In diesem Modul müssen die Schülerinnen und Schüler mehrere Strategien, die ihnen bekannt sein sollten, verwenden: Systematisches Zählen, Fallunterscheidungen, Mustererkennung. Zudem spielen Primzahlen und Teilbarkeit eine entscheidende Rolle bei der Untersuchung der besonderen Zahlen. Dadurch sind die Aufgaben des Moduls in der Gesamtheit anspruchsvoll, wenn auch einfache Teilaufgaben, die von allen Schülerinnen und Schülern bewältigt werden können, dabei sind. Das Modul eignet sich somit in besonderer Weise für eine Leistungsdifferenzierung innerhalb der Arbeitsgemeinschaft.

Im Mathematikunterricht werden zwar Teilbarkeitsregeln noch behandelt, aber eine intensive Auseinandersetzung mit der Menge der Teiler einer Zahl bis hin zur Primfaktorzerlegung kommt kaum noch vor. Aus diesem Grund werden bei der Lösung der Aufgaben auch Inhalte (zum Beispiel besondere Teilbarkeitsregeln) vermittelt, die lange aus dem Schulunterricht herausgefallen sind.

Bei Wettbewerbsaufgaben der Mathematikolympiade werden Zahlen mit besonderen Eigenschaften oft phantasievolle Namen gegeben. Diese Namen werden bei den Aufgaben des Moduls verwendet.

Olympiadeaufgabe 480612

Im Text dieser einfachen Einstiegsaufgabe wird zunächst ausführlich erklärt, was unter *armen* und *reichen* Zahlen zu verstehen ist. Dabei werden auch die Begriffe Teiler, echte Teiler und Teilermenge beschrieben und an Beispielen erläutert.

Im ersten Aufgabenteil sind einige vorgegebene Zahlen auf die beschriebenen Eigenschaften zu untersuchen. Dazu sollten alle Schülerinnen und Schüler Lösungen finden. Im zweiten Aufgabenteil müssen die Schülerinnen Zahlen mit den Eigenschaften finden. Im abschließenden Teil ist eine allgemeine Aussage verlangt.

**Aufgabe:**

Christian erklärt Sarah, dass es *arme* und *reiche* Zahlen gibt*. „Arm* ist eine Zahl, wenn die Summe der echten Teiler kleiner als die Zahl selbst ist. *Reich* ist eine Zahl, wenn die Summe der echten Teiler größer als die Zahl selbst ist.“ Dazu muss man wissen, was Teiler und echte Teiler einer Zahl sind. An Beispielen versteht man sofort, was Teiler sind:

* 3 ist ein Teiler von 15, weil man 15 durch 3 ohne Rest teilen kann.
* 14 ist kein Teiler von 35, weil man 35 nicht ohne Rest durch 14 teilen kann.
* Aber auch: 1 ist ein Teiler von 7, weil man 7 ohne Rest durch 1 teilen kann.
* Und natürlich ist jede Zahl von sich selbst Teiler.

Die **echten Teiler** einer Zahl sind alle Teiler außer der 1 und der Zahl selbst.

Beispiel:

30 hat die **Teiler** 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 und 30. Kurzschreibweise: .

Die **echten Teiler** sind 2, 3, 5, 6, 10 und 15.   
Die Summe der echten Teiler ist .

1. Sarah fragt: „Gibt es unter den Zahlen 9, 16, 18, 20, 25 und 36 *reiche* Zahlen?“
2. Sarah fordert nun Christian auf, unter den Zahlen 1 bis 99 die kleinste und die größte *reiche* Zahl zu finden. (Achtung! Es ist die größte *reiche* Zahl gesucht, nicht die reichste!)
3. Sarah stellt fest: „Primzahlen sind die ärmsten Zahlen!“ Stimmt das?

