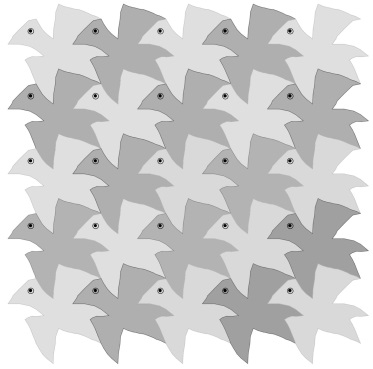
Escher-Parkettierungen

In diesem Modul werden die Schülerinnen und Schüler, aufbauend auf die Heranführungen in den Arbeitsblättern 1 bis 3, sich mit den Konstruktionsprinzipien einfacher Escher-Parkette auseinandersetzen und dazu experimentieren (Arbeitsblatt 4). Mit den Ergebnissen können weitere Escher-Parkettierungen nachkonstruiert werden und sogar eigene Parkettierungen erstellt werden. Der Schwerpunkt dieses Moduls liegt auf linearen Parketten, bei denen identische Kacheln reihenweise verwendet werden.

Es bietet sich an, den Schülern zunächst einige Originalzeichnungen von Escher zu präsentieren. Eine gute Quelle dafür ist <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/escher.html>.



Insbesondere sollten lineare Parkette gezeigt werden, z. B.

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/symm105.html>

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/symm106.html>

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/symm127.html>

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/symm128.html>

Aus Gründen des Urheberrechts können in dieser Veröffentlichung nicht die Originalbilder von Escher abgedruckt werden. Diese können jedoch über die angegebenen Links für den Einsatz im Unterricht heruntergeladen werden.

Eine Abwandlung sind gegenläufige Parkette, bei denen auch gespiegelte Kacheln in jeder zweiten Reihe benutzt werden. Eine weitere Abwandlung sind die gegenläufigen, versetzten Parkette, bei denen jede Reihe um eine halbe Kachelbreite gegenüber der vorangegangenen Reihe versetzt ist.

Beispiele für gegenläufige Parkette sind

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/symm31.html>

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/symm62.html>

Beispiele für gegenläufige, versetzte Parkette sind

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/symm66.html>

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/symm67.html>

[http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/symm88.html](http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/symm88.html%20)

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/symm117.html>

Theoretische Grundlagen findet man unter <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~dobro/e.pdf>

Als Hilfsmittel wird im diesem Modul durchgängig ein Dynamisches Geometriesystem verwendet. Die Materialien sind auf das kostenlose DGS „[Geogebra](http://www.geogebra.org/)“ zugeschnitten.

1. Bevor die Schülerinnen und Schüler die den Parketten zugrunde liegenden Prinzipien analysieren, bietet es sich an, dass sie mit der Geogebra-Vorlage <Mustervorlage_linear_klein.ggb>“ eine eigene Parkettierung erstellen.
2. Da die Parkette umso filigraner gestaltet werden können, je mehr Ziehpunkte vorhanden sind, wird die Vorlage „<Mustervorlage_linear.ggb>“ für spätere Parketterzeugungen besser geeignet sein.
3. Wichtig ist, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Beobachtungen dokumentieren. Das kann durch freie Formulierung geschehen oder mit Hilfe der Aufgabe 1 aus dem Arbeitsblatt 1 „<Escherparkette_von_Hand.docx>“ erfolgen.
4. Die Schülerinnen und Schüler können die Aufgaben 3 und 4 von Arbeitsblatt 1 mit Hilfe von Lösungsfolien kontrollieren. Dazu übertragen Sie die Lösung auf die Folie und legen diese dann an die erstellte Kachel an. Durch die Folie können sie genau erkennen, an welchen Stellen etwas fehlt oder übersteht. Die Vorlage ist in der Datei „<Escherparkette_von_Hand_Folienvorlagen.docx>“.
5. In den weiteren Aufgaben des [Arbeitsblattes 1](Escherparkette_von_Hand.docx), die immer anspruchsvoller werden, sollen die Schülerinnen und Schüler Erfahrungen mit dem Konstruktionsprinzip für die Erzeugung von Escher-Parketten durch Verschiebung gewinnen. Die vorletzte Aufgabe führt propädeutisch den Vektorbegriff ein, da Vektoren als Hilfsmittel bei der Erzeugung der Kacheln mit Hilfe des DGS verwendet werden müssen. Es ist an dieser Stelle nicht erforderlich, den Vektorbegriff zu vertiefen.
6. Die Schülerinnen und Schüler können dieses Konstruktionsprinzip nun mit Hilfe von Geogebra selbst realisieren. Es ist von den Vorerfahrungen mit diesem System abhängig, wie umfangreich die Anleitungen dafür sein müssen. Angeboten werden zwei alternative Versionen:
   * sehr ausführlich bei geringen Vorerfahrungen „<Anleitung_Kachelerstellung_linear.docx>“ (AB2a) und eventuell anschließend „<Anleitung_Parketterstellung_linear.docx>“ (AB2b),
   * kompakter „<Escherparkette_linear_mit_Geogebra.docx>“ (AB3).

Zur Kontrolle kann jederzeit die Datei „<Kachel_linear.ggb>“ genutzt werden.

1. Sehr viel anspruchsvoller ist es, bestehende Parkette zu analysieren und nachzubilden. Die Vorgehensweise dazu wird im Arbeitsblatt 4 „[Escherperkette\_selbst.docx](Escherparkette_selbst.docx)“ am Parkett symm106 vorgeführt, von dem hier ein Ausschnitt dargestellt ist. Dieser Ausschnitt ist aus Urheberrechtsgründen nicht aus dem Original entnommen sondern entstammt einer selbst erstellen Abbildung, die nach der Vorlage des Originals mit Geogebra erstellt wurde.

