In diesem Modul sind einige Aufgaben zusammengestellt worden, die die Waage als Thema besitzen.

Nicht immer ist für alle Schülerinnen und Schüler der Klassen 5 und 6 die Funktionsweise einer Balkenwaage allgegenwärtig. Der Einsatz dieser Aufgaben erfordert somit für die Schülerinnen und Schüler sicherlich einmalig etwas Einarbeitungszeit. Es hat sich als besonders günstig erwiesen, zur Anschauung eine Balkenwaage mitzubringen. Ersatzweise kann das Hilfeblatt unter dem Namen „<Knobeln_mit_der_Waage_Hilfe.docx>“ verwendet werden.

Die Aufgabenstellungen verwenden für die Masse im physikalischen Sinne den in der Umgangssprache üblichen Begriff des Gewichts. An dieser Formulierung wird durchgängig festgehalten.

Beim Einsatz dieser Aufgaben sind zwei Aspekte beachtenswert.

Zum Einem bieten diese Aufgaben über das handhabbare Medium der Waage Animation zum unverkrampften Umgang zum Problemlösen. Bestandteile der Mathematik, die sich deutlich vom Rechnen des Schulunterrichts abheben, können sich so selbstverständlich etablieren. Dazu zählen unter anderem das Probieren, Abstrahieren und das Zulassen von Lösungsvielfalten.

Des Weiteren ist die Waage ein gängiges Modell für das Lösen von Gleichungen. Auch ohne Begrifflichkeiten der Äquivalenzumformung zu thematisieren, könne hier schon einige Vorstellungen des Umgangs mit der Gleichheit erarbeitet werden. Dazu zählen das Zusammenfügen von unterschiedlichen Mengen zum Vergleichen und auch das Entwickeln einfacher Lösungsideen (Aufgabe 400514).

Es ist denkbar, diese Aufgaben in anderen Sequenzen als Beispiel wieder aufzugreifen oder als zusätzliche verständnisfördernde Aufgabe hinzuzufügen.

# Olympiadeaufgabe 380522

**Aufgaben:**

In einem Lager stehen 11 Gegenstände.

Man weiß, dass ihre Gewichte 10 kg, 11 kg, ..., 20 kg sind, kennt aber nicht für jeden einzelnen Gegenstand sein Gewicht. Mit Hilfe einer Balkenwaage will man jetzt diese einzelnen Gewichte herausfinden.

Dabei sollen Gewichtsstücke mit bekannten Gewichten verwendet werden.

a) Man hat fünf Gewichtsstücke mit 1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg und 16 kg zur Verfügung. Die Gegenstände sollen auf der Balkenwaage immer links liegen, die Gewichtsstücke immer rechts. Gib für jeden Gegenstand an, wie man ihn auf diese Weise auswiegen kann.

Welches Gewicht muss die Waage links und rechts zusammen höchstens tragen?

b) Kerstin sagt: „Ich kann das Problem auch mit nur vier Stücken lösen, und zwar mit einem Satz aus Stücken von 1 kg, 3 kg, 9 kg und 27 kg. Allerdings möchte ich die Gewichtsstücke auf beide Schalen legen dürfen.“

Zeige, dass Kerstin Recht hat! Gibt es hierbei Fälle, in denen die Waage mehr als 40 kg tragen können muss?

**Lösungsvorschlag:**

a) Es reicht hier, für die elf Gewichte Wägedarstellung anzugeben:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **10** | = |  | 8 |  | + 2 |  |
| **11** | = |  | 8 |  | + 2 | + 1 |
| **12** | = |  | 8 | + 4 |  |  |
| **13** | = |  | 8 | + 4 |  | + 1 |
| **14** | = |  | 8 | + 4 | + 2 |  |
| **15** | = |  | 8 | + 4 | + 2 | + 1 |
| **16** | = | 16 |  |  |  |  |
| **17** | = | 16 |  |  |  | + 1 |
| **18** | = | 16 |  |  | + 2 |  |
| **19** | = | 16 |  |  | + 2 | + 1 |
| **20** | = | 16 |  | + 4 |  |  |