**Lösungshinweise:**

Die Ergebnisse zu den Teilen a) und b) werden übersichtlich, wenn man eine Tabelle anlegt. Die hier dargestellte Tabelle enthält außer den in Teil a) zu untersuchenden Zahlen auch für Teil b) so viele Zahlen, dass die kleinste und größte reiche Zahl gefunden wird. Dabei sind die Primzahlen und die Zahl 1 nicht aufgeführt. Die Schülerinnen und Schüler werden bei der Untersuchung von Beispielen schnell feststellen, dass es bei den Primzahlen keine echten Teiler gibt, was sie zur Lösung von Teil c) verallgemeinern.

Bei der Suche nach der größten reichen Zahl empfiehlt es sich, von 99 an rückwärts die Zahlen zu untersuchen

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Zahl | Teiler der Zahl | Summe der echten Teiler | Art der Zahl |
| 4 | 1, 2, 4 | 2 | arm |
| 6 | 1, 2, 3, 6 | 5 | arm |
| 8 | 1, 2, 4, 8 | 6 | arm |
| 9 | 1, 3, 9 | 3 | arm |
| 10 | 1, 2, 5, 10 | 7 | arm |
| 12 | 1, 2, 3, 4, 6, 12 | 15 | reich |
| 16 | 1, 2, 4, 8, 16 | 15 | arm |
| 18 | 1, 2, 3, 6, 9, 18 | 20 | reich |
| 20 | 1, 2, 4, 5, 10, 20 | 21 | reich |
| 25 | 1, 5, 25 | 5 | arm |
| 36 | 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18,36 | 54 | reich |
| … | … | … | … |
| 96 | 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96 | 155 | reich |
| 98 | 1, 2, 7, 14, 49, 98 | 72 | arm |
| 99 | 1, 3, 9, 11, 33, 99 | 56 | arm |

Die kleinste reiche Zahl ist 12 und die größte reiche Zahl ist 96.

Eine Primzahl ist nur durch 1 und durch sich selbst teilbar. Die Summe der echten Teiler beträgt also immer 0. Also handelt es sich immer um ganz arme Zahlen.

Olympiadeaufgabe 480714

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Aufgabe, die in der Mathematik-Olympiade nur in der ersten Runde, der Hausaufgabenrunde, gestellt werden kann. Für eine Bearbeitung unter den engen Zeitvorgaben einer Klausur ist sie nicht geeignet. Sie kann aber gut in einer AG gestellt werden. Auch wenn die Schülerinnen und Schüler kein Programm zur Bestimmung von Teilern erstellen, sollte doch bei der Bearbeitung ein Taschenrechner verwendet werden.

Die Bestimmung der Teilermengen kann man auch durch ein fertiges Programm aus dem Internet erledigen lassen. Zwei mögliche Programme werden unter den Adressen

<http://www.mathepower.com/teilermenge.php> oder

<http://www.mathe24.net/teilermenge.html>

angeboten.

Bei dem systematischen Vorgehen zur Bestimmung von Teilermengen aus der Primfaktorzerlegung sind kombinatorische Überlegungen hilfreich.

**Aufgabe:**

Der griechische Philosoph Pythagoras (geb. um 570 v. Chr., gest. um 496 v. Chr. ) entdeckte Zahlen, die „*befreundet*“ sind. Ihre spezielle mathematische Eigenschaft ist, dass die Summe der Teiler der einen Zahl die jeweils andere Zahl ergibt.

Das von ihm gefundene Paar ist .

Die Zahl 220 ist teilbar durch 1, 2, 4, 5, 11, 20, 22, 44, 55 und 110,

und es gilt .

Die Zahl 284 hat die Teiler 1, 2, 4, 71, 142, und es gilt .

Beachte, dass im Gegensatz zur heute üblichen Definition „*Die natürliche Zahl heißt Teiler der natürlichen Zahl genau dann, wenn es eine natürliche Zahl gibt, so dass gilt*.“ Pythagoras den Fall ausgeschlossen hat. Er hat also die Zahl selber nicht als Teiler angesehen.

