**Vorbemerkung zum Modul**

In dem Modul werden verschiedenste Fertigkeiten und Lösungsstrategien, die Schüler schon aus früheren Modulen bekannt sind, in einem neuen Kontext miteinander verknüpft. Neben geometrischer Anschauung werden die Schüler dazu angehalten, Zählstrategien und kombinatorische Fertigkeiten anzuwenden.

Schrittweise werden auch die Kenntnisse aus dem Modul Mustererkennung abgerufen, die zu der Erstellung einer Berechnungsformel für die letzte Aufgabe führt.

Bei allen Aufgaben geht es darum, Wege auf vorgegebenen Gitterstrukturen zu betrachten.

Olympiadeaufgabe 510322

In dieser einfachen Einstiegsaufgabe kommt es im Teil b) auf eine gute Systematik an.

**Aufgabe:**

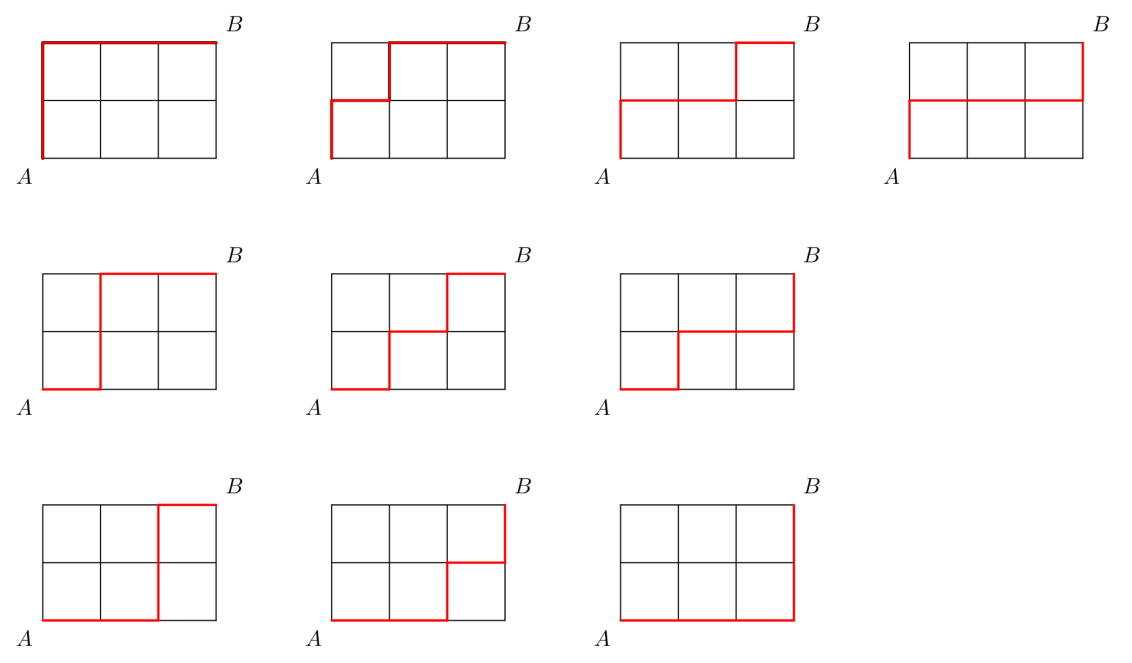
Eine Ameise läuft auf Gitterlinien von *A* nach *B*. Von einem Gitterpunkt zum nächsten ist es immer 1 m.



1. Finde zwei Wege unterschiedlicher Länge, bei denen die Ameise keine Linie doppelt läuft.
2. Der kürzeste Weg der Ameise ist 5 m lang. Wie viele verschiedene Wege dieser Länge gibt es?
3. Wie lang ist der längste Weg, wenn die Ameise keinen Gitterpunkt zweimal besuchen darf?

