**Weiterführung der Methode des systematischen Probierens (Jahrgänge 7/8)**

Systematisches Probieren ist nicht nur in den Jahrgängen der Erprobungsstufe ein probates Mittel, um Aufgaben zu lösen, für die noch kein Rechenverfahren zur Verfügung steht. Auch in den weiter­füh­renden Jahrgangsstufen ist oftmals die Methode des systematischen Probierens eine sinnvolle Lö­sungs­strategie, vor allem, wenn durch die Nebenbedingungen nur eine begrenzte Anzahl an Bele­gungs­­möglichkeiten für eine der Unbekannten zur Verfügung steht. Dies ist naturgemäß dann am ehe­sten der Fall, wenn die Definitionsmenge im Bereich der natürlichen Zahlen liegt. Aber auch in an­de­ren Fällen kann man davon profitieren, wenn man in der ersten Lösungsfindungsphase diese Me­tho­de zumindest in Betracht zieht.

# Olympiadeaufgabe 450842

Um den Nachweis zu erbringen, dass selbst sehr schwierige Aufgaben mit der Methode des syste­ma­ti­schen Probierens gelöst werden können, soll am Anfang dieses Kapitels eine Aufgabe der 8. Jahrgangs­stufe aus der 4. Runde – also der Deutschlandrunde – der Mathematik-Olympiade stehen. Die Schwie­rigkeit von Aufgaben der vierten Runde ist im Regelfall so hoch, dass sie nur für einige wenige Schülerinnen und Schüler überhaupt angreifbar sind. Im Folgenden wird aber gezeigt, dass eine komplexe Aufgabe mit relativ elementaren Mitteln auch von Schülerinnen und Schülern in einer Arbeitsgemeinschaft ge­löst werden kann. Trotzdem ist bei dieser Aufgabe kaum zu erwarten, dass selbst in einer AG die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe selbständig lösen können. Daher wird empfohlen, diese Aufgabe im geleiteten Unterrichtsgespräch zu bearbeiten. Dabei können die Schülerinnen und Schüler mit Strategien zur Reduktion der Vielzahl von Möglichkeiten vertraut gemacht werden.

Alternativ ist es möglich, die Aufgabe an das Ende der Sequenz zu setzen und mit der zweiten Aufgabe dieses Moduls zu beginnen.

**Aufgabe:**

Drei Mathematiker sitzen am Abend in fröhlicher Runde in einem Biergarten am Waldesrand. Plötz­lich fällt ein Schuss. Sie schauen zur Uhr und kurz darauf sagt einer von ihnen: „Der Schuss fiel genau h Stunden, m Minuten und s Sekunden vor Mitternacht und merkwürdig: , und sind Primzahlen, die der Gleichung genügen.“ Darauf antwortet der zweite: „Auch die Anzahl der vollen Mi­nu­ten bis Mitternacht ist eine Primzahl.“ Und der dritte sagt nach kurzer Prüfung mit dem Ta­schen­rech­ner: „Sogar die Anzahl der Sekunden bis Mitternacht ist eine Primzahl.“

Weise nach, dass man aus diesen (etwas kuriosen) Angaben eindeutig ermitteln kann, wann die Ma­the­matiker den Schuss hörten, und gib diesen Zeitpunkt an.

**Lösungsvorschlag:**

Für einen ersten Lösungsansatz könnte man aus der Tatsache, dass und natürliche Zahlen zwi­schen 0 und 59 sowie eine natürliche Zahl zwischen 0 und 11 sind, schon eine Tabelle zum sys­te­ma­ti­schen Probieren entwickeln und alle Möglichkeiten testen. Das wird eine so große Anzahl von Möglichkeiten, dass man versuchen sollte noch weitere mehr oder weniger offensichtliche Einschränkungen der möglichen Lösungsmengen beachten. Da eine Prim­zahl ist, können für nur die Werte 2, 3, 5, 7 oder 11 in Frage kommen. Man könnte in einer Arbeitsgemeinschaft auch aus der For­mu­lie­rung, dass die Mathematiker „am Abend“ zusammensitzen, folgern, dass klein ist, also , oder . Für und gelten natürlich durch die Tatsache, dass sie auch Primzahlen sind, ähnliche Einschränkungen, die auf 17 mögliche Werte führen.

