In diesem Modul sind fünf Olympiadeaufgaben zusammengefasst, in denen aus vorgegeben Zahlen mit Rechenoperationen Ergebnisse bestimmt werden sollen.

Die erste Aufgabe ist ein „warm up“ und für alle Schülerinnen und Schüler geeignet.

Die folgenden drei Aufgaben sind sich sehr ähnlich und können auch alternativ verwendet werden. Auch diese Aufgaben können von allen Schülerinnen und Schülern gelöst werden. Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler werden schneller sein und können dann durch weiterführende Aufgaben motiviert werden, „am Ball zu bleiben“.

Die letzte Aufgabe ist für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler die größte Herausforderung. Denn hier geht es darum eine Begründung für Ergebnisse, die zunächst alle entdecken können, zu finden.

# **Zeitlicher Umfang:**

Für dieses Modul sollten zwei Doppelstunden veranschlagt werden. Dabei kann in der ersten Doppelstunde nach dem „warm up“ aus der zweiten bis vierten Aufgabe eine Auswahl getroffen werden. Für die letzte Aufgabe sollte eine Doppelstunde eingeplant.

# Olympiadeaufgabe 470423

**Aufgabe:**

Paul wartet auf den Schulbus und vertreibt sich die Zeit mit einem Spiel.

Er setzt die Ziffern 1 bis 9 so aneinander, dass ein- und zweistellige Zahlen entstehen, die durch Addition immer das Ergebnis 99 ergeben.

Dabei hält er die Reihenfolge der Ziffern immer ein und verwendet keine Ziffer mehrfach.

Setze die Pluszeichen so zwischen die Ziffern 9 8 7 6 5 4 3 2 1, dass man als Summe 99 erhält.

**Lösungsvorschlag:**

Es gibt zwei Lösungen, die die Schülerinnen und Schüler durch systematisches Probieren herausfinden können.

98 + … : die Zahl wird zu groß.

9 + 87 + … : die Zahl ist jetzt schon zu groß.

9 + 8 + 76 + 5 + 4 + …: die Zahl ist jetzt schon zu groß.

9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 +1 = 99

9 + 8 + 7 + 6 + 54 + 3 + 2 + 1 die Zahl ist zu klein

9 + 8 + 7 + 6 + 54 + 32 +1 die Zahl ist zu groß

9 + 8 + 7 + 6 + 54 + 3 + 21 die Zahl ist zu groß

9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99

Weitere Möglichkeiten gibt es nicht.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Diese Aufgabe soll als „Warm up“ für dieses Modul dienen. Die Schülerinnen und Schüler müssen lediglich mit einem Rechenzeichen Ziffern in einer vorgegebenen Reihenfolge verknüpfen. Dies ist allen Schülerinnen und Schülern möglich. Gute Kopfrechner sind sicher schnell mit der Aufgabe fertig.

Olympiadeaufgaben 420514

**Aufgabe:**

1. Nimm die Ziffer 5 jeweils 4-mal und bilde Aufgaben, die als Ergebnis die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 und 10 haben. Beachte dabei die Rangfolge der Rechenoperationen und setze Klammern, wenn es erforderlich ist.. Du darfst auch aus zwei Ziffern 5 z. B. die 55 bilden und benutzen.  
   Hier ein Beispiel für das Ergebnis 11: 5 + 5 + 5 : 5 = 11
2. Gib das Ergebnis 8 mit möglichst wenigen Ziffern 5 an. Wie viele sind mindestens erforderlich?

**Lösungsvorschlag:**

1. Zu den Ergebnissen gibt es jeweils mehrere Lösungen. Hier ist beispielhaft eine angegeben

|  |  |
| --- | --- |
| (5 + 5) : (5 + 5) = **1** | 55 : 5 - 5 = **6** |
| 5 : 5 + 5 : 5 = **2** | (5 + 5) : 5 + 5 = **7** |
| (5 + 5 + 5) : 5 = **3** |  |
| (5 ∙ 5 – 5) : 5 = **4** | 5 + 5 – 5 : 5 = **9** |
| (5 – 5 ) ∙ 5 + 5 = **5** | (55 – 5) : 5 = **10** |

1. Um die **8** als Ergebnis zu erhalten, sind fünf Ziffern 5 erforderlich:  
   (5 + 5 + 5) : 5 + 5 = **8**

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Die Prioritäten- und Klammerregeln sind zwar in der Grundschule bearbeitet worden, aber nicht mehr allen Schülerinnen und Schülern geläufig. So ist regelmäßig zu erleben, dass das in der Aufgabenstellung mitgeteilte Musterergebnis **11** spontan von einzelnen kritisiert und durch **3** ersetzt wird.

