**Aufgabe 1 (480612):**

Christian erklärt Sarah, dass es *arme* und *reiche* Zahlen gibt*. „Arm* ist eine Zahl, wenn die Summe der echten Teiler kleiner als die Zahl selbst ist. *Reich* ist eine Zahl, wenn die Summe der echten Teiler größer als die Zahl selbst ist.“ Dazu muss man wissen, was Teiler und echte Teiler einer Zahl sind. An Beispielen versteht man sofort, was Teiler sind:

* 3 ist ein Teiler von 15, weil man 15 durch 3 ohne Rest teilen kann.
* 14 ist kein Teiler von 35, weil man 35 nicht ohne Rest durch 14 teilen kann.
* Aber auch: 1 ist ein Teiler von 7, weil man 7 ohne Rest durch 1 teilen kann.
* Und natürlich ist jede Zahl von sich selbst Teiler.

Die **echten Teiler** einer Zahl sind alle Teiler außer der 1 und der Zahl selbst.

Beispiel:

30 hat die **Teiler** 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 und 30. Kurzschreibweise: .

Die **echten Teiler** sind 2, 3, 5, 6, 10 und 15.   
Die Summe der echten Teiler ist .

1. Sarah fragt: „Gibt es unter den Zahlen 9, 16, 18, 20, 25 und 36 *reiche* Zahlen?“
2. Sarah fordert nun Christian auf, unter den Zahlen 1 bis 99 die kleinste und die größte *reiche* Zahl zu finden. (Achtung! Es ist die größte *reiche* Zahl gesucht, nicht die reichste!)
3. Sarah stellt fest: „Primzahlen sind die ärmsten Zahlen!“ Stimmt das?

**Aufgabe 2 (480714):**

Der griechische Philosoph Pythagoras (geb. um 570 v. Chr., gest. um 496 v. Chr. ) entdeckte Zahlen, die „*befreundet*“ sind. Ihre spezielle mathematische Eigenschaft ist, dass die Summe der Teiler der einen Zahl die jeweils andere Zahl ergibt.

Das von ihm gefundene Paar ist .

Die Zahl 220 ist teilbar durch 1, 2, 4, 5, 11, 20, 22, 44, 55 und 110,

und es gilt .

Die Zahl 284 hat die Teiler 1, 2, 4, 71, 142, und es gilt .

Beachte, dass im Gegensatz zur heute üblichen Definition „*Die natürliche Zahl heißt Teiler der natürlichen Zahl genau dann, wenn es eine natürliche Zahl gibt, so dass gilt*.“ Pythagoras den Fall ausgeschlossen hat. Er hat also die Zahl selber nicht als Teiler angesehen.

Ein weiteres Paar von „befreundeten“ Zahlen ist und wurde erst 1636 vom französischen Mathematiker Pierre de Fermat (geb. 1601, gest. 1665) entdeckt. Bis Mitte des 19. Jahrhunderts wurden etwa 60 Paare „befreundeter“ Zahlen gefunden; das zweitkleinste Paar erst 1866 von einem 16jährigen italienischer Schüler. Inzwischen kennt man Hunderte derartiger Zahlen. Bisher ungelöst ist das Problem: Gibt es unendlich viele solcher Paare?

1. Überprüfe, dass das von Fermat gefundene Paar (17296; 18416) tatsächlich die genannten Bedingungen erfüllt.
2. Ermittle das zweitkleinste Paar „befreundeter“ Zahlen, wenn du als zusätzliche Voraussetzung verwenden darfst, dass die Zahlen zwischen 1150 und 1250 liegen.

**Aufgabe 3 (360732):**

Eine Zahl soll *symmetrisch* heißen, wenn ihre Zifferndarstellung von rechts gelesen ebenso lautet, wie von links. Dabei soll stets auch die 0 als Anfangsziffer mit berücksichtigt werden. So sind z. B. 15251 und 037730 *symmetrische* Zahlen.

1. Ein vierstelliger Tageskilometerzähler in einem Pkw zeigt 0163. Bestimme die letzte vorausgegangene und die nächstfolgende *symmetrische* Zahl, die der Zähler zeigt.
2. Ermittle die Anzahl aller vierstelligen *symmetrischen* Zahlen.
3. Bestimme den Anteil aller fünfstelligen *symmetrischen* Zahlen an der Gesamtheit der fünfstelligen Zahlen.
4. Gib in einer Tabelle die entsprechenden Anteile bei zwei-, drei- … bis siebenstelligen Zahlen an.

Stelle eine Vermutung über eine Gesetzmäßigkeit und bestimme auf Grund deiner Vermutung die entsprechenden Anteile bei 32-, 33- und 34-stelligen Zahlen.

**Aufgabe 4 (440836):**

Eine Zahl soll *mysteriös* heißen, wenn sie dreistellig ist, und sie selbst, ihr Dreifaches und ihr Fünffaches alle Ziffern von 1 bis 9 genau einmal enthalten.

Ermittle alle *mysteriösen* Zahlen.

**Aufgabe 5 (370724):**

Eine natürliche Zahl werde genau dann eine „QP-Zahl“ genannt, wenn ihre Quersumme gleich dem Produkt ihrer Ziffern ist.

1. Nenne je eine zweistellige und eine dreistellige „QP-Zahl“.
2. Ermittle die kleinste vierstellige „QP-Zahl“.
3. Ermittle alle Möglichkeiten, für und Ziffern so einzusetzen, dass die Zahl eine „QP-Zahl“ ist. Dabei bedeute die Schreibweise , dass die Zahl mit den Ziffern in dieser Reihenfolge geschrieben wird.
4. Beweise, dass es keine vierstellige „QP-Zahl“ gibt, unter deren Ziffern die 5 vorkommt.

**Aufgabe 6 (510814):**

Eine *symmetrische Zahl* ist eine Zahl mit folgender Eigenschaft: Liest man die Zahl von links nach rechts, so ergibt sich dieselbe Zahl wie beim Lesen von rechts nach links. Die Zahl 615516 ist eine *symmetrische Zahl*. Die Zahl 415 ist keine *symmetrische Zahl*, denn wenn man sie von rechts nach links liest, ergibt sich 514.

1. Beweise: Eine sechsstellige *symmetrische Zahl* ist immer durch 11 teilbar.
2. Beweise: Wenn man alle sechsstelligen *symmetrische Zahlen* durch 11 dividiert, dann sind mindestens 10 % dieser Quotienten fünfstellige *symmetrische Zahlen*.
3. Untersuche: Gibt es mehr sechsstellige *symmetrische Zahlen*, die bei der Division durch 11 keine fünfstellige *symmetrische Zahl* ergeben, als solche, bei denen sich eine fünfstellige *symmetrische Zahl* ergibt?

**Aufgabe 7 (530842):**

Eine Zahl heiße *unglücklich*, wenn sie eine positive ganze Zahl ist, die gleich dem Dreizehnfachen ihrer Quersumme ist.

1. Begründe, dass es keine zweistelligen *unglücklichen* Zahlen gibt.
2. Ermittle alle dreistelligen *unglücklichen* Zahlen.
3. Untersuche, ob es *unglückliche* Zahlen gibt, welche mehr als 3 Stellen haben.