Spielstände

Motivation für SuS:

* Der Kontext ist vertraut und sehr positiv belegt.
* Falsche Aussagen und verblüffende Ergebnisse provozieren zu tieferer Auseinandersetzung.

Lösungsstrategien:

* Systematisches Auflisten von Spielereignissen.
* Systematisches Zählen und Entwickeln einer Berechnungsformel für die Anzahl der Spiele.
* Argumentieren über die möglichen Gesamtpunktzahlen, die durch die Gesamtzahl der Spiele und die Punkteverteilungen eingegrenzt sind.
* Argumentieren über die Betrachtung weiterer Bilanzen, wie z.B.:
  + Es werden genauso häufig 0 Punkte wie 3 Punkte vergeben.
  + Die Anzahl der Spiele einer einzelnen Mannschaft.
  + Alle verlorenen, alle gewonnenen und alle unentschiedenen Spiele, für jede der beteiligten Mannschaften gezählt, sind insgesamt doppelt so viele wie die Gesamtspielzahl.
* Argumentation mit Symmetrien.
* Argumentation mit Teilbarkeit und Resten.

Didaktische Überlegungen:

* Mit kleinen Mannschaftszahlen beginnen; Systematisierung beim Zählen der Gesamtspielzahl durch große Zahlen von beteiligten Mannschaften motivieren.
* Beispiele verwenden: Fußballbundesliga, regionale Vereinsmeisterschaften etc.
* Argumentation über die Gesamtpunktzahl kann über vollkommen unrealistische Beispiele mit zu hohen Gesamtpunktzahlen oder sehr viele Beispiele mit unmöglichen Gesamtpunktzahlen motiviert werden.
* Als Hilfestellung und Motivation können Hilfekarten bereitgestellt werden (siehe [Anhang](#Hilfekarte_A2) zu diesem Dokument für die Aufgaben [2](#Aufgabe_2) und [7](#Aufgabe_7))

**Aufgabe 1 (Känguru 1998)**

Im Semifinale eines Basketballturniers spielt die Mannschaft A gegen Mannschaft B und Mannschaft C gegen Mannschaft D. Die Gewinner der Semifinals spielen dann um den 1. und 2. Platz, die Verlierer um den 3. und 4. Platz.

Wie viele Turnier-Endstände sind möglich? Liste sie auf.

**Lösungsvorschlag:**

Durch **systematisches Aufzählen** ergibt sich die folgende Tabelle – insgesamt sind 16 verschiedene Turnier-Endstände möglich:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1.** | **2.** | **3.** | **4.** |
| A | C | B | D |
| A | C | D | B |
| A | D | B | C |
| A | D | C | B |
| B | C | A | D |
| B | C | D | A |
| B | D | A | C |
| B | D | C | A |
| C | A | B | D |
| C | A | D | B |
| C | B | A | D |
| C | B | D | A |
| D | A | B | C |
| D | A | C | B |
| D | B | A | C |
| D | B | C | A |

**Weitere Lösungsstrategien:**

* **Ausnutzen von Symmetrien**

Wenn für eine Mannschaft die Möglichkeiten, auf den ersten Platz zu gelangen, gezählt sind, ist die Gesamtzahl aus Symmetriegründen das Vierfache der Anzahl dieser Möglichkeiten. Für die Belegung des zweiten Platzes bleiben genau zwei Möglichkeiten, da der Gegner des ersten Spiels im K.O.-System nicht auf Platz zwei gelangen kann. Genauso ist klar, dass nach Festlegung der ersten beiden Plätze noch genau zwei Möglichkeiten für die Belegung des dritten und vierten Platzes bleiben. Es ergibt sich .

* **Kombinatorik**

Es gibt insgesamt Möglichkeiten, vier Mannschaften auf 4 Plätze zu verteilen. Da im K.O.-System alle Kombinationen, in denen die beiden ersten Plätze mit A und B bzw. mit C und D belegt sind, nicht möglich sind, fallen 8 Kombinationen heraus. Es verbleiben 16 Kombinationen, die alle möglich sind.

**Aufgabe 2 (Känguru 1998)**

Vier Fußballteams spielten in einem Wettbewerb jeder gegen jeden genau einmal. Der Sieger bekam 3 Punkte, bei Unentschieden gab es 1 Punkt für jedes Team. Am Ende waren die Punktergebnisse 5, 3, 3, 2.

