Bilden einer Zwischenfolge für die Größe der Grundfläche stellt die grundlegende Lösungsstrategie dar. Die restliche Umsetzung ist dann mit den vorhergehenden Aufgaben vergleichbar.

Es ist sicherlich auch denkbar, dass sich diese Aufgabe als Zusatzaufgabe für die vorhergehende verwenden lässt.

**Aufgabe:**

Im Obstladen werden Orangen zu einer Pyramide aufgeschichtet. Für die unterste Schicht bildet ein gleichseitiges Dreieck den Rahmen. In jeder Schicht liegen die Orangen über den Lücken der nächst tieferen Schicht.

a) Wie viele Orangen enthält eine siebenschichtige Pyramide?

b) Wie viele Schichten kann man mit 300 Orangen höchstens aufbauen, wie viele Orangen bleiben dann übrig?

**Lösungsvorschlag:**

a) Die Orangen bilden einen Tetraeder. Von der Grundfläche und auch von jeder Seite aus betrachtet sieht der Tetraeder so aus:

Wenn man die Anzahl der Orangen in der n-ten Schicht mit gn bezeichnet und die Schichten von der Spitze ausgehend durchnummeriert, dann gilt

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| g1 = |  |  | = 1 |
| g2 = | g1 + 2 | = 1+2 | = 3 |
| g3 = | g2 + 3 | = 3+3 | = 6 |
| g4 = | g3 + 4 | = 6+4 | = 10 |
| g5 = | g4 + 5 | = 10+5 | = 15 |
| g6 = | g5 + 6 | = 15+6 | = 21 |
| g7 = | g6 + 7 | = 21+7 | = 28 |

Folglich gilt für die Anzahl p7 der Orangen einer siebenschichtigen Pyramide

p7 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84

b) Auf analoge Weise erhält man

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g8 | =28+8 | = 36 |  | p8 | =84+36 | = 120 |
| g9 | =36+9 | = 45 |  | p9 | =120+45 | = 165 |
| g10 | =45+10 | = 55 |  | p10 | =165+55 | = 220 |
| g11 | =55+11 | = 66 |  | p11 | =220+66 | = 286 |
| g12 | =66+12 | = 78 |  | p12 | =286+76 | = 364 |

Wegen 286 = p11 < 300 < p12 = 364 und 300 – 286 = 14 gilt daher:

Mit 300 Orangen kann man eine elfschichtige Pyramide aufbauen und behält dabei noch 14 Orangen übrig.

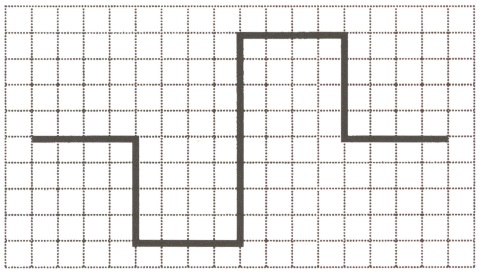
Olympiadeaufgabe 410636

**Aufgabe:**

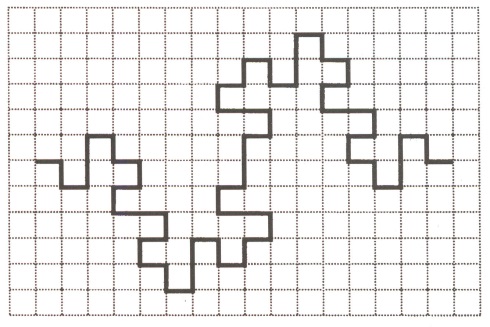
Wir machen einen Ausflug in die Welt der Koch-Kurven und Koch-Inseln. Diese Gebilde wurden vom schwedischen Mathematiker Helge von Koch 1904 erdacht.

In den Abbildungen A 410636 a), b) und c) sind die 0., 1. und 2. Stufe der Entwicklung einer Koch-Kurve dargestellt. Bei dieser Entwicklung wiederholt sich von Stufe zu Stufe immer auf die gleiche Weise die Umwandlung eines geraden Stückes in ein nicht-gerades Stück. Wir beginnen in der 0. Stufe mit einem geraden Stück der Länge 1 m.