Ein weiteres Paar von „befreundeten“ Zahlen ist und wurde erst 1636 vom französischen Mathematiker Pierre de Fermat (geb. 1601, gest. 1665) entdeckt. Bis Mitte des 19. Jahrhunderts wurden etwa 60 Paare „befreundeter“ Zahlen gefunden; das zweitkleinste Paar erst 1866 von einem 16jährigen italienischer Schüler. Inzwischen kennt man Hunderte derartiger Zahlen. Bisher ungelöst ist das Problem: Gibt es unendlich viele solcher Paare?

1. Überprüfe, dass das von Fermat gefundene Paar (17296; 18416) tatsächlich die genannten Bedingungen erfüllt.
2. Ermittle das zweitkleinste Paar „befreundeter“ Zahlen, wenn du als zusätzliche Voraussetzung verwenden darfst, dass die Zahlen zwischen 1150 und 1250 liegen.

**Lösungshinweise:**

1. Will man die Teilermengen der Zahlen bestimmen, empfiehlt es sich, zunächst die Primfaktorzerlegung zu ermitteln.

Es ist . Man kann den Faktor 2 gar nicht, einmal, zweimal, dreimal oder viermal verwenden, um einen Teiler zu bilden. Die beiden anderen Faktoren kann man gar nicht oder einmal verwenden.

Das ergibt insgesamt Teiler der Zahl 17296. Darunter ist dann aber auch die Zahl selber, so dass man 19 Teiler betrachten muss, um die Summe zu bilden.

Die Teiler sind  
 .

Es gilt: .

Es ist . Mit analogen Überlegungen wie oben erhält man 9 Teiler, die für die Summe relevant sind:

.

Es gilt .

1. Das Paar lautet (1184 , 1210).

Es gilt

und .

Eine Liste der ersten 108 befreundeten Zahlen findet man unter der Adresse   
<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/vollkzahlen.html>.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, dass in dieser Aufgabe die echten Teiler einer Zahl und zusätzlich der Teiler 1 berücksichtigt werden, die Zahl selber als Teiler jedoch nicht.

In der originalen Olympiadeaufgabe findet sich zusätzlich der Hinweis: „*Du darfst zur Lösung dieser Aufgabe ein Computerprogramm entwickeln, mit dem du deine Ergebnisse überprüfen kannst. Natürlich kannst du auch erst ein Programm entwickeln und damit die beiden Teilaufgaben a) und b) lösen*.“

Dieser Hinweis wurde hier weggelassen. In der Situation einer Arbeitsgemeinschaft wird die Entwicklung eines Programms nur in seltenen Fällen realisierbar sein. Die Lösung von Aufgabenteil b) ist für Einzelpersonen sehr zeitintensiv selbst unter Einbeziehung der oben erwähnten Programme zur Teilermengenbestimmung. Wenn man dieses Problem wirklich angehen möchte, wird das nur arbeitsteilig möglich sein. Hier hat die Arbeitsgemeinschaft die Möglichkeit, eine effektive Teamarbeit zu organisieren.

Olympiadeaufgabe 360732

In dieser Aufgabe werden symmetrische Zahlen erklärt. Ein anderer gebräuchlicher Begriff dafür ist auch Palindromzahl. Der einführende Aufgabenteil ist sehr einfach und dient dazu, sich mit dem neuen Begriff vertraut zu machen. Anschließend werden Anteile berechnet. Dazu müssen Anzahlen von symmetrischen Zahlen mit einfachen kombinatorischen Methoden ermittelt werden. Im letzten Aufgabenteil geht es um Mustererkennung.

**Aufgabe:**

Eine Zahl soll *symmetrisch* heißen, wenn ihre Zifferndarstellung von rechts gelesen ebenso lautet, wie von links. Dabei soll stets auch die 0 als Anfangsziffer mit berücksichtigt werden. So sind z. B. 15251 und 037730 *symmetrische* Zahlen.