Da auf jeder Waagenseite gleichviel Gewicht aufliegt, muss die Waage im Fall der Wägung des 20 kg – Gegenstandes am meisten tragen, nämlich 40 kg.

b) Auch hier ist eine Darstellung der einzelnen Wägungen ausreichend:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | **10** | = |  | 9 |  | + 1 |
|  |  | 1 + | **11** | = |  | 9 | + 3 |  |
|  |  |  | **12** | = |  | 9 | + 3 |  |
|  |  |  | **13** | = |  | 9 | + 3 | + 1 |
| 9 + | 3 + | 1 + | **14** | = | 27 |  |  |  |
| 9 + | 3 + |  | **15** | = | 27 |  |  |  |
| 9 + | 3 + |  | **16** | = | 27 |  |  | + 1 |
| 9 + |  | 1 + | **17** | = | 27 |  |  |  |
| 9 + |  |  | **18** | = | 27 |  |  |  |
| 9 + |  |  | **19** | = | 27 |  |  | + 1 |
| 9 + |  | 1 + | **20** | = | 27 |  | + 3 |  |

Bei der 14 kg Wägung wird zum ersten Mal das 27 kg Gewichtsstück eingesetzt. Ab dieser Wägung muss die Waage mehr als 40 kg tragen können!

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Die Aufgabe ermöglicht ein selbständiges "Losarbeiten" für alle Schülerinnen und Schüler. Sicherlich werden viele einige Kombinationen schnell finden. Die Suche nach weiteren Lösungen lässt sich durch Anregung einer systematischen Notation der Lösung und der Suche nach Gesetzmäßigkeiten ermutigen.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Welche Gewichte von Gegenständen lassen sich mit Hilfe der vorhandenen Voraussetzungen maximal bestimmen?

Welches weitere Gewichtsstück muss eingesetzt werden, um möglichst viele weitere Wägungen zu ermöglichen?

Olympiadeaufgabe 400514

**Aufgabe:**

Ein Händler auf einem fernöstlichen Basar hat einen Beutel mit 9 kg Nüssen. Jede Nuss wiegt zwei Gramm.

Ein Kunde möchte 2 kg Nüsse kaufen. Natürlich könnte der Händler die Nüsse auszählen; das ist ihm aber zu mühsam. Also will er die Nussmenge auswiegen. Dazu verwendet er eine Balkenwaage.

Allerdings hat er an Gewichtsstücken nur noch ein 200 g-Stück und ein 50 g-Stück.

a) Zeige, wie er diese gewünschte Menge mit vier Wägungen abwiegen kann!

b) Zeige, wie er diese gewünschte Menge sogar mit nur drei Wägungen abwiegen kann!

**Lösungsvorschlag:**

Lösungsbeispiele zu a):

Ein systematischer Ansatz könnte die Idee sein, dass man durch Abwägen und Zusammenfügen bekannter Gewichte größere Gewichte herstellt.

z.B.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | linke Waagschale | rechte Waagschale |
| 1. Wägung | 200 g + 50 g | 250 g Nüsse |
| 2. Wägung | 200 g + 50 g + 250 g Nüsse | 500 g Nüsse |
| 3. Wägung | 200 g + 50 g + 750 g Nüsse | 1 000 g Nüsse |
| 4. Wägung | 200 g + 50 g + 750 g Nüsse | 1 000 g Nüsse |

Die abgewogenen Mengen der 3. und 4. Wägung ergeben zusammen das gesuchte Gewicht.

Mögliche Variationen können unter anderen sein:

- im vierten Schritt mit 200 g + 50 g + 1750 g Nüsse 2 kg abwiegen

- im dritten Schritt erneut 500 g Nüsse erzeugen

- im zweiten Schritt erneut 250 g Nüsse erzeugen

- Lösungen, über Teilung der Nussmengen (die der Lösung der Aufgabe b) schon sehr nahe kommen)

Lösungsbeispiele zu b):

Die Grundidee zum Lösen dieser Teilaufgabe ist durch Halbieren der Nussmengen das Gewicht der Nüsse schnell zu reduzieren.