Aber selbst diese Einschränkungen eröffnen zusammen mit der Gültigkeit der Gleichung im­mer noch viel zu viele mögliche Lösungen, die jedoch mit einfachen weitergehenden Überlegungen weiter eingeschränkt werden können.

An dieser Stelle werden Impulse durch die Lehrkraft nötig sein:

Impuls 1: Prüfe, ob und beide ungerade sein können.

Impuls 2: Prüfe, ob und beide gerade sein können.

Impuls 3: Prüfe, ob sein kann.

Impuls 4: Begründe, dass durch 3 teilbar sein muss, und finde die möglichen Werte für .

Man kann relativ einfach den Fall ausschließen, dass und beide ungerade sind. Wäre das näm­lich der Fall, wäre die Summe gerade. Da die linke Seite der Glei­chung aber nur dann gerade ist, wenn gerade ist, muss dann sein. Wegen ist dann , also und . Für diesen Fall ergäbe sich die mögliche Uhrzeit des Schusses als 20 Uhr 56 Minuten 58 Sekunden. Daraus er­geben sich aber volle Minuten bis Mitternacht, wodurch der Angabe des zweiten Ma­the­matikers, dass diese Anzahl eine Primzahl wäre, nicht erfüllt ist.

Dann folgt aber aus dieser Gleichung , dass entweder oder gelten muss. Beide zu­gleich können natürlich nicht gleich 2 sein, da die Gleichung nicht in natürlichen Zahlen lösbar ist.

Auch der Fall lässt sich relativ einfach ausschließen. Wenn das gelten würde, wäre die Anzahl der vollen Minuten bis Mitternacht , was durch 2 teilbar ist und damit für kein eine Primzahl ist. Damit muss sein, was auch der Aussage „am Abend“ am besten entspricht.

Die letzte Einschränkung vor Beginn der Phase des systematischen Probierens kann jetzt noch für die An­zahl der Minuten gemacht werden. Da mit die Gleichung gelten muss, muss durch 3 teilbar sein. Aufgrund der vorab gemachten Einschränkungen für kommen hier nur noch die Zahlen 7, 13, 19, 31, 37 oder 43 in Frage.

Jetzt bietet sich eine Tabelle für eine Phase des systematischen Probierens an.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | volle Minuten bis 24.00 Uhr | volle Sekunden bis 24.00 Uhr |
| 2 | 7 | 3 | 120+7=127 | 127∙60+3=7623=3∙2541 |
| 2 | 13 | 5 | 120+13=133=7∙19 |  |
| 2 | 19 | 7 | 120+19=139 | 139∙60+7=8347=17∙491 |
| 2 | 31 | 11 | 120+31=151 | 151∙60+11=9071=47∙193 |
| 2 | 37 | 13 | 120+37=157 | 157∙60+37=9433 (Primzahl) |
| 2 | 43 | 45=3∙15 |  |  |

Um nachzuweisen, dass 9433 eine Primzahl ist, muss man wegen zeigen, dass 9433 durch keine der Primzahlen kleiner 100 teilbar ist.

Damit ergibt sich nur für , und , dass die Maßzahlen der Zeit von Mitternacht in Stun­den, Minuten und Sekunden sämtlich Primzahlen sind. Daraus folgt: Der Schuss wurde um 21.22 Uhr und 47 Sekunden von den drei Mathematikern gehört.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Da diese Aufgabe schon recht komplex ist, bietet sich für die 7./8. Jahrgangsstufe keine Ergänzung der Aufgabe an. Man könnte allerdings auch auf eine andere Art und Weise und damit auch mit einer an­deren Tabelle zum systematischen Probieren auf die Lösung der Aufgabe kommen. Diese soll hier kurz skizziert werden. Zum Einsatz in einer Arbeitsgemeinschaft müsste diese allerdings noch deut­lich ausführlicher von und/oder für die Schülerinnen und Schüler aufbereitet werden.