Es bietet sich an, die Aufgabe zunächst in Einzelarbeit bearbeiten zu lassen, da wirklich jeder Lösungsvorschläge zu wenigstens einigen Ergebnissen findet. Auch wenn bei der Aufgabenstellung bereits über das Musterergebnis diskutiert wurde, ist mit einer großen Zahl von falschen Lösungsvorschlägen zu rechnen. Eine Korrektur durch den Lehrer ist jedoch in der Regel nicht erforderlich, da die Mitschüler durch einfaches Nachrechnen den Vorschlag prüfen können und in jeder Klasse einige Schülerinnen und Schüler die Rechenregeln beherrschen. So führen insbesondere falsche Lösungsvorschläge zu lebhaften Diskussionen.

Reizvoll an der Aufgabe ist auch, dass es zu den Ergebnissen mehrer Lösungen gibt. Manchmal führt das bei den Schülerinnen und Schülern zu einem regelrechten Wettbewerb, wer die meisten Lösungen findet. Ebenso kann sich aus dem Aufgabenteil b) eine Wettbewerbssituation ergeben, da die erforderliche Minimalzahl von Ziffern in der Aufgabenstellung nicht angegeben ist.

Manche Schülerinnen und Schüler sind aus der Grundschule nur Aufgaben gewöhnt, die eindeutig zu lösen sind. Sie sind dann bei dieser Aufgabe über die Mehrzahl von Lösungen überrascht. Das kann Anlass geben, in einer nachfolgenden Stunde über mehrdeutige Aufgabenstellungen zu reden.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

* Untersuche, welche Zahlen, die größer als 10 sind, sich auch durch 4 Ziffern 5 darstellen lassen.
* Untersuche, ob sich auch mit anderen Ziffern alle Ergebnisse von 1 bis 10 darstellen lassen.

# Olympiadeaufgabe 350512

**Aufgabe:**

Klaus stellt Rechenaufgaben zusammen. Er verwendet keine anderen Zeichen als die in folgenden. Er kann aber Zeichen mehrfach verwenden, wenn er will

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | + | - | ∙ | : | ( | ) |  |  |  |  |

Wenn er zum Beispiel mit genau zehn Ziffern 3 das Ergebnis 100 erhalten will, so kann er die Rechenaufgabe 33 + 33 + 333 : (3∙3) – 3 bilden.

Welche Rechenaufgabe kann er bilden, um das Ergebnis 100

1. mit genau fünf Ziffern 1,
2. mit genau fünf Ziffern 3,
3. mit genau fünf Ziffern 5,
4. mit den neun Ziffern von 1 bis 9, von denen jede genau einmal verwendet wird,

zu erhalten?

**Lösungsvorschlag:**

Naheliegende Lösungen sind:

a) 111 – 11 b) 33 ∙ 3 + 3 : 3

Lösungsbeispiele für c) und d)

c) (5 + 5 + 5 + 5) ∙ 5 oder d) 5 ∙ 5 ∙ 5 – 5 ∙ 5

d) (1 + 2 + 8 + 9) ∙ 5 ∙ (3+ 7) : (4 +6); 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 ∙ 9

(8 + 9 + 1 – 2) ∙ 5 + 3 + 4 + 6 + 7 ; (1 + 2 – 3 + 4 + 6 – 7 + 8 + 9) ∙ 5

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Diese Aufgabe bietet sich als Anschlussaufgabe an die vorhergehende an. Wieder ist eine Anzahl von (unterschiedlichen) Ziffern vorgegeben, diesmal soll aber eine dreistellige Zahl ermittelt werden. Mit Aufgabe d) ist noch einmal eine Anknüpfung an die Einstiegsaufgabe möglich. Hier wird deutlich, dass auch die Reihenfolge der Ziffern eine Rolle spielen kann.

Die Vielzahl der Lösungsmöglichkeiten kann die Schülerinnen und Schüler motivieren möglichst viele verschiedene Lösungen zu finden. Hier können auch Prämien vergeben können, so dass leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler eine besondere Herausforderung verspüren.

Olympiadeaufgaben 470612

**Aufgabe:**

Im Jahr 2007 hat sich ein Mathematiker überlegt, wie er die Jahreszahl aus nur gleichen Ziffern darstellen kann.

Es dürfen dafür die vier Rechenzeichen +, - , ∙, : verwendet werden. Auch Klammern dürfen gesetzt werden und es gilt „Punktrechnung vor Strichrechnung“.

Ein Beispiel für die Ziffer 3 lautet 3 + 3 + … + 3 = 2007,   
ein anderes Beispiel lautet 333 ∙ 3 ∙ (3 – 3 : 3) + 3 ∙ 3 = 2007.