 A410636 a) Koch-Kurve 0. Stufe



A410636 b) Koch-Kurve 1. Stufe

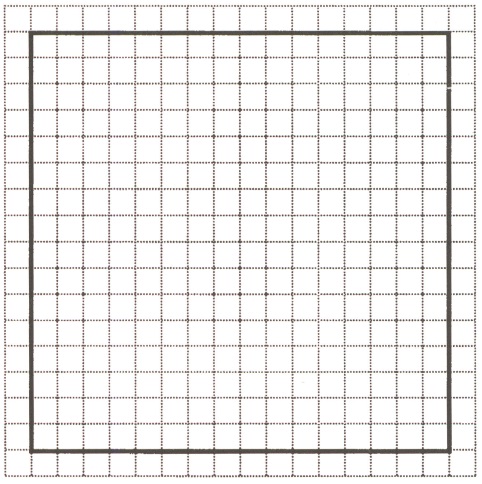


A410636 c) Koch-Kurve 2.Stufe

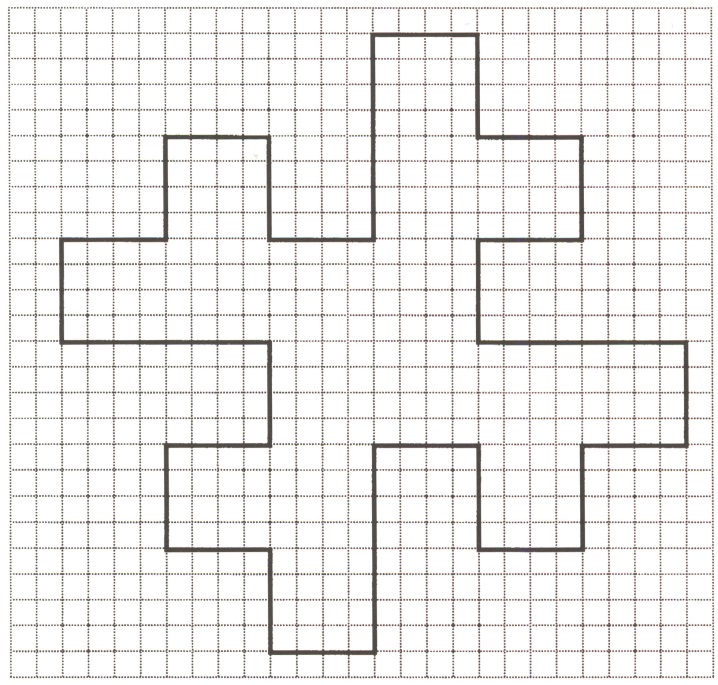
a) Wie lang ist die Koch-Kurve in der 1. Stufe? Und in der 2. Stufe?

b) Wie lang ist die so entstehende Kurve in der 10. Stufe?

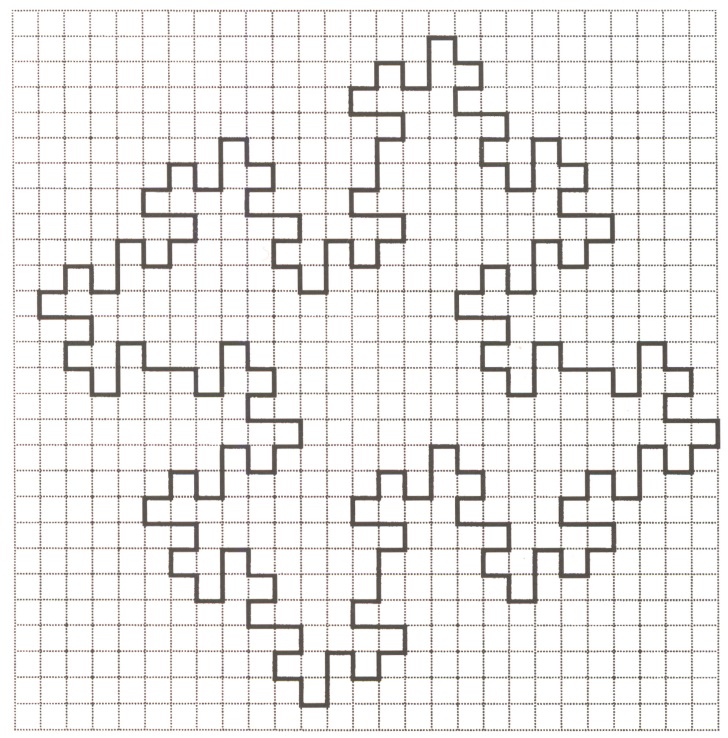
Man kann leicht vier solche Koch-Kurven zu einer Koch-Insel zusammenfügen – siehe Abbildung A 410636 d), e) und f).



A410636 d) Koch-Insel 0. Stufe



A410636 e) Koch-Insel 1. Stufe



A410636 f) Koch-Insel 2. Stufe

c) Wie groß ist die Fläche der Insel in der 1. Stufe? Und in der 10. Stufe? Begründe jeweils deine Aussagen.

**Lösungsvorschlag:**

a) Die Koch-Kurve 1. Stufe besteht aus acht Teilen, die jeweils 0,25 m lang sind.   
Also ist ihre Länge 2 m.

Beim Übergang zur Koch-Kurve 2. Stufe wird jedes der acht Stücke durch ein neues Kurvenstück ersetzt, das seinerseits wieder aus acht Stücken der Länge 0,0625 m besteht. Die Gesamtlänge der Koch-Kurve 2. Stufe ist damit 4 m.

b) Insgesamt ergibt sich das folgendes Bildungsgesetz:

Bei jedem Übergang zur nächsten Stufe wird jedes bisherige Stück durch ein Stück doppelter Länge ersetzt. Jeder Übergang verdoppelt also die bisherige Gesamtlänge.

Damit ist die Länge der Koch-Kurve 10. Stufe .

c) Die Fläche der Koch-Insel 0. Stufe ist 1 m².

Bei jedem Übergang werden auf jedem der bisherigen Randstücke ein kleines Quadrat außen und ein kleines Quadrat innen angebracht, so dass sich die umschlossene Fläche nicht ändert: In jeder Stufe bleibt die Fläche der Koch-Insel 1 m².

**Anmerkungen zur Aufgaben und zum Einsatz:**

Die Suche nach den Längen kann durch den Schüler grafisch initiiert werden. Sollte man aus den so gefundenen Lösungen auf die Verdoppelung der Länge schließen, sollte zumindest verbal auch nach Begründungen für diese Annahme gesucht werden.

Neben dem Erkennen der Muster und der Bedeutung der Begründung für eine vollständige Lösung ist der Umgang mit der fraktalen Struktur von besonderem Interesse. Nicht zuletzt das Beispiel der Koch-Insel als endliche Fläche mit unendlichem Umfang wird bei einigen Schülern Erstaunen oder Verwirrung auslösen und sollte in einer AG hinreichend gewürdigt werden.