**Lösungsvorschlag:**

1. Hier sind Wege mit Längen von 5 m bis 11 m möglich.
2. Es gibt zehn verschiedene Wege, die alle 5m lang sind.





1. Der längste Weg ist 11m lang. Eine Möglichkeit für einen solchen Weg ist dargestellt.

**Hinweise zur Aufgabe und zum Unterrichtseinsatz:**

In Aufgabenteil b) werden alle Schülerinnen und Schüler Wege der Länge 5 finden. Die Schwierigkeit liegt darin, zu begründen, dass auch wirklich alle Wege dieser Länge gefunden wurden. Dazu ist es sinnvoll, eine systematische Darstellung sämtlicher Wege zu betrachten, ein Verfahren, welches die Schülerinnen und Schüler schon aus früheren Modulen kennen. Die Systematik kann darin bestehen, die Wege wie in der Musterlösung des MO-Vereines einzeln zu zeichnen.

Alternativ kann man einen Darstellungswechsel vornehmen. Dabei werden die Wege durch das Gitter durch Buchstabenketten der Länge 5, die nur aus den Buchstaben o und r bestehen, betrachtet. Der Buchstabe o, der für eine Bewegung nach oben steht, muss zweimal vorkommen, der Buchstabe r dreimal.

Die Systematik besteht dann in einer alphabetischen Anordnung der Buchstabenfolgen:

oorrr – ororr – orror – orrro

roorr – roror – rorro – rroor – rroro – rrroo

Olympiadeaufgabe 510332

Diese Aufgabe verallgemeinert die Vorgehensweise aus der ersten Aufgabe auf ein räumliches Gebilde, das allerdings nur aus einem Grundelement, in diesem Fall aus einem Würfel, besteht.

**Aufgabe:**



Eine Ameise läuft auf den Kanten eines Würfels von Punkt *A* nach Punkt *G*. Von einem Eckpunkt zum nächsten ist es immer ein Meter.

1. Gib einen möglichst kurzen Weg für die Ameise an.
2. Wie viele verschiedene Wege dieser Länge gibt es? Gib diese an.
3. Wie lang ist der längste Weg, wenn die Ameise keine Ecke zweimal betreten darf? Gibt es mehrere Wege dieser Länge?

**Lösungsvorschlag:**

1. Die Ameise muss mindestens drei Meter weit laufen. Sie muss Länge, Breite und Höhe ablaufen, um von *A* zu *G* zu gelangen.
2. Zur Lösung sind wie in der vorhergehenden Aufgabe Zeichnungen aller möglichen Wege eine Strategie. Es ist jedoch ein Darstellungswechsel möglich, bei dem die Wege durch die durchlaufenen Knoten codiert werden. Dabei ergeben sich sind Wege   
   *A, B, C, G  
   A, B, F, G  
   A, D, C, G  
   A, D, H, G  
   A, E, F, G  
   A, E, H, G*

Die Systematik besteht wiederum in der alphabetischen Anordnung.

1. Der längste Weg ist sieben Meter lang. Dies erhält man, indem die Ameise jeweils zwei der drei Raumrichtungen dreimal durchläuft. Dies kann sie schaffen, ohne einen Punkt zweimal zu betreten. Dann muss sie jedoch auf mit dem Durchlauf der siebten Kante im Punkt G landen. Eine Möglichkeit ist der Weg *A, B, F, E, H, D, C, G*.

**Hinweise zur Aufgabe und zum Unterrichtseinsatz:**

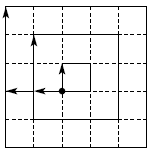
Gerade die letzte Teilaufgabe kann Schülerinnen und Schüler vor größere Probleme stellen, sofern sie mit der Raumvorstellung noch Probleme haben. Eine mögliche Hilfestellung ist das Anfertigen eines Würfels, der mit einer Bastelvorlage (<http://www.kidsweb.de/spiele/wuerfel_basteln/wuerfel_leer_vorlage.pdf>) erstellt werden kann, damit die verschiedenen Wege der Ameise auch direkt erfahrbar werden.