**Lösungsvariante:**

Es seien die Anzahl der Minuten und die Anzahl der Sekunden bis Mitternacht, dann gilt nach Vor­aus­setzung und . Da , und Primzahlen sind, ist und. Da auch und Primzahlen sein sollen, folgt, dass und ungerade sind. Aus der Beziehung folgt dann, dass gerade, also sein muss. Aus erhält man durch Einsetzen von aus der Folge der Primzahlen die folgende Tabelle:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 7 | 19 | 139 (Primzahl) | 8347 (=17∙491) |
| 11 | 31 | 151 (Primzahl) | 9071 (=47∙193) |
| 13 | 37 | 157 (Primzahl) | 9433 (Primzahl) |
| 17 | 49 (=7∙7) |  |  |
| 19 | 55 (=5∙11) |  |  |

Für wird , was nicht möglich ist. Hieraus folgt wieder, dass nur für auch eine Prim­zahl ist. Folglich ergibt sich wieder die einzige mögliche Lösung , und sowie als Uhr­zeit 21.22 Uhr und 47 Sekunden.

# Olympiadeaufgabe 450811

Nun folgt eine deutlich einfachere Aufgabe aus der 1. Runde (der Schul-Olympiade) des Jahres 2005. Es handelt sich um eine Aufgabe, die (natürlich in modernes Deutsch übertragen) sich schon in Leo­nard Eulers Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“ findet. Wenn man die oben vorgestellte erste Auf­gabe vielleicht lieber an den Schluss einer Reihe über systematisches Probieren stellen möchte, bie­tet sich diese Aufgabe als relativ einfache Einstiegsaufgabe an. Auch wenn die Schülerinnen und Schü­ler der AG noch keinerlei Erfahrungen mit der Methode des systematischen Probierens in vor­he­ri­gen Jahrgangsstufen gesammelt haben, ist ein Einstieg mit der folgenden Aufgabe empfehlenswert.

Bereits in der Aufgabenstellung ergibt sich ein Hinweis darauf, dass die Lösung eventuell nicht eindeutig ist.

**Aufgabe:**

Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eier. Die erste sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier immer zu je 8 abzähle, so bleiben 7 übrig.“ Die zweite sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier immer zu je 10 ab­zähle, so bleiben mir auch 7 übrig.“

Un­tersuche, ob sich aus diesen Angaben ermitteln lässt, wie viele Eier jede der beiden Bäuerinnen hat­te. Wenn dies nicht der Fall ist, dann füge eine Bedingung hinzu, damit die Aufgabe eindeutig lös­bar wird.

**Lösungsvorschlag:**

Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass jede der Bäuerinnen mehr als 7 Eier haben muss. Damit sind Zehnerportionen bei der zweiten Bäuerin möglich, aber Achterportionen bei der ersten Bäuerin. Daher wird die Tabelle kürzer, wenn man von der Anzahl der Zehnerportionen ausgeht.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Zehnerportionen | Eier der zweiten Bäuerin | Eier der ersten Bäuerin | 7 Eier weniger | durch 8 teilbar? |
| 1 | 17 | 83 | 76 | nein |
| 2 | 27 | 73 | 66 | nein |
| **3** | **37** | **63** | **56** | **ja** |
| 4 | 47 | 53 | 46 | nein |
| 5 | 57 | 43 | 36 | nein |
| 6 | 67 | 33 | 26 | nein |
| **7** | **77** | **23** | **16** | **ja** |
| 8 | 87 | 13 | 6 | nein |

Die Aufgabe ist demnach nicht eindeutig lösbar, es gibt genau zwei Lösungen:

1. Lösung: Die erste Bäuerin hat 63 Eier, die zweite 37.
2. Lösung: Die erste Bäuerin hat 23 Eier, die zweite 77.

Wenn man etwa verlangt, dass die erste Bäuerin mehr Eier als die zweite hatte, dann wird die Auf­ga­be eindeutig lösbar. Es gibt natürlich auch noch viele andere Bedingungen, mit denen man Ein­deu­tig­keit herstellen kann.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Alleine aus der Aufgabenstellung ergibt sich schon die Notwendigkeit einer sorgfältigen und sys­te­ma­ti­schen Überprüfung aller möglichen Fälle, da die Wahrscheinlichkeit, dass es mehrere Lösungen ge­ben wird, schon angedeutet wird. Trotz der relativ einfachen Struktur bietet sich damit diese Aufgabe – wie oben beschrieben – besser als Einstiegsaufgabe in die Methode des systematischen Probierens an als eine Aufgabe, in der es schon aus Gründen der Aufgabenstellung nur eine einzige Lösung ge­ben kann. Die Schülerinnen und Schüler können an dieser Aufgabe erkennen, dass das Ausprobieren ein­zelner Anzahlen – was sich aufgrund der einfachen Zahlen durchaus anbietet und was natürlich ein erster Weg zur Erkundung der Aufgabe sein sollte – nie zu einer vollständigen Erfassung der Lö­sungs­gesamtheit führen würde, da es natürlich auch mehr als die schlussendlichen zwei Lösungen ge­ben könnte.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Die Gesamtanzahl der Eier kann natürlich beliebig variiert werden, ohne dass die Methode des sys­te­ma­tischen Probierens ihre Wirksamkeit verlieren würde. Auch die Anzahlen der Eier, die die ein­zel­nen Bäuerinnen abzählen, kann mit beliebigen anderen Zahlen durchgeführt werden. Hier bieten sich schö­ne Verallgemeinerungsmöglichkeiten an, die auch zu einer Untersuchung darüber führen kön­nen, wann die entstehende Aufgabe eindeutig lösbar wird bzw. mit welchen Anzahlen sie unlösbar wird.

Man kann diese Aufgabe natürlich auch als diophantische Gleichung ansehen. Dann ergibt sich etwa fol­gendermaßen eine Lösung:

Es seien und die Anzahlen der Eier, die die erste bzw. die zweite Bäuerin hatte. Dann gilt nach Auf­gabenstellung sowie und , also und folglich , wobei und natürliche Zahlen sind.

Diese einfache diophantische Gleichung kann man mit dem relativ bekannten allgemeinen Lö­sungs­ver­fahren für derartige Gleichungen behandeln, für die es im Rahmen dieses sinus-Projektes auch ei­ne Einführung mit geeigneten Aufgaben geben wird. Es ergeben sich schließlich die Lösungen und bzw. und , was zu und bzw. und führt.

# Olympiadeaufgabe 450812

Gleich die nächste Aufgabe aus der 1. Runde der 45. Mathematik-Olympiade bietet sich ebenfalls für die Methode des systematischen Probierens an, auch wenn ihre Struktur zunächst vollkommen ver­schie­den aussieht. Die entstehende systematische Probiertabelle ist sogar in diesem Fall deutlich we­ni­ger komplex, wenn man beachtet, dass man nicht alle betrachteten Fälle wirklich notieren muss.

**Aufgabe:**

Die Zahl 45 ist in vier Summanden zu zerlegen, für die Folgendes gilt: Addiert man zum ersten Sum­man­den 2, subtrahiert man vom zweiten Summanden 2, multipliziert man den dritten Summanden mit 2, dividiert man den vierten Summanden durch 2, so erhält man stets die gleiche Zahl. Wie lauten die vier Summanden?