1. Ein vierstelliger Tageskilometerzähler in einem Pkw zeigt 0163. Bestimme die letzte vorausgegangene und die nächstfolgende *symmetrische* Zahl, die der Zähler zeigt.
2. Ermittle die Anzahl aller vierstelligen *symmetrischen* Zahlen.
3. Bestimme den Anteil aller fünfstelligen *symmetrischen* Zahlen an der Gesamtheit der fünfstelligen Zahlen.
4. Gib in einer Tabelle die entsprechenden Anteile bei zwei-, drei- … bis siebenstelligen Zahlen an.

Stelle eine Vermutung über eine Gesetzmäßigkeit und bestimme auf Grund deiner Vermutung die entsprechenden Anteile bei 32-, 33- und 34-stelligen Zahlen.

**Lösungshinweise:**

1. Die letzte vorausgegangene Zahl symmetrische Zahl war 0110, die nächstfolgende ist 0220.
2. Um alle vierstelligen symmetrischen Zahlen zu finden, kann man die erste und die zweite Ziffer jeweils beliebig wählen, die dritte und vierte Ziffer ist dann jeweils eindeutig festgelegt (nämlich gleich der zweiten bzw. ersten Ziffer). Daher gibt es insgesamt 10 ∙ 10 = 100 vierstellige symmetrische Zahlen.
3. Entsprechend kann man bei fünfstelligen Zahlen, um alle symmetrischen zu finden, die ersten drei Ziffern jeweils beliebig wählen.

Der Anteil an allen 100000 fünfstelligen Zahlen ist daher (10 ∙ 10 ∙ 10)/100000 = 1/100.

1. Man erhält die in der untenstehenden Tabelle gezeigten Anteile für die Stellenzahlen 2 bis 7. Daraus lässt sich die Vermutung ableiten:

Der Anteil ist stets eine Zahl mit folgenden Werten :

Ist die Stellenzahlen gerade so ist ; ist die Stellenzahl ungerade so ist .

Hiernach ergeben sich die weiteren in der Tabelle genannten Anteile.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Stellenzahl | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | … | 32 | 33 | 34 |
| Anteil symmetrischer Zahlen |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Olympiadeaufgabe 440836

Die Kurzschreibweise einer Zahl mit der Ziffernfolge in der Form ist in dieser Aufgabe, aber auch in weiteren Aufgaben dieses Moduls hilfreich. Auch die Übertragung in eine Schreibweise als Summe von Zehnerpotenzen ist nützlich. Für beides steht eine Erklärung im Dokument „<Besondere_Zahlen_Schreibweisen.docx>“ zur Verfügung.

Bei der Lösung der Aufgabe muss eine vollständige Fallunterscheidung durchgeführt werden. Die Herausforderung liegt dabei wie immer bei Fallunterscheidungen in der Vollständigkeit.

**Aufgabe:**

Eine Zahl soll *mysteriös* heißen, wenn sie dreistellig ist, und sie selbst, ihr Dreifaches und ihr Fünffaches alle Ziffern von 1 bis 9 genau einmal enthalten.

Ermittle alle *mysteriösen* Zahlen.

**Lösungshinweise:**

Da die 9 Ziffern in den drei Zahlen genau einmal enthalten sein sollen, muss auch das Fünffache der mysteriösen Zahl dreistellig sein.

Für die mysteriöse Zahl gilt: , , , wobei die Ziffern 1 bis 9 genau einmal vorkommen.

Da , ist , also ist .

endet mit 0 oder mit 5, 0 kommt nach Aufgabenstellung nicht vor, also ist .

Damit muss ungerade sein, denn sonst wäre , also ist .

Diese Möglichkeiten werden einzeln untersucht.

Angenommen, . Dann ist .

Wäre nun eine gerade Zahl, so wäre . Damit käme die Ziffer 1 mehrfach vor.