### Mögliche Erweiterungen der Aufgabe:

Für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler kann die Figur, in der die Wege gesucht werden, dadurch aufwändiger gestaltet werden, dass mehrere der Würfel auf- bzw. nebeneinander gestellt werden.

Olympiadeaufgabe 430533

Von dieser Aufgabe an wird die Begrenzung des Feldes, in dem die Wege zu bestimmen sind, aufgegeben. Dadurch können auch allgemeine Formeln zur Bestimmung von Weglängen eine Rolle spielen. In solchen Fällen ist die Strategie der Mustererkennung hilfreich. Wenn es gewünscht wird, bietet sich hier auch der Einsatz einer Tabellenkalkulation an.

**Aufgabe:**

Ein Käfer krabbelt auf einem Gitter aus Quadraten umher. (Die Kästchen des Gitters haben eine Seitenlänge von 1.)

Zunächst krabbelt er um ein Quadrat, dann geht er eine Kästchenreihe weiter und umkrabbelt dann ein neues Quadrat, das überall den Abstand von einer Kästchenreihe zum ersten Quadrat hat. Diesen Vorgang wiederholt er.

(In der Abbildung sieht man den Weg des Käfers bis zum dritten Quadrat. Der Käfer hat bei dem Punkt begonnen.)

Wie viele Kästchenlängen hat er zurückgelegt, wenn er das zehnte Quadrat fertig umkrabbelt hat?

**Lösungsvorschlag:**

Pro Runde wird jede Seite um 2 Kästchenlängen größer, d. h. in jeder Runde kommen (4 ∙ 2 m =) 8 m hinzu. Durch Abzählen kann man dies schnell ermitteln. In der ersten Runde sind 5 m gelaufen. Es ergibt sich dann die folgende Tabelle, in der *u* den neu hinzukommenden und *w* den Gesamtweg bezeichnet:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *n* | *u*(*n*) | *w*(*n*) |
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 13 | 5 + 13 = 18 |
| 3 | 21 | 18 + 21 = 39 |
| 4 | 29 | 39 + 29 = 68 |
| 5 | 37 | 68 + 37 = 105 |
| 6 | 45 | 105 + 45 = 150 |
| 7 | 53 | 150 + 53 = 203 |
| 8 | 61 | 203 + 61 = 264 |
| 9 | 69 | 264 + 69 = 333 |
| 10 | 77 | 333 + 77 = 410 |

Mit der Strategie der Mustererkennung lässt sich eine explizite Berechnungsmöglichkeit angeben.

Es gilt , usw. Also ist .

Dann ist .

Unter Verwendung der Summenformel für die Summe der natürlichen Zahlen ergibt sich

.

Eine Verallgemeinerung auf Runden liefert .

Schülerinnen und Schüler, die einen guten Blick für Zahlen haben, finden auch heraus, dass man in der letzten Spalte der Tabelle die Werte in eine Summe zerlegen kann, indem die Zahl der Runden als Summand abgespalten wird. Dann bleibt als anderer Summand immer eine Quadratzahl übrig, und zwar das Quadrat der doppelten Rundenzahl.

Beispiel: Nach 3 Runden ist .

Auch aus dieser Beobachtung ergibt sich eine explizite Berechnungsmöglichkeit.

Eventuell ist es erforderlich, die Schülerinnen und Schüler durch einen Impuls der Lehrkraft auf die Möglichkeit der Zerlegung als Summe hinzuweisen. Danach kann das weitere Vorgehen von den Schülerinnen und Schülern selbständig geleistet werden.

### Mögliche Erweiterungen der Aufgabe:

Diese Aufgabe legt die Verwendung einer Tabellenkalkulation nahe.

Olympiadeaufgabe 500534

Bei dieser Aufgabe wird eine andere Grundfigur betrachtet, auf der die Wege durchlaufen werden.