**Lösungsvorschlag:**

Da nach Aufgabenstellung die folgenden Gleichungen , und gelten, kann man – ausgehend von einem bestimmten Wert für , eine Tabelle aufstellen, die die aus diesen Glei­chun­gen resultierenden Werte für , und enthält.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | Summe |  |
| 6 | 11 | 4 | 16 | 37 < 45 | keine Lösung |
| 7 | 12 | 4,5 | 18 | 40,5 < 45 | keine Lösung |
| **8** | **13** | **5** | **20** | **45** | **Lösung** |
| 9 | 14 | 5,5 | 22 | 49,5 > 45 | keine Lösung |
| 10 | 15 | 6 | 24 | 55 > 45 | keine Lösung |

Wie man sieht (natürlich müsste man dies streng genommen noch nachweisen) ergeben sich für Wer­te von , die kleiner als 8 sind, Summen kleiner als 45 und für Werte von , die größer als 8 sind, Sum­men, die größer als 45 sind. Damit ist die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Natürlich kann diese Aufgabe auch rein algebraisch gelöst werden, wenn man die oben erwähnten Be­stimmungsgleichungen nach b, c und d auflöst und die Werte in die Gleichung ein­setzt. Dann ergibt sich ; und und damit

Daraus folgt und daher . Durch Einsetzen erhält man dann , und . Da nur äqui­valent umgeformt wurde, ist eine Probe aus logischer Sicht nicht erforderlich. Sie erscheint aber durch­aus sinnvoll, um eventuelle Rechenfehler aufzuspüren. Auch die Eindeutigkeit der Lösung ergibt sich aus obigem Rechenweg.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Auch bei dieser Aufgabe kann man sowohl die Ausgangszahl als auch die „Veränderungszahl“ (in die­sem Fall die 2) variieren, um zu sehen, wie sich dann die Lösungsgesamtheit verändert. Hieran wer­den vielleicht hartgesottene Mathematiker Spaß finden, man kann allerdings auch einfach die näch­ste vorgeschlagene Aufgabe bearbeiten.

# Olympiadeaufgabe 500832

Diese Olympiadeaufgabe ist von der Struktur nicht schwerer als die bisher vorgestellten. Sie erfordert aber einen hohen Organisationsgrad, damit alle im Aufgabentext vorliegenden Informationen ge­winn­bringend ausgewertet werden können. Die Aufgabe ist aber – ausgehend von der intuitiv ver­ständ­lichen Aufgabenstellung – gut in verschiedene Arbeitsschritte teilbar, von denen die ersten von den Schülerinnen und Schülern problemlos selbstständig gefunden werden können. Zur Erstellung der Tabelle zum systematischen Probieren kann dann eventuell eine Hilfestellung durch den Lehrer not­wendig werden. Hier kann dann entweder mit den angegebenen Impulsfragen gearbeitet werden, die die leistungsstarken Schü­lerinnen und Schüler nicht unbedingt verwenden müssen. Selbstver­ständ­lich können – wie schon in der ersten Aufgabe dieses Moduls – diese Impulsfragen auch auf Hilfekarten geschrieben werden, so dass eine nicht lehrerzentrierte Bearbeitung der Aufgabe in­ner­halb einer Lerngruppe möglich bleibt.

**Aufgabe:**

Eine Meute Hunde und Katzen hat eine Pizzeria überfallen, um Pizzen zu fressen. Jede Pizza besteht aus zwölf gleich großen Stücken. Der Pizzabäcker berichtet einem Journalisten von dem Vorfall. Er hat vergessen, ob die Hunde jeweils sechs oder sieben Stücke gefressen haben. Auch bei den Katzen ist er sich unsicher, ob es jeweils vier oder fünf Stücke waren. Er weiß nur noch, dass alle Hunde gleich viele Stücke und alle Katzen gleich viele Stücke gefressen haben, dass vier Pizzen für die Meute nicht reichten und dass von der fünften Pizza allerdings etwas übrig geblieben ist.