Wäre nun eine ungerade Zahl, so wären und oder und . In beiden Fällen kämen Ziffern mehrfach vor.

Angenommen, . Dann würde das Dreifache auf die Ziffer 1 enden, sie käme mehrfach vor.

Angenommen, . Das Dreifache endet dann auf die Ziffer 7, also .

Wäre nun eine ungerade Zahl. Alle ungeraden Zahlen bis auf die 3 sind bereits als Ziffern vergeben. Damit wären und , und wiederum käme die Ziffer 1 mehrfach vor.

Damit muss eine gerade Zahl sein.

Für gibt es nur noch die Möglichkeiten 129, 149, 169 oder 189.Alle Möglichkeiten werden der Reihen nach durchprobiert:

, , .

, .

, .

, .

Bis auf kommen immer Ziffern mehrfach vor, oder die 0 ist dabei. Damit ist 129 die einzige mysteriöse Zahl.

Olympiadeaufgabe 370724

Die Aufgabe betrachtet Zahlen, deren Quersumme gleich dem Querprodukt ist. Im ersten Teil sind nur Zahlen mit dieser Eigenschaft zu finden. Das dürfte mit mehr oder weniger Suchaufwand von allen Schülerinnen und Schüler zu leisten sein.

Im zweiten Teil kommt es darauf an, die vierstelligen Zahlen der Größe nach systematisch zu durchsuchen. Das sollte eine bekannte Strategie sein.

In der dritten Teilaufgabe führt wiederum die Strategie des systematischen Probierens zum Ziel.

Die vierte Teilaufgabe erfordert eine indirekte Beweisführung und eine vollständige Fallunterscheidung. Sie ist damit die anspruchsvollste Teilaufgabe.

In der Olympiadeaufgabe sind die letzten beiden Teile der Aufgabe in anderer Reihenfolge angegeben. Die Reihenfolge wurde hier geändert, da so eine bessere Schwierigkeitsprogression gegeben ist.

**Aufgabe:**

Eine natürliche Zahl werde genau dann eine „QP-Zahl“ genannt, wenn ihre Quersumme gleich dem Produkt ihrer Ziffern ist.

1. Nenne je eine zweistellige und eine dreistellige „QP-Zahl“.
2. Ermittle die kleinste vierstellige „QP-Zahl“.
3. Ermittle alle Möglichkeiten, für und Ziffern so einzusetzen, dass die Zahl eine „QP-Zahl“ ist. Dabei bedeute die Schreibweise , dass die Zahl mit den Ziffern in dieser Reihenfolge geschrieben wird.
4. Beweise, dass es keine vierstellige „QP-Zahl“ gibt, unter deren Ziffern die 5 vorkommt.

**Lösungshinweise:**

1. Eine (die einzige) zweistellige „QP-Zahl“ ist die . Denn es gilt .

Eine dreistellige „QP-Zahl“ ist die . Denn es gilt .

1. Die kleinsten vierstelligen Zahlen beginnen mit der Ziffernfolge . Alle vierstelligen Zahlen, die eine unter ihren Ziffern haben, sind keine „QP-Zahlen“. Denn ihre erste Ziffer, also auch ihre Quersumme ist positiv, das Produkt ihrer Ziffern aber ist .

Die nächst kleineren vierstelligen Zahlen haben die Form . Alle Zahlen von dieser Form sind keine „QP-Zahlen“. Denn es gilt .

Nun werden die Zahlen der Form untersucht. Man stellt fest, dass , und keine „QP-Zahlen“ sind. ist jedoch eine „QP-Zahl“, denn .

Da alle vierstelligen Zahlen der Größe nach untersucht wurden, ist die kleinste vierstellige „QP-Zahl“.