**Aufgabe:**



Wir betrachten Wege von *A* nach *D* auf dem nebenstehenden Sechseck. Jeder Weg soll in *A* anfangen und in *D* enden und diese beiden Punkte unterwegs nicht mehr durchlaufen. („Einen Punkt durchlaufen“ heißt dabei, dass man ihn auf einem anderen Weg verlässt als auf dem, auf dem man gekommen ist.) Ein Beispiel für einen solchen Weg ist *ABMCBM****D***, der drei der restlichen fünf Punkte durchläuft und aus sechs Schritten besteht.

1. Gib alle Wege von *A* nach *D* an, bei denen alle anderen Punkte genau einmal durchlaufen werden. Aus wie vielen Schritten bestehen diese Wege?
2. Gib alle Wege mit fünf Schritten an, die *M* genau zweimal durchlaufen.
3. Gib alle kürzesten Wege an, die die Punkte *B* und *E* jeweils genau zweimal durchlaufen. Aus wie vielen Schritten bestehen diese Wege?
4. Gib alle kürzesten Wege an, die *E* dreimal durchlaufen. Aus wie vielen Schritten bestehen diese Wege?

**Lösungsvorschlag:**

1. Möglich sind hier nur die beiden Wege *AFEMBCD* und *ABCMFED*, die jeweils aus sechs Schritten bestehen.
2. Hier muss man sich klar werden, dass alle diese Wege zwei der Randpunkte auslassen müssen, da sie sonst mehr als fünf Schritte enthalten. Die weggelassenen Punkte müssen jeweils auf einer Seite von *AMD* liegen. Die nötige „Schleife“ durch *M* kann dann jeweils in zwei Richtungen erfolgen. Wir erhaltenen

*B* und *C* ausgelassen: *AMEFMD*, AMFEMD;

*E* und *F* ausgelassen: *AMCBMD*, *AMBCMD*.

1. Es gibt acht kürzeste Wege, die jeweils aus zehn Schritten bestehen:

*ABMCBMEFMED*, *ABMCBMFEMED*, *ABMBCMFEMED*, *ABMBCMEFMED*, *ABMEFMCBMED*, A*BMEFMBCMED*, *ABMFEMCBMED* und *ABMFEMBCMED.*

*AB* ist notwendig, um *B* auf kürzestem Weg zu durchlaufen. Als nächstes muss die Mitte *M* erreicht werden, damit man von dort weiter kommen kann.

Im Folgenden werden Dreiecksschleifen betrachtet. Dabei ist es von *M* aus egal, ob zuerst das Dreieck *MEF* oder *MBC* durchlaufen wird, und Richtung, in welcher die Dreiecke durchlaufen werden, ist ebenfalls egal. Somit können die Punkte *EF* bzw. *BC* jeweils in *FE* bzw. *CB* geändert werden, und die Dreiecksschleifen *MEF* und *MBC* bzw. *MFE* und *MCB* können ihre Plätze in der Abfolge wechseln.

1. Es gibt zwei kürzeste Wege von A nach D, die dreimal durch E laufen und die jeweils aus neun Schritten bestehen:

*AMEFMEFMED* und *AFEMFEMFED*

*AMED* und *AFED* sind die beiden kürzesten Wege, die einmal durch *E* laufen. Für einen zweiten Durchlauf durch *E* muss man, wenn man aus *M* nach *E* gekommen ist, die Schleife *FME* ablaufen – und, wenn man aus *F* nach *E* gekommen ist, die Schleife *MFE*. Also ist mit dem ersten Anlaufen von *E* der weitere Weg festgelegt:

Es gibt nur die Wege *AMEFMED* und *AFEMFED*.

Olympiadeaufgabe 530624

**Aufgabe:**

In dieser Aufgabe geht es um eine Ameise, die auf einem Dreiecksgitter, wie es in den Abbildungen gegeben ist, Wege entlangkrabbelt.