Wie viele Unentschieden gab es bei diesem Turnier? Begründe deine Antwort.

**Lösungsvorschlag (siehe auch** [**Hilfekarten**](#Hilfekarte_A2)**):**

Wir benennen die Teams so, dass gilt: Team A hat 5 Punkte, Team B hat 3 Punkte, Team C hat 3 Punkte und Team D hat 2 Punkte erzielt. Bei 4 Teams A, B, C, D gab es insgesamt 6 Spiele: (A:B), (A:C), (A:D), (B:C), (B:D), (C:D).

Wir beginnen mit den Überlegungen zu Team D, da es nur wenige Möglichkeiten gibt, insgesamt 2 Punkte zu bekommen: Dieses Team muss zweimal unentschieden gespielt haben.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Punkte für … | | | |
| Spiele | A | B | C | D |
| A:B |  |  |  |  |
| A:C |  |  |  |  |
| A:D | 1 |  |  | 1 |
| B:C |  |  |  |  |
| B:D |  | 1 |  | 1 |
| C:D |  |  |  |  |
| Endstand | 5 | 3 | 3 | 2 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Punkte für … | | | |
| Spiele | A | B | C | D |
| A:B |  |  |  |  |
| A:C |  |  |  |  |
| A:D |  |  |  |  |
| B:C |  |  |  |  |
| B:D |  | 1 |  | 1 |
| C:D |  |  | 1 | 1 |
| Endstand | 5 | 3 | 3 | 2 |

Die dritte Möglichkeit, dass die Spiele (A:D) und (C:D) unentschieden ausgegangen sind, entspricht genau der schon aufgelisteten Möglichkeit, dass (A:D) und (B:D) unentschieden gespielt haben, da B und C die gleiche Punktsumme erhalten haben.

Angenommen Team D hat gegen Team A und gegen Team B unentschieden gespielt; dann muss es gegen Team C verloren haben. Da Team C nur 3 Punkte hat, muss es die beiden anderen Spiele gegen Team A und Team B verloren haben. Das geht aber nicht, da Team B nur 3 (und nicht 4) Punkte hat!

Also muss Team D gegen Team B und Team C unentschieden gespielt haben und hat somit gegen Team A verloren. Da Team A insgesamt nur 5 Punkte erzielt hat, muss es gegen Team B und C unentschieden gespielt haben. Ebenso müssen Team B und Team C unentschieden gegeneinander gespielt haben. Als Übersicht ergibt sich somit:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Punkte für … | | | |
| Spiele | A | B | C | D |
| A:B | 1 | 1 |  |  |
| A:C | 1 |  | 1 |  |
| A:D | 3 |  |  | 0 |
| B:C |  | 1 | 1 |  |
| B:D |  | 1 |  | 1 |
| C:D |  |  | 1 | 1 |
| Endstand | 5 | 3 | 3 | 2 |

Bei diesem Turnier gab es also insgesamt **5** Unentschieden.

**Aufgabe 3 (Mathematik-Olympiade, Aufgabe 360512)**

Drei Fußballvereine A, B und C tragen ein Turnier aus, bei dem jeder Verein genau einmal gegen jeden der beiden anderen Vereine spielt. Die Punkteverteilung erfolgt so:

Jeder Verein bekommt …

für jedes gewonnene Spiel 3 Punkte

für jedes verlorene Spiel 0 Punkte

für jedes unentschiedene Spiel 1 Punkt

1. Wie viele Spiele werden insgesamt in dem Turnier gespielt und welche sind es?
2. Wie viele Spiele insgesamt gibt es bei einem entsprechenden Turnier mit vier (mit fünf, mit sechs, mit n) Vereinen?
3. Xaver, Yvonne und Zacharias sprechen über den Tabellen-Endstand des Turniers mit den Vereinen A, B und C. Alle sind unterschiedlicher Meinung. Kann der Tabellen-Endstand des Turniers mit den Vereinen A, B und C wie folgt aussehen?

|  |  |
| --- | --- |
| Xaver behauptet: | |
| Verein | Punkte |
| A | 6 |
| B | 3 |
| C | 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| Yvonne behauptet: | |
| Verein | Punkte |
| A | 4 |
| B | 1 |
| C | 2 |

|  |  |
| --- | --- |
| Zacharias behauptet: | |
| Verein | Punkte |
| A | 2 |
| B | 2 |
| C | 2 |

Stelle für jede der drei Behauptungen fest, ob sie einen möglichen Endstand angibt. Begründe deine Feststellungen.