Ein Gast, der den Überfall gesehen und den Bericht des Pizzabäckers mitangehört hat, bemerkt dazu: „Ich könnte Ihnen die Anzahlen der Hunde und Katzen nennen. Allerdings kann man daraus keine Aus­sage über die Anzahlen der jeweils gefressenen Pizzastücke ableiten: Alle vier Varianten sind noch möglich.“

Weise nach: Aus diesen Informationen lässt sich eindeutig feststellen, wie viele Hunde und wie viele Kat­zen das Restaurant gestürmt haben. Gib die Anzahlen der Hunde und Katzen an.

**Lösungsvorschlag:**

Da vier Pizzen für die Meute nicht reichten, da von der fünften Pizza etwas übrig geblieben ist und da je­de Pizza aus genau zwölf Stücken bestand, muss die Anzahl der gefressenen Pizzastücke zwischen und liegen.

Es bezeichne die Anzahl der Hunde und die Anzahl der Katzen. Dann gelten laut Aufgabenstellung die beiden Gleichungen und , wobei die Mindestanzahl an Piz­za­­stücken und die Maximalanzahl an Pizzastücken, die gefressen wurden, bezeichnet. Da nach Aus­sage des Gastes aus der Anzahl der Hunde und Katzen nicht ermittelt werden kann, wie viele Piz­za­stücke gefressen wurden und damit alle vier Varianten bei einer konkreten Anzahl an Hunden und Katzen möglich bleiben müssen, kann ein Paar , bei dem nur eine einzige der vier möglichen Varianten ausgeschlossen werden kann, keine Lösungsmöglichkeit mehr darstellen. Das wiederum bedeutet, dass ausschließlich die beiden Ober- und Untergrenzen und betrachtet werden müssen und nicht noch zusätzlich die beiden möglichen Mittelwerte bzw. . Wenn demnach eine der beiden Anzahlen und außerhalb des Intervalls [49; 59] liegt, braucht man das betrachtete Paar nicht weiter zu untersuchen.

Bis jetzt wurden die Angaben aus der Aufgabenstellung ausschließlich geschickt zusammengefasst und die eigentliche Lösung vorbereitet, die jetzt mit der Methode des systematischen Probierens er­fol­gen wird. An dieser Stelle wird vermutlich eine Hilfestellung in der Form notwendig werden, dass mög­lichst wenige Fälle untersucht werden müssen.

Hier bieten sich mehrere mögliche Impulsfragen an, die entweder im Unterrichtsgespräch oder als Hilfekarten eingesetzt werden können.

1. Welche Angaben muss eine Tabelle zum systematischen Überprüfen aller möglichen An­zah­len von Hunden und Katzen enthalten, welche sind entbehrlich?

2. Welche Einschränkungen gibt es für die Maximal- bzw. die Minimalanzahl von Hunden und Kat­zen?

3. Entscheide dich, ob du von der Anzahl der Hunde oder von der der Katzen als Start­über­le­gung ausgehen möchtest. Gibt es Gründe, die für die eine oder die andere Möglichkeit spre­chen?

4h. (falls du die Anzahl der Hunde als Startzahl gewählt hast) Wenn du zum Beispiel von einer kon­kreten Anzahl an Hunden ausgehst, wie kannst du durch geeignete Überlegungen die mög­lichen Anzahlen der Katzen, die noch in Frage kommen, möglichst klein halten. Gibt es hier­bei Ober- bzw. Untergrenzen?

4k. (falls du die Anzahl der Katzen als Startzahl gewählt hast) Wenn du zum Beispiel von einer kon­kreten Anzahl an Katzen ausgehst, wie kannst du durch geeignete Überlegungen die mög­li­chen Anzahlen der Hunde, die noch in Frage kommen, möglichst klein halten. Gibt es hierbei Ober- bzw. Untergrenzen?

5. Wann kannst du eine der von dir untersuchten möglichen Anzahlen an Hunden und Katzen als Lösungsmöglichkeit ausschließen?