Im ersten Umlauf umkrabbelt die Ameise ein kleines Dreieck und geht zum Schluss noch eine Seitenlänge geradeaus, so dass sie im ersten Umlauf insgesamt 4 Seitenlängen zurückgelegt hat.

Im zweiten Umlauf umläuft die Ameise ein größeres Dreieck, und zwar wählt sie den kürzesten Weg in Form eines Dreiecks, um die bisher umlaufene Figur, die keine der bisher benutzten Kanten verwendet. Zum Schluss krabbelt sie wieder eine Seitenlänge nach außen, damit sie ihren nächsten Umlauf beginnen kann.

Auf diese Weise umkrabbelt die Ameise in weiteren Umläufen immer größere Dreiecke.

1. Wie viele Seitenlängen hat die Ameise am Ende des zweiten Umlaufs insgesamt zurückgelegt?
2. Wie viele Seitenlängen legt die Ameise im vierten Umlauf zurück?
3. In welchem Umlauf durchläuft die Ameise ihre insgesamt hundertste Seitenlänge?
4. Gib eine allgemeine Formel an, mit der man berechnen kann, wie viele Seitenlängen *u*(*n*) die Ameise im *n*-ten Umlauf zurückgelegt hat.

**Lösungsvorschlag:**

1. Abzählen der Abbildung 2 ermöglicht die Lösung 17 Seitenlängen. Dabei bringt der erste Umlauf (3 + 1 =) 4 Seitenlängen und der zweite Umlauf (12 + 1 =) 13 Seitenlängen.
2. Bei jedem Umlauf erhöht sich die Seitenlänge jeder Seite des zu umlaufenden Dreiecks um 3 Seitenlängen. Das heißt jede Seite ist 7 Seitenlängen lang. Somit legt die Ameise im dritten Umlauf (3 ∙ 7 + 1 =) 22 Seitenlängen zurück. Im vierten Umlauf dementsprechend 10 Seitenlängen pro Seite und damit insgesamt (3 ∙ 10 + 1=) 31 Seitenlängen.
3. Überträgt man die bisherigen Erkenntnisse in eine Tabelle, so ergibt sich unter Verwendung der folgenden Bezeichnungen *u*(*n*):= Anzahl der Seitenlängen im *n*-ten Umlauf und *w*(*n*):= gesamter zurückgelegter Weg:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *n* | *u*(*n*) | *w*(*n*) |
| 1 | 4 | 4 |
| 2 | 13 | 4 + 13 = 17 |
| 3 | 22 | 17 + 22 = 39 |
| 4 | 31 | 39 + 31 = 70 |

Da im fünften Umlauf auf jeden Fall mehr als 31 Seitenlängen durchlaufen werden, muss die hundertste Seitenlänge während des fünften Umlaufes durchkrabbelt werden.

1. Wenn man den Ansatz von b) weiterverfolgt, so kommt man zu folgender Erkenntnis: In jedem Umlauf kommen pro Seite drei Seitenlängen hinzu. Jeder Umlauf benötigt also 9 Seitenlängen mehr, als der vorherige.

Dabei ist der erste Umlauf nur 4 Seitenlängen lang. Durch Ausnutzung der Ergebnisse aus c) erhält man dann folgende Tabelle:

|  |  |
| --- | --- |
| *n* | *u*(*n*) |
| 1 | 4 |
| 2 | 13 = 9 + 4 = 9 ∙ 1 + 4 |
| 3 | 22 = 9 + 13 =9 + 9 + 4 = 9 ∙ 2 + 4 |
| 4 | 31 = 9 ∙ 3 + 4 |
| 5 | 40 = 9 ∙ 4 + 4 |
| *n* | 9 ∙ (*n* - 1) + 4 = 9 ∙ *n* - 5 |

Es ergibt sich also die Formel *u*(*n*) = 9 ∙ (*n* - 1) + 4 = 9 ∙ *n* – 5.