**Lösungsvorschlag:**

1. Bei 3 Vereinen A, B, C gibt es insgesamt 3 Spiele, nämlich

|  |  |
| --- | --- |
| (A;B) | (A;C) |
| (B;C) |  |

1. Bei 4 Vereinen A, B, C, D gibt es insgesamt 6 Spiele (plus 3), nämlich

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (A;B) | (A;C) | (A;D) |
| (B;C) | (B;D) |  |
| (C;D) |  |  |

Bei 5 Vereinen A, B, C, D, E gibt es insgesamt 10 Spiele (plus 4), nämlich

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| (A;B) | (A;C) | (A;D) | (A;E) |
| (B;C) | (B;D) | (B;E) |  |
| (C;D) | (C;E) |  |  |
| (D;E) |  |  |  |

Bei 6 Vereinen A, B, C, D, E, F gibt es insgesamt 15 Spiele (plus 5), nämlich

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| (A;B) | (A;C) | (A;D) | (A;E) | (A;F) |
| (B;C) | (B;D) | (B;E) | (B;F) |  |
| (C;D) | (C;E) | (C;F) |  |  |
| (D;E) | (D;F) |  |  |  |
| (E;F) |  |  |  |  |

Bei n Vereinen ist die Anzahl Z(n) der Spiele eine „Dreickszahl“:

oder .

1. Xavers Tabellen-Endstand ist **nicht** möglich:

Danach müsste A beide Spiele gewonnen haben und auch B siegreich gegen C gewesen sein. Dann aber hätte C beide Spiele verloren und müsste somit 0 Punkte (anstatt 1 Punkt) haben.

Yvonnes Tabellen-Endstand ist möglich:

Danach hat A gegen B gewonnen und gegen C unentschieden gespielt. Das Spiel (B;C) endete ebenfalls unentschieden. Diese Spielresultate führen zu der angegebenen Punkteverteilung.

Zacharias‘ Tabellen-Endstand ist möglich:

Alle Spiele endeten unentschieden, so dass jede Mannschaft dieselbe Punktzahl aufweist, nämlich 2 Punkte.

**Aufgabe 4 (Mathematik-Olympiade, Aufgabe 360522)**

Vier Fußballvereine A, B, C und D tragen ein Turnier aus, bei dem jeder dieser Vereine gegen jeden anderen genau einmal spielt. Die Punkteverteilung erfolgt so:

Jeder Verein bekommt …

für jedes gewonnene Spiel 3 Punkte

für jedes verlorene Spiel 0 Punkte

für jedes unentschiedene Spiel 1 Punkt

1. Welche Werte kann die Summe aller derjenigen Punkte annehmen, die in einem solchen Turnier vergeben werden? Nenne alle diese Werte und begründe, dass es alle sind.
2. Bei einem solchen Turnier wurde der folgende Tabellen-Endstand erreicht:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Verein | A | B | C | D |
| Punkte | 9 | 4 | 3 | 1 |

Gib für jedes einzelne Spiel des Turniers einen möglichen Spielausgang so an, dass dieser Endstand zustande kommen konnte. Gib dabei für jedes Spiel den Gewinnerverein, den Verliererverein bzw. die Information, dass das Spiel unentschieden ausging, an!

1. Bei einem anderen solchen Turnier war 14 die Summe aller derjenigen Punkte, die in dem Turnier vergeben wurden. Außerdem ergab sich im Endstand:
   * A erhielt mehr Punkte als B,
   * B mindestens so viele Punkte wie C,
   * C mindestens so viele Punkte wie D.

Gib auch hierzu für jedes einzelne Spiel einen Spielausgang so an, dass ein derartiger Tabellen-Endstand zustande kommen konnte!