Stelle die Jahreszahl 2007 mit folgenden Ziffern dar. Finde jeweils zwei verschiedene Möglichkeiten.

1. 2 b) 5 c) 6 d) 9

**Lösungsvorschlag:**

1. 2007 = 2 + … + 2 – 2:2 = 2222 – 222 + 2 +2 + 2 + 2:2
2. 2007 = 555 + 555 + 5 ∙ 55 + 55 +5 + 5 + 5 : 5 + 5 : 5

= 5 ∙ 5 ∙ 5 ∙ 5 + 555 + 555 + 5 ∙ 55 + 5 : 5 - 5

1. 2007 = ((6 + 6 + 6) : 6) ∙ 666 + 6 + (6 + 6 + 6) : 6

= 6 ∙ 6 ∙ 6 ∙6 + 666 + 6 ∙ 6 + 6 + (6 + 6 + 6): 6

1. 2007 = 999 + 999 + 9 = (999 : 9 + 999:9) ∙ 9 + 9

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Diese Aufgabe erweitert den Zahlbereich, in dem mit Ziffern experimentiert wird. Als Ergänzung bietet sich natürlich an diese Aufgabe auf das aktuelle Jahr zu übertragen.

# Olympiadeaufgabe 480611

**Aufgabe:**

Ilka spielt mit Zahlen. Sie wählt sich eine Zahl, multipliziert sie mit 3, addiert zum Ergebnis 3, teilt das neue Ergebnis durch 3 und zieht schließlich von diesem Resultat 3 ab. Dann möchte sie von vorne anfangen.

„Eigentlich“, so überlegt sie, „müsste ich nach diesen vier Rechnungen wieder bei der Anfangszahl ankommen. Aber wenn ich mit 5 angefangen habe, dann lande ich bei 3 und wenn ich bei 7 anfange, lande ich bei … ähhh…“

1. Wo landet Ilka, wenn sie bei 7 anfängt?
2. Was passiert, wenn Ilka mit größeren Zahlen anfängt – vielleicht schafft sie dann ihr ursprüngliches Ziel?
3. „Vielleicht sollte ich anders herum arbeiten“, denkt Ilka laut. „Erst mal 3, dann minus 3, dann geteilt durch 3, dann plus 3.“ Was geschieht jetzt?
4. Welche allgemeinen Aussagen kannst du machen, wenn du die vier Rechenoperationen  
   +, ∙, -, : hintereinander ausführst, dass du abwechselnd Punktrechnung und Strichrechnung verwendest.

# **Lösungsvorschlag**

a) 7 ∙ 3 = 21, 21 + 3 = 24, 24 : 3 = 8, 8 – 3 = 5

b)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Zahl | ∙ 3 | + 3 | : 3 | - 3 |
| 8 | 24 | 27 | 9 | 6 |
| 9 | 27 | 30 | 10 | 7 |
|  |  |  |  |  |
| 20 | 60 | 63 | 21 | 18 |
| 50 | 150 | 153 | 51 | 28 |
| 100 | 300 | 303 | 101 | 98 |

Beobachtung: Ilka wird ihr Ziel nicht erreichen. Sie erhält immer eine Zahl, die um zwei kleiner ist als die Ursprungszahl.

Begründung: (3 ∙ Zahl + 3) : 3 – 3 = 3 ∙ (Zahl + 1) : 3 – 3 = Zahl + 1 – 3 = Zahl – 2

c)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Zahl | ∙ 3 | - 3 | : 3 | +3 |
| 7 | 21 | 18 | 6 | 9 |
| 8 | 24 | 21 | 7 | 10 |
|  |  |  |  |  |
| Z | 3 ∙ Z | 3 ∙ Z – 3 | Z – 1 | Z + 2 |

d)

Hier kann es viele Beobachtungen geben. Etwas systematisiert, lass sie sich so zusammenfassen:

(:, +, ⋅, –) : Z + 6

(:, –, ⋅, +) : Z – 6

(+, ⋅, –, :) : Z + 2

(+,:, –, ⋅) : Z – 6

(– , ⋅, +, :) : Z – 2

(–, :, +; ⋅) : Z + 6

Dabei ist Z jeweils die gewählte Zahl.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Diese Aufgabe steht am Ende dieses Moduls, weil hier die Bedeutung der Prioritätenregel mit den Schülerinnen und Schüler auf einem für Schülerinnen und Schüler der fünften Klasse hohen Abstraktionsgrad besprochen werden muss. Formal ist für den Lehrenden die Erkenntnis schnell erfassbar. Mit Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe fünf geeignete Formulierungen für die Wirkung der Division bei vorheriger Addition bzw. Subtraktion zu finden, ist die eigentliche Herausforderung dieser Aufgabe.