# Origami

Bevor die vorliegende Einheit in einer AG-Sitzung eingesetzt werden kann, ist es unbedingt erforderlich, dass sich die AG-Leitung mit den verschiedenen Falttechniken des Origami beschäftigt hat. Viele Fragen der Schülerinnen und Schüler können nur aus der Vertrautheit mit der Thematik heraus beantwortet werden.

Neben verschiedenen Büchern bietet auch das Internet eine Fülle von Faltanleitungen. Eine empfehlenswerte Seite ist <http://www.besserbasteln.de/origami_falten.html> . Auf dieser Seite werden einige komplexe Faltaufgaben auch mit Videoanleitungen begleitet.

Die verschiedenen Faltanleitungen bieten sich zudem an, um den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit zu geben, verschiedene Origami-Figuren zu falten, an denen im weiteren Verlauf der Einheit mathematische Fragen untersucht werden können.

# Origami und Mathematik

(Satz von Maekawa, Satz von Kawasaki)

Die mathematische Erforschung von Origami, einer traditionellen japanischen Papierfaltkunst, geht mindestens auf das Ende des 19. Jahrhunderts zurück.

Als Ausgangspunkt für eine eingehendere Beschäftigung mit dem Thema wird auf (Wikipedia, 2015) verwiesen. Seit einigen Jahren gibt es zusätzlich Literatur, die die Mathematik hinter Origami auch für den Unterricht erschließbar macht (z.B. (Schmitt-Hartmann, et al., 2013)).

Die vorliegende Einheit hat zum Ziel, Schülerinnen und Schüler an mehrere Resultate zu plättbaren (flach zusammenfaltbaren) Origami heranzuführen. Diese können also nach dem Zusammenfalten flach auf den Tisch gedrückt werden, ohne dass dabei neue Falten entstehen.

Die betreffenden Sätze sind:

* *Faltmuster sind 2-färbbar*:

Betrachtet man die „Landkarte“, die sich durch das Faltmuster einer plättbaren Origami-Figur ergibt, so kommt man beim Einfärben der Gebiete zwischen den Falten mit unterschiedlichen Farben, so dass keine zwei Gebiete mit einer gemeinsamen Kante die gleiche Farbe erhalten, mit höchstens zwei Farben aus. Faltmuster zu plättbaren Origami sind also im Hinblick auf den berühmten Vier-Farben-Satz sehr spezielle Landkarten. Hat man ein solches Faltmuster mit zwei Farben eingefärbt, ergibt sich für die zusammengefaltete Figur der interessante optische Effekt, dass sie von einer Seite her betrachtet dem Betrachter jeweils ausschließlich Flächenstücke einer Farbe darbietet.

* *Satz von Kawasaki*:

Bei einem 2-gefärbten plättbaren Origami beträgt an einem inneren Punkt die Winkelsumme aller an dem Punkt anliegenden Winkel der gleichen Farbe stets 180°.

* *Satz von Maekawa*:

die Anzahl der Berg- und Talfalten, die an einem Eckpunkt einer plättbaren Origami-Figur zusammenstoßen, unterscheidet sich immer um den Wert 1.

* *Fold-and-Cut-Theorem*:

Jede ebene Form, die von geradlinigen Streckenabschnitten begrenzt wird, lässt sich durch geschicktes Falten eines Bogens Papier und eines einzigen geraden Schnittes entlang einer Faltkante erzeugen. Die Form ist dabei keineswegs nur auf Polygone beschränkt. Sie darf auch nicht-konvex sein, Löcher enthalten und mehrere Zusammenhangskomponenten enthalten.

Die aufgeführten Theoreme sind unserem Wissen nach noch nicht in der deutschsprachigen didaktischen Literatur vertreten.

Zu Schüleraufgabe 1:

Für die Bearbeitung der Aufgabe benötigen die Schülerinnen und Schüler ein weißes Blatt Papier. Karierte Blätter sind nicht gut geeignet, wenn später Linien gezählt werden sollen. Zusätzlich steht als Hilfe eine [Malvorlage](MalvorlageFlieger.pdf) zur Verfügung. Motivierender ist es jedoch, wenn die Schülerinnen und Schüler zuvor eigene Papierflieger gebaut haben.

Den Schülerinnen und Schülern sollte bei der Bearbeitung die Besonderheit auffallen, dass Harald und auch sie selbst mit nur einer Farbe (wenn sie die nicht gefärbten Felder weiß lassen) oder eben mit nur zwei echten Farben auskommen. Bei Bedarf kann man einen Exkurs in die Färbeproblematik machen.