**Lösungsvorschlag (Hier kann auch Hilfekarte 2.1 verwendet werden):**

1. In jedem derartigen Turnier werden 6 Spiele (A;B), (A;C), (A;D), (B;C), (B;D), (C;D) ausgetragen. In jedem dieser Spiele werden entweder 3 + 0 = 3 oder 1 + 1 = 2 Punkte vergeben. Die Summe aller dieser Punkte kann daher höchstens Punkte betragen, nämlich dann, wenn keines der Spiele unentschieden endet.

Immer dann, wenn eines der 6 Spiele unentschieden endet, verkleinert sich die Summe um 1 Punkt. Daher kann die Summe die Werte 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12 und keine anderen annehmen!

(Alternativ kann auch folgende Formel betrachtet werden: mit g ist die Anzahl der gewonnen Spiele und u die Anzahl der unentschieden ausgegangenen Spiele. Durch Einsetzen entsprechender Zahlen für g und u erhält man die gesuchten Werte.)

1. Der genannte Endstand kann zustande komme. Dies zeigt sich bei folgender Möglichkeit der Spielausgänge:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Punkte für … | | | |
| Spiele | A | B | C | D |
| A:B | 3 | 0 |  |  |
| A:C | 3 |  | 0 |  |
| A:D | 3 |  |  | 0 |
| B:C |  | 3 | 0 |  |
| B:D |  | 1 |  | 1 |
| C:D |  |  | 3 | 0 |
| Endstand | 9 | 4 | 3 | 1 |

1. Ein Tabellen-Endstand der genannten Art kann zustande kommen. Um dieses zu zeigen, genügt die Angabe von einer der beiden folgenden Möglichkeiten der Spielausgänge:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Punkte für … | | | |
| Spiele | A | B | C | D |
| A:B | 1 | 1 |  |  |
| A:C | 3 |  | 0 |  |
| A:D | 3 |  |  | 0 |
| B:C |  | 1 | 1 |  |
| B:D |  | 1 |  | 1 |
| C:D |  |  | 1 | 1 |
| Endstand | 7 | 3 | 2 | 2 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Punkte für … | | | |
| Spiele | A | B | C | D |
| A:B | 3 | 0 |  |  |
| A:C | 1 |  | 1 |  |
| A:D | 1 |  |  | 1 |
| B:C |  | 1 | 1 |  |
| B:D |  | 3 |  | 0 |
| C:D |  |  | 1 | 1 |
| Endstand | 5 | 4 | 3 | 2 |

**Aufgabe 5 (Mathematik-Olympiade, Aufgabe 360532)**

Sieben Fußballvereine trugen ein Turnier aus, bei dem jeder dieser Vereine gegen jeden anderen genau einmal spielte. Die Punkteverteilung erfolgt so:

Jeder Verein bekommt …

für jedes gewonnene Spiel 3 Punkte

für jedes verlorene Spiel 0 Punkte

für jedes unentschiedene Spiel 1 Punkt

1. Wie viele Spiele wurden in diesem Turnier gespielt?
2. Nach dem Turnier behauptet Franz: „Der Siegerverein hat genau 17 Punkte.“

Fritz meint: „Das kann nicht stimmen.“

Zeige, dass Fritz recht hat!

1. Die (richtige) Tabelle am Ende des Turniers ergibt 52 als Summe der Punkte aller sieben Vereine. Wie viele von allen Spielen wurden gewonnen?
2. Zeige, dass am Ende eines Turniers die Summe der Punkte aller sieben Vereine nicht 41 sein kann!

**Lösungsvorschlag:**

1. Jeder der 7 Vereine hat 6 Spiele zu spielen. Zählt man diese Spiele für jeden Verein auf, so hat man jedes Spiel 2-mal erfasst. Also ist doppelt so viel wie die gesuchte Zahl der Spiele. Daher ist 21 die gesuchte Zahl.
2. Um 17 Punkte zu erhalten, könnte der Verein *höchstens* 5 Spiele gewonnen haben, denn 6 gewonnene Spiele bringen 18 Punkte.

Hätte der Verein *genau* 5 Spiele gewonnen, so müssten noch 2 unentschiedene Spiele hinzukommen, um 17 Punkte zu erreichen. Das würde aber 7 Spiele ergeben; so viele hat kein Verein gespielt.

