**Vorbemerkung zum Modul**

Die beiden folgenden Aufgaben liefern einen guten Einstieg zum Üben des Beobachtens. Die zu beobachtenden Eigenschaften sind in der Aufgabe 470425 ganz offensichtlich und eindeutig. In der Aufgabe 470435 hingegen muss man ggf. experimentieren, um Beobachtungen zu finden, die zu interessanten Ergebnissen führen. Begründungen für die in den Beobachtungen formulierten Vermutungen ergeben sich durch Ausprobieren. Mit allen hier vorgestellten Anregungen kann dieses Modul in ca. einer Doppelstunde (90 Minuten) behandelt werden.

Olympiadeaufgabe 470425:

**Aufgabe: Zauberei mit EINS**

An der Tafel stehen seltsame Gleichungen:

1 · 1 = 1

11 · 11 = 121

111 · 111 = 12321

1. Nenne zwei Regelmäßigkeiten bei diesen Gleichungen. Wie müsste die nächst folgende Gleichung mit diesen Seltsamkeiten heißen?
2. Finde mit diesen Bedingungen die Gleichung heraus, bei der auf der rechten Seite eine elfstellige Zahl steht.

**Lösungshinweis:**

1. Eine Regelmäßigkeit der Gleichungen ist die Struktur der Faktoren: Sie bestehen immer aus so vielen Einsen, wie die dahin aufgeschriebene Anzahl von Gleichungen angibt. Auch das Ergebnis weist eine Regelmäßigkeit auf: Die Zahl besteht aus aufeinanderfolgend immer um Eins größer und ab der Mitte um Eins kleiner werdenden Ziffern. Die höchste Ziffer gibt die Stellenzahl der Faktoren auf der linken Seite an. Die nächst folgende Gleichung lautet demnach 1111·1111=1234321. Diese Gleichung stimmt.
2. Wenn die Beobachtungen aus Teil a) weiterführend sind, dann muss an dieser Stelle eine Aufgabe mit dem richtigen Ergebnis allein aus der in a) gefundenen Beschreibung konstruierbar sein. Dies muss natürlich durch anschließende Rechnung überprüft werden. Die hier formulierten Beobachtungen führen zu dem Ergebnis 12345654321. Daraus ergibt sich nach der genannten Beobachtung die Rechnung 11111·11111, die tatsächlich zu dem genannten Ergebnis führt.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Diese Aufgabe ist wegen der verblüffenden und sehr offensichtlichen Beobachtungen für einen Einstieg in das Thema gut geeignet. In der Besprechung kann man thematisieren, wie sich unterschiedliche Beobachtungen bewerten lassen, indem Verallgemeinerungen an weiteren Beispielen überprüft werden. Die in der Aufgabe formulierten Anregungen können Schülerinnen und Schüler motivieren, eigene weiterführende Vermutungen zu formulieren (Grenzen der Regelmäßigkeit, weitere Regelmäßigkeiten, die sich für große Faktoren ergeben). Für das Experimentieren mit größeren Zahlen bietet sich der Einsatz von Rechnern an.

**Mögliche Erweiterungen der Aufgabe:**

Leistungsfähige Schülerinnen und Schüler können versuchen, eine Begründung für die Beobachtung zu finden. Schreibt man den Algorithmus der schriftlichen Multiplikation auf, ist schnell zu erkennen, wie die einzelnen Ziffern des Produktes entstehen.

Olympiadeaufgabe 470435:

**Aufgabe: Zauberei mit ACHT**

An der Tafel stehen seltsame Aufgaben:

9 · 9 + 7 = 88

98 · 9 + 6 = 888

1. Nenne drei Regelmäßigkeiten. Wie müsste die nächst folgende Aufgabe lauten?
2. Finde mit diesen Bedingungen die Aufgabe mit dem Ergebnis 888 888 888.

**Lösungshinweis:**

1. Eine offensichtliche Regelmäßigkeit zeigt das Ergebnis, das immer aus Achten besteht. Die Zahl der Achten erhöht sich mit jeder Gleichung um Eins. Der zweite Summand scheint sich mit jeder Gleichung um Eins zu erniedrigen. Der zweite Faktor im Produkt scheint immer 9 zu sein. Schwieriger ist es, eine Beobachtung zur Regelmäßigkeit des ersten Faktors im Produkt zu formulieren. Er hat offenbar immer eine Stelle weniger als das Ergebnis. Es sind darüber hinaus aber unterschiedliche Regelmäßigkeiten denkbar: i) Die letzte Ziffer ist 8 , alle anderen Ziffern sind 9 oder ii) die erste Ziffer ist 9, alle anderen Ziffern sind 8 oder iii) die Ziffern werden mit jeder Stelle um Eins niedriger, beginnend mit 9. Es sind sicherlich weitere Vermutungen denkbar. Um eine geeignete Beobachtung herauszufinden, muss nun eine Rechnung durchgeführt werden. In der folgenden Aufgabe werden also unterschiedliche Faktoren ausprobiert. Als richtig erweist sich 987·9+5=8888 und damit die Beobachtung iii).
2. Aus den in a) formulierten Beobachtungen ergibt sich die Gleichung 98765432·9+0=888888888. Diese Gleichung stimmt.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Die Aufgabe bietet erheblich mehr Diskussionsanlass, als die Einstiegsaufgabe. Schon für den ersten Aufgabenteil sind die Schülerinnen und Schüler zum Experimentieren aufgefordert, um ihre unterschiedlichen Beobachtungen zu überprüfen. Der Aufgabenteil b) ist zugleich ein Hinweis auf die Grenzen der Regelmäßigkeit: Eine konsequente Weiterführung der hier formulierten Beobachtungen ergibt zunächst die Gleichung 987654321·9-1=8 888 888 888, die sogar stimmt. Auch die Gleichung 9876543210·9-2=88 888 888 888 stimmt. Die dann folgende Gleichung führte bei konsequenter Weiterführung zu negativen Ziffern und kann daher nicht sinnvoll formuliert werden. Die hier gefunden Lösungen machen Schülerinnen und Schülern erfahrbar, wie eine sorgfältige Formulierung von Beobachtungen zu erfolgreichen erstaunlichen Vermutungen führen kann.