Im Schülertext wird der Begriff „plättbar“ nicht explizit eingeführt. Es wird davon ausgegangen, dass die Papierflieger, die die Schüler falten, üblicherweise diese Eigenschaft aufweisen. Hat man mit Hilfe eines Lineals eine Landkarte erstellt, die mehr als zwei Farben benötigt, so kann man leicht feststellen, dass sich durch Falten entlang der Linien keine plättbare Figur erzeugen lässt.

Faltet man das eingefärbte Faltmuster anschließend wieder zum Papierflieger, bzw. zur fertigen Form zusammen, so stellt man fest, dass alle dem Betrachter zugewandten Flächenstücke (auch die, die von anderen verdeckt sind), die gleiche Farbe aufweisen. Dazu muss allerdings auch die Rückseite des Blattes eingefärbt werden, wobei an der Papierkante ein Farbwechsel stattfinden muss (die Rückseite des Blattes wird also invers zur Vorderseite eingefärbt).

Die Sache ist allerdings ein wenig subtil, da man häufig beim Falten einer Figur Hilfsfalten macht, die in der fertigen Figur wieder aufgeklappt und daher flach sind. Ein Beispiel dafür ist die bekannte Origami-Figur eines Kranichs. Wenn die Schülerinnen und Schüler bei der Aufgabe 1 auch eine solche komplexe Origami-Figur erstellen und untersuchen möchten, muss ihnen eine Anleitung zur Verfügung gestellt werden. Eine Anleitung zum Falten eines Kranichs kann man im Internet unter <http://resch-media.de/uploads/media/Anleitung_Kranich_Resch_Media_02.pdf> finden.

Bei dem Kranich-Faltmuster sind diese sogenannten Scheinfalten gepunktet eingezeichnet. Je nachdem, welche Falttechnik man anwendet kann es mehr oder weniger dieser Scheinfalten geben. Beim Färben der Figur und auch bei den späteren Lernabschnitten muss man die Scheinfalten immer aus der Betrachtung herausnehmen.

Zu Schüleraufgabe 2:

Dieses schöne und auf den ersten Blick überraschende Resultat lässt sich leicht mit den Hilfsmitteln, die den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung stehen, nachprüfen. Natürlich müssen auch hier bei komplexen Figuren die Scheinfalten außer Acht gelassen werden.

Die Umkehrung des Satzes von Kawasaki gilt übrigens nur dann, wenn sich alle Falten des Faltmusters in einem gemeinsamen Punkt treffen, was zugegebenermaßen eher selten vorkommt. D.h. Es gibt Faltmuster, die zwar 2-färbbar sind, die sich jedoch nicht zu einer plättbaren Figur zusammenfalten lassen. Dies ist dann unter Umständen nur lokal möglich (siehe auch (Wikipedia, 2015)).

Zu Schüleraufgabe 3:

Es bietet sich an, den Schülerinnen und Schülern an dieser Stelle noch weitere Faltmuster zur Verfügung zu stellen. Zum Beispiel durch die Papierflieger oder durch bereits gefaltete Origami-Figuren.

Der Satz von Maekawa besagt, dass sich die Anzahlen der Berg- und Talfalten an jedem Kreuzungspunkt um genau 2 unterscheiden. An den Blatträndern und Ecken des Blattes gilt diese Regel nicht. Man zählt die Falten wie Strahlen, die von dem Kreuzungspunkt ausgehen. Eine vermeintlich durchgehende Talfalte wird beispielsweise als zwei Talfalten gezählt.

Zu Schüleraufgabe 4:

Die Anleitungen zur Herstellung des gleichseitigen Dreiecks und des Fünfecks sind auf Grundlage der Abbildungen auf S. 16, bzw. 20 aus (Gurkewitz, et al., 1995) entstanden.

Das Fold-and-Cut-Theorem wurde von Erik Demain, Martin Demain und Anna Lubiw in (Demaine, et al., 1999) bewiesen.

# Literaturverzeichnis

**Demaine, Erik, Demaine, Martin und Lubiw, Anna. 1999.** Folding and one straight cut suffice. *Proceedings of the Tenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '99).* 1999.

**Gurkewitz, Rona und Arnstein, Bennett. 1995.** *3-D Geometric Origami - Modular Polyhedra.* s.l. : Dover, 1995. 978-0-486-28863-5.

**Schmitt-Hartmann, R. und Herget, W. 2013.** *MOderner Unterricht - Papierfalten im Mathematikunterricht.* Stuttgart : Klett, 2013. 978-3-127-20062-1.

**Wikipedia. 2015.** Kawasaki's theorem. *en.wikipedia.org.* [Online] 25. 1 2015. [Zitat vom: 2. 6 2015.] http://en.wikipedia.org/wiki/Kawasaki%27s\_theorem.

**—. 2015.** Mathematics of paper folding. *en.wikipedia.org.* [Online] 5 24, 2015. [Cited: 06 02, 2015.] http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics\_of\_paper\_folding.