Hätte der Verein *weniger* als 5 Spiele gewonnen, so können die noch fehlenden Punkte nicht mit unentschiedenen Spielen aufgeholt werden, da der Verein nur genau 6 Spiele gespielt hat. Damit wären also mehr als 7 Spiele nötig gewesen, was erst recht nicht möglich ist.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Gewonnen | Unentschieden | **Gesamtpunktzahl** |
| 4 | 2 | **14** |
| 4 | 1 | **13** |
| 3 | 3 | **12** |
| 2 | 4 | **10** |
| 1 | 5 | **8** |
| 0 | 6 | **6** |

1. Jedes Spiel, das von einem Verein gewonnen (und von dem anderen verloren) wurde, bringt 3 Punkte in die Summe, jedes unentschiedene Spiel 2 Punkte. Waren g Spiele gewonnen und u Spiele unentschieden, so gilt also:

(1)

Außerdem gilt: (2)

Eine Lösung dieser Gleichung ist g = 10, u = 11; denn es gilt und .

Es gibt keine andere Lösung. Um dies zu beweisen, gibt es mehrere Möglichkeiten, z.B.: Wenn g größer als 10 sein könnte, so müsste u wegen (2) um ebenso viel kleiner als 11 sein. Dabei würde sich in (1) der erste Summand stärker vergrößern als der zweite sich verkleinert. Also wäre (1) nicht mehr erfüllt. Entsprechend folgt, dass g auch nicht kleiner als 10 sein kann.

Eine andere Beweismöglichkeit ist „systematisches Probieren“, z.B. mittels einer Tabelle der folgenden Art:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| g | u, so dass (2) gilt |  |
| … | … | … |
| 8 | 13 | 50 |
| 9 | 12 | 51 |
| 10 | 11 | 52 |
| 11 | 10 | 53 |
| … | … | … |

1. Nach (a) (oder nach (2)) folgt: Waren alle 21 Spiele unentschieden, so ist die Summe aller Punkte 42. Gibt es auch gewonnene Spiele, so bringen sie 3 statt 2 Punkte in die Summe und vergrößern diese damit noch mehr. Also kann die Summe 41 nicht vorkommen.

Auch dies kann z.B. tabellarisch dargestellt werden:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| g | u, so dass (2) gilt |  |
| 0 | 21 | 42 |
| 1 | 20 | 43 |
| 2 | 19 | 44 |
| 3 | 18 | 45 |
| 4 | 17 | 46 |
| … | … | … |

**Aufgabe 6 (Mathematik-Olympiade, Aufgabe 380514)**

Nach einem Kniffelspiel vergleichen Gabi, Jana, Martin und Stefan ihre Punktezahlen und stellen folgendes fest:

1. Stefan erreichte mehr Punkte als Martin.
2. Die Mädchen haben zusammen genauso viele Punkte wie die beiden Jungen zusammen.
3. Gabi und Stefan haben zusammen weniger Punkte erzielt als Jana und Martin zusammen.

Wer ist Erster geworden, wer Zweiter, wer Dritter und wer Vierter?

**Lösungsvorschlag:**

Es sei folgendes festgelegt:

G: Punktezahl von Gabi

J: Punktezahl von Jana

M: Punktezahl von Martin

S: Punktezahl von Stefan

Es gilt dann:

1. M < S wegen der 1. Feststellung
2. G + J = M + S wegen der 2. Feststellung
3. G + S < J + M wegen der 3. Feststellung

Durch Addition von (2) und (3) ergibt sich:

1. 2G + J + S = 2M + J + S

Daraus folgt durch Vergleichen der beiden Seiten (Subtraktion von J + S):

1. G < M

Weiterhin folgt aus (2) und (5):

1. S < J

Wegen (1), (6) und (5) folgt nun die Reihenfolge:

G < M < S < J

Die gesuchte Ergebnisliste lautet: Jana siegte vor Stefan, Martin und Gabi.

Hinweis: Man könnte durch ein Beispiel mit vier Zahlen zeigen, dass es möglich ist, die Bedingungen zu erfüllen; dies ist nicht erforderlich, da die Erfüllbarkeit dem Aufgabentext entnommen werden kann.

