### In den folgenden Aufgaben geht es ans Forschen. Dazu musst du viel ausprobieren und deine eigenen Beobachtungen machen. Wenn du eigene Vermutungen findest, schreibe sie auf. Du kannst auch eine Tabellenkalkulation benutzen, wenn du viele Rechnungen von einer Sorte machen möchtest und dann die Ergebnisse vergleichen willst. Am Ende sollen Vermutungen begründet werden. Wenn du die Ergebnisse deiner Versuche mit denen von Mitschülern vergleichst, fällt es unter Umständen leichter, solche Begründungen zu finden.

### Aufgabe 1 (Olympiadeaufgabe 480612)

Christian erklärt Sarah, dass es *arme* und *reiche* Zahlen gibt. „Arm ist eine Zahl, wenn die Summe der echten Teiler kleiner als die Zahl selbst ist. Reich ist eine Zahl, wenn die Summe der echten Teiler größer als die Zahl selbst ist.“

Dazu muss man wissen, was ***Teiler*** und ***echte Teiler*** einer Zahl sind. An Beispielen versteht man sofort, was Teiler sind:

* 3 ist ein Teiler von 15, weil man 15 durch 3 ohne Rest teilen kann.
* 14 ist kein Teiler von 35, weil man 35 nicht ohne Rest durch 14 teilen kann.
* Aber auch: 1 ist ein Teiler von 7, weil man 7 ohne Rest durch 1 teilen kann.
* Und natürlich ist jede Zahl von sich selbst Teiler!

Die ***echten Teiler*** einer Zahl sind alle Teiler außer der 1 und der Zahl selbst. (Beispiel: 30 hat die ***Teiler*** 1, 2, 3, 5, 10, 15 und 30 und die ***echten Teiler*** 2, 3, 5, 6, 10 und 15. Die Summe der echten Teiler der 30 ist dann 41.)

1. Sarah fragt: „Gibt es unter den Zahlen 9, 16, 18, 20, 25 und 36 reiche Zahlen?“
2. Sarah fordert nun Christian auf, unter den Zahlen von 1 bis 99 die kleinste und die größte *reiche* Zahl zu finden. (Achtung! Es ist die größte reiche Zahl gesucht, nicht die „*reichste*“!)
3. Sarah stellt fest: „Primzahlen sind die *ärmsten* Zahlen!“ Stimmt das?

**Aufgabe 2 (Olympiadeaufgabe 360613)**

Die Zahl 135 kann in verschiedener Weise als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dargestellt werden, wobei die 0 nicht als Summand zugelassen werden soll. Beispiele:

135 = 44 + 45 + 46 oder

135 = 2 + 3 + 4 + … + 14 + 15 + 16

1. Gib mindestens zwei weitere Darstellungen von 135 als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen an.
2. Auch die Zahl 15 kann als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen dargestellt werden. Gib **alle** diese Darstellungen an. Erkläre auch, warum es keine weiteren gibt.
3. Peter meint: „Aus der Tatsache, dass 213 : 3 = 71 gilt, kann man eine Darstellung von 213 als Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gewinnen, nämlich ...“

**Aufgabe 3 (Olympiadeaufgabe 360623)**

Frank und Beyhan stellen sich Aufgaben der folgenden Art:

Eine natürliche Zahl wird gegeben; gesucht wird ihre Darstellung als Summe von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, wobei die 0 nicht als Summand zugelassen sein soll.

Frank hat als jeweils gegebene Zahl alle natürlichen Zahlen von 2 bis 10 durchprobiert. Er behauptet: „ Unter diesen Zahlen gibt es mindestens zwei, bei denen die Aufgabe nicht lösbar ist.“

Beyhan hat als jeweils gegebene Zahl alle natürlichen Zahlen von 10 bis 20 mit genau einer Ausnahme durchprobiert. Er behauptet: „Für alle Zahlen, die ich durchprobiert habe, ist die Aufgabe lösbar.“

1. Zeige, dass Frank recht hat.
2. Zeige, dass es zehn Zahlen unter den elf natürlichen Zahlen von 10 bis 20 gibt, so dass Beyhan recht hat, wenn er gerade diese zehn Zahlen durchprobiert hat.
3. Nachdem Beyhan nun noch die vorher weggelassene Zahl probiert hat, behauptet er: „Für diese Zahl ist die Aufgabe nicht lösbar.“ Hat er auch hiermit recht? Begründe deine Antwort.

**Aufgabe 4 (Olympiadeaufgabe 360636)**

1. Finde alle Darstellungen der Zahl 35 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (wobei die Null nicht als Summand zugelassen ist)! Zeige auch, dass es keine weiteren Darstellungen dieser Art für die Zahl 35 gibt.
2. J. Sylvester (1814 – 1897) hat folgenden Satz bewiesen:

*Jede natürliche Zahl ab 3 hat genau so viele Darstellungen als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, wie sie ungerade Teiler hat. Dabei wird die Zahl* 1 *nicht als Teiler mitgezählt, wohl aber die Zahl selbst (falls sie ungerade ist).*

Zeige, dass dein Ergebnis der Aufgabe a) mit dem Satz von Sylvester in Einklang steht.

In den folgenden Aufgaben kannst du den Satz von Sylvester anwenden, ohne ihn zu beweisen:

1. Wie viele Darstellungen als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen hat die Zahl 115? Wie viele solche Darstellungen hat die Zahl 90?
2. Zeige, dass jede Potenz von 2 überhaupt keine Darstellung als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen hat.

Zeige, dass dagegen jede natürliche Zahl ab 3, die nicht Potenz von 2 ist, mindestens eine solche Darstellung hat.