1. Genau dann sind und Ziffern, mit denen eine „QP-Zahl“ ist, wenn

,

d. h. gilt. In der Tabelle wird der Reihe nach zu jedem untersucht, ob es ein passendes gibt.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Gleichung |  |
| 0 |  |  |
| 1 |  |  |
| 2 |  | , keine ganze Zahl |
| 3 |  | keine ganze Zahl |
| 4 |  | keine ganze Zahl |
| 5 |  | keine ganze Zahl |
| 6 |  | keine ganze Zahl |
| 7 |  |  |
| 8 |  | keine ganze Zahl |
| 9 |  | keine ganze Zahl |

Damit gezeigt, dass es zwei Möglichkeiten gibt, eine „QP-Zahl“ der gewünschten Form zu bilden: oder .

1. Angenommen, es gäbe eine vierstellige „QP-Zahl“, deren vier Ziffern und sind.   
   Dann wäre , also .   
   Die Zahl auf beiden Seiten dieser Gleichung wäre also einerseits ein Vielfaches von, andererseits nicht größer als .

Hierfür kommen folgende Fälle in Frage:

Fall 1: . Das führt auf , also den Widerspruch .

Fall 2: .Dann ist . Die einzige Darstellung von als Produkt dreier natürlicher Zahlen ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren aber , und dies führt auf die von verschiedene Summe . Dieser Fall hat damit auf Widerspruch geführt.

Fall 3: . Dann ist . Einzige Darstellungen: , Summe , Widerspruch.

Fall 4: . Dann ist . Einzige Darstellungen:  
, Summe bzw. , Widerspruch.

Fall 5: . Dann ist . Einzige Darstellung:, Summe , Widerspruch.

Fall 6: , . Einzige Darstellungen: , Summe bzw. , Widerspruch.

Damit ist die Annahme, es gäbe eine vierstellige „QP-Zahl“, in der eine Ziffer vorkommt, widerlegt.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Zur Lösung des schwierigen Aufgabenteiles d) ist eine indirekte Argumentation erforderlich. Hier wird in der Regel eine Hilfe der Lehrkraft erforderlich sein. Mögliche Impulse sind:

* Bei der Berechnung von Quersumme und Querprodukt kommt es nicht auf die Reihenfolge der Ziffern an.
* Nimm an, die Zahl würde die Ziffer 5 und drei weitere Ziffern enthalten. Beschreibe diese Zahl durch einen allgemeinen Ausdruck. Dabei kannst du dich an der Aufgabenstellung c) orientieren.
* Gib einen allgemeinen Ausdruck für die Summe und das Produkt der Ziffern an.
* Überlege, wie groß die Summe der Ziffern maximal werden kann.
* Probiere alle möglichen Ziffernsummen der Reihe nach durch.

Olympiadeaufgabe 510814

Bei der Lösung dieser Aufgabe ist die Teilbarkeitsregel für 11 hilfreich, die im regulären Unterricht im Normalfall nicht vorkommen wird. Die Aufgabe kann aber auch durchaus ohne die Kenntnis dieser Regel erfolgreich bearbeitet werden.

Es kann nicht schaden, wenn in einer AG Inhalte angesprochen werden, die über den Unterricht hinausgehen. Die Begründung der Teilbarkeitsregel ist für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler von Interesse. Wenn der Einsatz dieser den Schülerinnen und Schülern unbekannten Teilbarkeitsregel durch die Lehrkraft gewünscht wird, muss sie zuvor besprochen werden. Das kann im Unterrichtsgespräch geschehen. Es ist aber auch möglich, den Schülerinnen und Schülern ein Hilfeblatt anzubieten, dass sie zunächst selbständig bearbeiten. Ein Hilfeblatt steht im Dokument „<Besondere_Zahlen_510814_Hilfe.docx>“ zur Verfügung.

In der Olympiadeaufgabe werden die betrachteten Zahlen *Palindromzahlen* genannt. Der Begriff wurde hier aus Gründen der Einheitlichkeit ersetzt durch den Begriff *symmetrische Zahlen*, da dieser Begriff in einer anderen Aufgabe des Moduls bereits verwendet wurde.