Zum Einfügen eines Bildes gibt es in GeoGebra im Menüpunkt „Bearbeiten“ den Unterpunkt „Bild einfügen von“. Danach können die Schülerinnen und Schüler versuchen, die Punkte des Parketts geeignet zu ziehen. Dies wird im [Arbeitsblatt AB4](Escherparkette_selbst.docx) angeleitet. Es wird auch auf eine Vorlage mit eingefügter Bilddatei verwiesen.



Die erste Herausforderung besteht darin, eine Kachel zu identifizieren. Es geht darum, das Bild im Verhältnis zu den Kacheln auf die richtige Größe und in die richtige Position zu bringen. Das Arbeitsblatt 4 zeigt mögliche Fallen auf (Aufgabe 2). Die Schülerinnen und Schüler haben zunächst vielleicht auch die Idee, dass eine Kachel genau eine Taube umschließt. Es ist schnell zu erkennen, dass diese Wahl der Kachel nicht zum Ziel führt, denn die hier markierte Kachel umschließt einige Teile der weißen Tauben doppelt, zum Beispiel das Auge (vgl. auch mit dem 1. Fallenbild). Der Ausschnitt darf natürlich auch nicht zu klein gewählt werden (2. Fallenbild).



Hat man schließlich die richtige Ausschnittsgröße gefunden (man kann sich beispielsweise an den Augen, Schnäbeln oder anderen markanten Punkten orientieren), muss noch die Positionierung des Ausschnitts stimmen (Fallenbild 3). Hier muss beachtet werden, dass die Eckpunkte des Kachelmusters, an denen also vier Kacheln zusammenstoßen, mit den Punkten, an denen vier Vögel zusammentreffen, übereinstimmen. Versucht man, Fallenbild 3 durch Ziehen der Punkte fortzusetzen, stellt man fest, dass man Überschneidungsbereiche erhält, die nicht gewünscht sind.

Dies werden die Schülerinnen und Schüler beim Experimentieren erkennen.

Unter dem Namen „<Voegel_Escherartig.jpg>“ steht ein größerer Ausschnitt des Vogelparketts zur Verfügung. Das Bild kann in eigene Geogebra-Dateien eingefügt werden.  
Bereits in die Mustervorlage eingefügt ist sie unter „<Mustervorlage_voegel.ggb>“. Im Unterschied zu „<Mustervorlage_linear.ggb>“ lassen sich die Ziehpunkte nur auf waagerechten bzw. senkrechten Geraden verschieben. Das erleichtert den Schülern das Nachbilden der Kacheln gegenüber freiziehbaren Punkten, die zwar ein genaueres Arbeiten ermöglichen, aber in der Handhabung schwieriger sind.

Sollte doch ein freies Ziehen gewünscht werden, steht dafür die Datei „<Vogelparkett_Vorlage.ggb>“ zur Verfügung.

In der Datei „<Vogelparkett_fertig.ggb>“ sind die Ziehpunkte des Parketts so gezogen, dass das Escher-Parkett nachgebildet wird.

Mögliche Erweiterungen für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler

Interessant ist auch die Erstellung gegenläufiger Parkette. Es bietet sich an, die Schülerinnen und Schüler zunächst gegenläufige Parkette mit Hilfe der Datei „<Mustervorlage_gegenlaeufig.ggb>“ erstellen zu lassen. Eventuell können sie daraus schon die Eigenschaften einer Einzelkachel ableiten. Sonst steht die Datei „<Kachel_gegenlaeufig.ggb>“ zur Verfügung, in der nur eine Einzelkachel betrachtet wird.

Für die Schülerinnen und Schüler kann das Arbeitsblatt „<Anleitung_Kachelerstellung_gegenlaeufig.docx>“ verwendet werden. Zusätzlich steht ein Hilfeblatt in dem Dokument „<Anleitung_Kachelerstellung_gegenlaeufig_Hilfe.docx>“ zur Verfügung.

Die Schülerinnen und Schüler müssen hier erkennen, dass die Linie, die die Kachel senkrecht in zwei Hälften teilt, eine wichtige Rolle spielt. Der Ziehpunkt, der genau auf dieser Linie liegt, kann nicht zur Seite gezogen werden, er bleibt auf dieser Linie. Verzieht man einen anderen Punkt des oberen Kachelrandes, so bewegt sich auf der unteren Kante ein Punkt mit, der gegenüber dem einfachen linearen Parkett an der Mittellinie gespiegelt ist.

Schülerinnen und Schüler können schließlich versuchen, eine solche Kachel selbständig in GeoGebra zu erstellen. Dazu muss ein Punkt des oberen Kachelrandes zunächst an der Mittellinie gespiegelt werden. Es ergibt sich ein Hilfspunkt, auf den die senkrechte Verschiebung angewendet wird. Der Hilfspunkt wird anschließend wieder unsichtbar gemacht.

Eine zusätzliche Erweiterung besteht in der Untersuchung gegenläufiger Parkette, bei denen aber jede zweite Zeile um eine halbe Figur versetzt ist. Wenn Schülerinnen und Schüler auch solche Parkette analysieren oder sogar selber erstellen möchten, können sie dazu die Dateien „[Kachel\_gegenlaeufig\_versetzt.ggb](Kachel_gegenläufig_versetzt.ggb)“ und „<Mustervorlage_gegenlaeufig_versetzt.ggb>“ verwenden. Es ist auch durchaus, sinnvoll nur die Mustervorlage für den Ausstieg zur Verfügung zu stellen, so dass die Schülerinnen und Schüler lediglich in der Anwendung solche Parkette erstellen.