6. Woran kannst du erkennen, dass deine Lösung eindeutig bestimmt ist?

7. (für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler) Was würde sich an der Lösung ändern, wenn die Äußerung des Gastes nicht in der Aufgabenstellung stehen würde?

Wir gehen von der möglichen Anzahl der Hunde aus () und überprüfen anschließend mit Hil­fe der Gleichungen für und , ob es eine Anzahl von Katzen gibt, so dass die Un­glei­chun­gen für und gelten. Erfüllt für ein konkretes Paar die Ungleichung nicht, dann ist für dieses eine weitere Verringerung von nicht nötig, analog gilt dies auch für und die Ungleichung bei einer Erhöhung von .

Eine nach obigen Einschränkungen vollständige Aufzählung aller Verteilungen zeigt die folgende Ta­bel­le:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | Ungleichungen erfüllt? |
| 1 | 11 | 50 | 62 | nein |
| 1 | 10 | 46 | 57 | nein |
| 2 | 10 | 52 | 64 | nein |
| 2 | 9 | 48 | 59 | nein |
| 3 | 8 | 50 | 61 | nein |
| 3 | 7 | 46 | 56 | nein |
| 4 | 7 | 52 | 63 | nein |
| 4 | 6 | 48 | 58 | nein |
| 5 | 5 | 50 | 60 | nein |
| 5 | 4 | 46 | 55 | nein |
| 6 | 4 | 52 | 62 | nein |
| 6 | 3 | 48 | 57 | nein |
| 7 | 3 | 54 | 64 | nein |
| **7** | **2** | **50** | **59** | **ja** |
| 7 | 1 | 46 | 54 | nein |
| 8 | 1 | 52 | 61 | nein |
| 8 | 0 | 48 | 56 | nein |

Weitere Verteilungen sind nicht möglich, da für gilt. Aus der Tabelle wird ersichtlich, dass es nur eine Verteilung gibt, die alle Bedingungen erfüllt. Aus den gegebenen In­for­mationen lässt sich folglich eindeutig feststellen, dass genau sieben Hunde und zwei Katzen die Piz­zeria überfallen haben.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Natürlich lässt sich die Aufgabe auch aufgrund der beiden gegebenen Ungleichungen so­wie durch algebraische Umformungen lösen. Hierbei sind aber recht aufwändige und trickreiche Ansätze notwendig, auch an einer Fallunterscheidung zwischen geraden und un­ge­ra­den Anzahlen kommt man nicht vorbei. Die Methode des systematischen Probierens ist hier deutlich ele­mentarer, auch wenn man die Schwierigkeit der Aufgabenorganisation nicht unterschätzen sollte. Den­noch erscheinen vor allem die Vorüberlegungen zu und und damit die Ermittlung der gül­tigen Gleichungen sowie der Ungleichungen für diese beiden Größen von allen Schülerinnen und Schü­lern leistbar. Mit der geschickten Wahl einer möglichen Ausgangsgröße wird dann eine voll­stän­di­ge Untersuchung der zu betrachtenden Fälle möglich. Selbstverständlich kann man die gleichen Über­legungen auch durchführen, wenn man statt mit der Anzahl der Hunde mit der der Katzen be­ginnt.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Eine mögliche Erweiterung der Aufgabe besteht darin, die Äußerung des Gastes mit Hilfe der Daten aus der Tabelle genauer zu untersuchen. Wie ändert sich die Lösung der Aufgabe, wenn der Gast die­se Äußerung nicht gemacht hätte? Stimmt die Bemerkung des Gastes, dass wirklich alle vier Va­ri­an­ten noch möglich sind? Kann man die Zahlenangaben in der Aufgabe – sowohl in der Anzahl der ge­fres­senen Pizzastücke als auch in der Anzahl der gefressenen Pizzen - so variieren, dass die Angabe des Gastes nicht mehr notwendig ist, um eine eindeutige Lösung zu erhalten?