**Aufgabe:**

Eine *symmetrische Zahl* ist eine Zahl mit folgender Eigenschaft: Liest man die Zahl von links nach rechts, so ergibt sich dieselbe Zahl wie beim Lesen von rechts nach links. Die Zahl 615516 ist eine *symmetrische Zahl*. Die Zahl 415 ist keine *symmetrische Zahl*, denn wenn man sie von rechts nach links liest, ergibt sich 514.

1. Beweise: Eine sechsstellige *symmetrische Zahl* ist immer durch 11 teilbar.
2. Beweise: Wenn man alle sechsstelligen *symmetrische Zahlen* durch 11 dividiert, dann sind mindestens 10 % dieser Quotienten fünfstellige *symmetrische Zahlen*.
3. Untersuche: Gibt es mehr sechsstellige *symmetrische Zahlen*, die bei der Division durch 11 keine fünfstellige *symmetrische Zahl* ergeben, als solche, bei denen sich eine fünfstellige *symmetrische Zahl* ergibt?

**Lösungshinweise:**

1. Eine sechsstellige *symmetrische Zahl* hat die Form

. Dabei ist .

Zusammenfassen liefert

.

Die Lösung wird einfacher bei Benutzung der Teilbarkeitsregel:

Die alternierende Quersumme ist .

1. Es sollte zunächst untersucht werden, bei welchen Zahlen das Ergebnis der Division durch 11 einfach zu bestimmen ist. An Beispielen sieht man, dass das dann der Fall ist, wenn in der zu dividierenden Zahl immer zwei gleiche Ziffern aufeinanderfolgen.   
     
   Deshalb kann für die *symmetrische Zahl* , sofort angegeben werden, dass .

Da es bei einer sechsstelligen *symmetrische Zahl* für die erste Ziffer 9, für die zweite und dritte Ziffer je 10 Möglichkeiten gibt, gibt es genau (9 ∙ 10 ∙ 10 = ) 900 verschiedene sechsstellige *symmetrische Zahlen*.

Bei (9∙1∙10 = ) 90 sechsstelligen *symmetrischen Zahlen* stimmen die erste und zweite Ziffer überein. Wegen 90 : 900 = 0,1 sind folglich 10% der sechsstelligen *symmetrischen Zahlen* von der Form .

Wegen und erhält man aus diesen *symmetrischen Zahlen* bei der Division durch 11 stets eine fünfstellige *symmetrische Zahl*. Folglich erhält man für mindestens 10% der sechsstelligen *symmetrischen Zahlen* bei der Division durch 11 eine fünfstellige Symmetrische Zahl.

1. Aus der Betrachtung einiger Beispiele kann man eine Lösungsidee gewinnen.

*symmetrische Zahl*

keine *symmetrische Zahl*

keine *symmetrische Zahl*

Man kann vermuten, dass der Quotient keine *symmetrische Zahl* ist, wenn die erste Stelle der sechsstelligen Zahl größer ist als die zweite.

Diese Vermutung soll nachgewiesen werden.

Angenommen, die *symmetrische Zahl* ergäbe bei Division durch 11 die *symmetrische Zahl* . Man betrachtet den üblichen Algorithmus der schriftlichen Multiplikation.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

In der letzten Stelle sieht man, dass . An der zweiten Stelle von links darf es keinen Übertrag geben damit ist, also . An der vorletzten Stelle muss damit gelten .

Da aber ist, ist dann , also die zweite Stelle nicht kleiner als die erste.

Es ist nun zu zählen, wie viele symmetrische Zahlen es gibt mit der Bedingung .

Die Ziffer kann aus der Menge gewählt werden. Ist gewählt, kann nur noch aus der Menge gewählt werden. Für sind alle 10 Ziffern möglich. Damit gibt es *symmetrische Zahlen* mit dieser Bedingung.