**Aufgabe 7 (Mathematik-Olympiade, Aufgabe 370631)**

Andreas, Birgit und Claudia trugen ein kleines Schachturnier untereinander aus. Folgendes ist bekannt:

1. Jeder spielte gegen jeden die gleiche Anzahl von Spielen.
2. Keine Partie endete remis (unentschieden).
3. Andreas gewann genau seiner Spiele.
4. Birgit gewann genau ihrer Spiele.
5. Claudia gewann genau ein Spiel.
6. Ermittle die Anzahl aller Spiele, die in dem Turnier insgesamt gespielt wurden!
7. Wie viele Spiele gewann Andreas, und wie viele gewann Birgit?

**Lösungsvorschlag (siehe auch** [**Hilfekarten**](#Hilfekarte_A7)**):**

**Musterlösung der MO:**

1. Wenn jeder gegen jeden spielt, so gibt es drei Spieltypen: (A:B), (A:C), (B:C). Mit a sei die Anzahl aller Spiele in diesem Turnier bezeichnet; a ist dann ein Vielfaches von 3. Wie man aus den Spieltypen sehen kann, spielt jeder Spiele.

Andreas gewann seiner Spiele (siehe 3. Bedingung), also Spiele.

Birgit gewann ihrer Spiele (siehe 4. Bedingung), also Spiele.

Claudia gewann genau ein Spiel (siehe 5. Bedingung). Da keine Partie remis endete (siehe 2. Bedingung), müssen die gewonnenen Spiele aller drei Mitspieler zusammen die Gesamtzahl der Spiele ergeben, d.h.

Es wurden also insgesamt 18 Spiele gespielt. Jeder Teilnehmer spielte somit in Spielen.

1. Andreas gewann Spiele, Birgit gewann Spiele, und Claudia gewann 1 Spiel. Die Kontrolle ergibt 8 + 9 + 1 = 18 Spiele insgesamt.

**Weniger formal angelegte Lösung:**

Da die Zahl der Spiele, die jeder der drei spielt, durch 3 und durch 4 teilbar ist, werden von jedem Teilnehmer ein Vielfaches von 12 Spielen gespielt. Insgesamt werden daher ein Vielfaches von Spielen gespielt. Von diesen Spielen gewinnt Andreas ein Vielfaches von und Birgit ein Vielfaches von Spielen. Claudia gewinnt also ein Vielfaches von Spiel. Da sie genau ein Spiel gewinnt, ist der Faktor also jeweils 1. Also werden insgesamt 18 Spiele gespielt, von denen Andreas 8 Spiele, Birgit 9 Spiele und Claudia 1 Spiel gewinnt.

**Hilfekarten zu Aufgabe 2**

**Hilfekarte 2.1**

Die folgende Tabelle kann dir helfen, mögliche Spielausgänge auszuprobieren. Trage in die Zellen immer die für das Spiel vergebenen Punkte ein. Die Punktesumme muss eingehalten werden.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Punkte für … | | | |
| Spiele | A | B | C | D |
| A:B |  |  |  |  |
| A:C |  |  |  |  |
| A:D |  |  |  |  |
| B:C |  |  |  |  |
| B:D |  |  |  |  |
| C:D |  |  |  |  |
| Endstand | 5 | 3 | 3 | 2 |

**Hilfekarte 2.2**

Tipp: Beginne mit den Spielen für Team D. Eine Möglichkeit ist hier schon eingetragen. Versuche, die leeren Felder stimmig auszufüllen. Gibt es noch mehr Möglichkeiten für die unentschiedenen Spiele von D?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Punkte für … | | | |
| Spiele | A | B | C | D |
| A:B |  |  |  |  |
| A:C |  |  |  |  |
| A:D | 1 |  |  | 1 |
| B:C |  |  |  |  |
| B:D |  | 1 |  | 1 |
| C:D |  |  |  |  |
| Endstand | 5 | 3 | 3 | 2 |

**Hilfekarten zu Aufgabe 7**

**Hilfekarte 7.1**

Tipp: Überlege, welche Anzahl von Spielen ein einzelner Spieler mindestens gespielt hat, wenn die Bedingungen 3 und 4 erfüllt sind.

**Hilfekarte 7.2**

Die Anzahl der Spiele, die jeder Spieler gespielt hat, ist ein Vielfaches von 12. Begründe!