Variante 1:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | linke Waagschale | rechte Waagschale |
| 1. Wägung | 4 500 g Nüsse | 4 500 g Nüsse |
| 2. Wägung | 2 250 g Nüsse | 2 250 g Nüsse |
| 3. Wägung | 250 g Nüsse (von 2 250 g) | 200 g + 50 g |

Variante 2:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | linke Waagschale | rechte Waagschale |
| 1. Wägung | 4 600 g Nüsse | 4 400 g Nüsse + 200 g |
| 2. Wägung | 2 200 g Nüsse | 2 200 g Nüsse |
| 3. Wägung | 200 g Nüsse (von 2 200 g) | 200 g Nüsse |

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Die Aufgabe zeichnet sich durch einige Variation der Lösungen aus. Diese Vielfalt kann man nutzen, um auch verschiedene Lösungen zu präsentieren. Allgemein zeigt sich der weiterführende Aspekt der Teilaufgabe b) in der zusätzlichen Idee eine Nussmenge mit Hilfe der Balkenwaage zu halbieren.

Bei der Präsentation der Lösungen kann es beim Umgang mit dezimalen kg-Angaben zu Verständnisproblemen kommen. In solchen Fällen ist es sinnvoll, die gegebenen Mengenangaben in g umzurechnen.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Zur Teilaufgabe b) finden viele Schülerinnen und Schüler vermutlich die Lösungsvariante 1. Möchte man auch die Variante 2 als Lösung erhalten, bietet sich folgende Fragestellung an:

"Kann man auch 2 kg abwiegen, wenn man nur das 200 g-Stück zur Verfügung steht?

Olympiadeaufgabe 500523

**Aufgabe:**

Die Waagen, siehe unten stehende Abbildung, seien jeweils im Gleichgewicht, das heißt:

(1) Drei Pyramiden sind so schwer wie vier Würfel.

(2) Zwei Pyramiden sind so schwer wie ein Zylinder und zwei Würfel.

Wie viele Zylinder sind so schwer wie eine Pyramide? Erläutere, wie du zu deiner Lösung gekommen bist.



**Lösungsvorschlag:**

Würde man auf der zweiten Waage alle Gewichte verdoppeln, so liegen auf der linken Waagschale 4 Würfel und 2 Zylinder, auf der rechten Waagschale 4 Pyramiden. Vergleicht man diese Konstellation mit der Situation auf der ersten Waage (4 Würfel wiegen so viel wie drei Pyramiden), so ist zu erkennen, dass auf der einen Seite eine Pyramide mehr, auf der anderen zwei Zylinder mehr sind. Also sind zwei Zylinder so schwer wie 3 Pyramiden.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Im Nachhinein (und beim Verstehen) ist die Lösung völlig einleuchtend. Zieht man aber in Betracht, dass die Schülerinnen und Schüler kaum Umgang mit dem Benutzen der Gleichung als Relation haben, sondern oft nur Gleichungen als Angabe zur Ergebnisausgabe kennen, ist es nicht selbstverständlich, das Schülerinnen und Schüler die Lösung finden.

Bei der Präsentation der Lösung sollte man in Betracht ziehen, dass das Verstehen der Lösung sehr an die Art der Erklärung gekoppelt ist. Sicherlich ist es von Vorteil die Lösungsideen von verschiedenen Schülerinnen und Schülern erklären zu lassen und sie durchaus zu ermutigen, sich mit einer teilweise verstandenen Lösung nicht zufrieden zu geben.

Auch die Verwendung von geeigneten Gegenständen (z.B. Bauklötze) kann das Verstehen der Lösung fördern.

Unter Umständen kann man auch einige Sequenzen benutzen, um den Vorteil von mathematischen Schreibweisen herauszuarbeiten (z.B. die Verwendung von Variablen als Abkürzung und vereinfachte Schreibweise des Zusammenhangs). Dabei sollte aber unbedingt darauf geachtet werden, dass eine ausführliche rein mathematische Darstellung der Lösung in der Klassenstufe 5 eher verwirrt.