Da in Teil b) schon die Gesamtzahl der *symmetrischen Zahlen* bestimmt wurde, muss nun noch mindestens eine *symmetrische* sechsstellige Zahl gefunden werden mit , die bei Division durch 11 keine *symmetrische Zahl* ist. Ein derartiges Beispiel ist die Zahl .

Somit gibt es mindestens 451 sechsstellige *symmetrische Zahlen*, die bei Division durch 11 keine *symmetrische Zahl* ergeben. Also gibt es mehr sechsstellige *symmetrische Zahlen*, die bei Division durch 11 keine *symmetrische Zahl* ergeben als solche, bei denen sich eine fünfstellige *symmetrische Zahl* ergibt.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Ohne die Vorüberlegung über die Zahlen, die durch 11 leicht zu dividieren sind, ist die Lösung des Aufgabenteils schwierig. Daher empfiehlt sich an dieser Stelle der Einsatz einer Hilfestellung. Eine Möglichkeit steht in der Datei „<Besondere_Zahlen_510814b_Hilfe.docx>“ zur Verfügung.

Olympiadeaufgabe 530842

Obwohl diese Aufgabe in einer Bundesrunde der Mathematik-Olympiade gestellt wurde, sind die hier angebotenen Aufgabenteile nicht übermäßig schwierig. Eine gewisse Herausforderung sind die Abschätzungen in Aufgabenteil c). Abschätzungen werden die meisten Schülerinnen und Schüler bis zu dieser Stellen noch nicht durchgenommen haben.

**Aufgabe:**

Eine Zahl heiße *unglücklich*, wenn sie eine positive ganze Zahl ist, die gleich dem Dreizehnfachen ihrer Quersumme ist.

1. Begründe, dass es keine zweistelligen *unglücklichen* Zahlen gibt.
2. Ermittle alle dreistelligen *unglücklichen* Zahlen.
3. Untersuche, ob es *unglückliche* Zahlen gibt, welche mehr als 3 Stellen haben.

**Lösungshinweise:**

1. Unglückliche Zahlen sind nach Definition durch 13 teilbar. Zu jedem zweistelligen Vielfachen von 13 wird die Quersumme berechnet und dann geprüft, ob das Dreizehnfache der Quersumme gleich der Zahl ist.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Vielfaches von 13 | Quersumme | Dreizehnfache Quersumme |
| 13 | 4 | 52 |
| 26 | 8 | 104 |
| 39 | 12 | 156 |
| 52 | 7 | 91 |
| 65 | 11 | 143 |
| 78 | 15 | 195 |
| 91 | 10 | 130 |

Da in der ersten und dritten Spalte keine Übereinstimmungen sind, gibt es keine unglücklichen zweistelligen Zahlen.

1. Die dreistellige Zahl wird untersucht. Wenn sie unglücklich ist, gilt

.

Das kann umgeformt werden zu oder nach Division durch 3 zu

.

Da und maximal den Wert 9 haben können, kann maximal den Wert 45 haben. Deshalb muss sein.

Systematisch werden alle Werte von überprüft.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1 | 4 | 25 |
| 2 | 8 | 21 |
| 3 | 12 | 17 |
| 4 | 16 | 13 |
| 5 | 20 | 9 |
| 6 | 24 | 5 |
| 7 | 28 | 1 |

Die Fälle oder müssen nicht mehr untersucht werden, da dann .

Damit sind nur noch die Zahlen 117, 156, 195 möglich. Für jede dieser Zahlen kann leicht nachgeprüft werden, dass sie mit dem Dreizehnfachen ihrer Quersumme übereinstimmt.

1. Betrachtet wird die -stellige Zahl mit . Wenn es sich um eine unglückliche Zahl handelt, muss gelten

oder

.

Da die Ziffern höchstens den Wert 9 haben, ist .

Da die Zahl -stellig ist, ist und somit . Damit ist die ganze linke Seite .

Somit kann die Gleichung nicht erfüllt sein, und es gibt keine unglücklichen Zahlen mit mehr als 3 Stellen.