Ein besonderer Reiz der folgenden Aufgaben liegt in den sehr offensichtlichen und verblüffenden Beobachtungen sowie auch in den Experimentiermöglichkeiten. Die hier erarbeiteten Aussagen eignen sich zu Verallgemeinerungen und weiterführenden Vermutungen.

Olympiadeaufgabe 380515

# Aufgabe

Klaus schreibt sich aus Langeweile die Zahl 12345679 hin. „Schöne Zahl“, denkt er, „keine Ziffer taucht zweimal auf.“ Dann fängt er an zu multiplizieren. Zunächst multipliziert er die Zahl mit einer einstelligen Zahl und betrachtet das Ergebnis. Dann multipliziert er dieses Ergebnis noch einmal mit 9. „Oh!“ sagt er, und die Langeweile ist verflogen.

1. Welche Entdeckung hat er gemacht?
2. Finde eine Begründung für deine Beobachtungen.
3. Klaus denkt: „Eigentlich ist die Zahl 12345678 noch viel schöner und viel regelmäßiger als die Zahl 12345679,“ und er fängt mit dieser Zahl noch einmal an. Was beobachtet er? Warum?

**Lösungsvorschlag:**

1. Durch Ausprobieren gelangt man zu der Vermutung, dass sein Ergebnis eine neunstellige Zahl ist, die als einzige Ziffer die für die erste Multiplikation ausgewählte einstellige Zahl hat. Diese Vermutung bestätigt sich für jede mögliche einstellige Zahl.
2. Aus der Gleichung 12345679·9=111 111 111 ergibt sich die Begründung sofort.
3. Hier ergibt sich wieder eine verblüffende Auffälligkeit: Die ersten sieben Ziffern sind wie vorher alle gleich der für die erste Multiplikation ausgewählten Zahl. Die letzten beiden Ziffern stellen eine – ggf. mit der Ziffer 0 beginnende – Zahl dar, die genau doppelt so groß wie die Anfangsziffer ist. Die Begründung hierfür ergibt sich sofort aus der Gleichung 12345678·9=111 111 102.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Der Einstieg in die Aufgabe ist nur über Ausprobieren zu finden. Die Beobachtung ist so offensichtlich, dass sie nach wenigen Versuchen bereits sicher zu formulieren ist. Die Begründung ist nicht so offensichtlich. Man kann durch Rückwärtsüberlegen oder durch Ausprobieren auf die Gleichung aus dem Lösungsvorschlag von b) kommen. Die Schwierigkeit liegt in der Vertauschung der Faktoren. Aufgabenteil c) ermutigt zur Weiterführung der Überlegungen: Die Schülerinnen und Schüler versuchen, eigene Aufgaben dieser Art zu finden, z.B. für die Multiplikation mit zweistelligen Zahlen oder zur Erzeugung anderer Muster.

Olympiadeaufgabe 370512

# Aufgabe:

Rico löst die folgenden Aufgaben:

143 · 14= , 143 · 28= , 143 · 42= , 143 · 63= .

Er macht dann einige interessante Beobachtungen.

1. Nenne Beobachtungen, die Rico über die zweiten Faktoren und über die Ergebnisse gemacht haben kann!
2. Versuche, ob sich entsprechende Beobachtungen auch machen lassen, wenn man für den zweiten Faktor geeignete Zahlen größer als 70 wählt!
3. Gibt es zu diesen Beobachtungen eine Begründung, die auch noch auf weitere Produkte zutrifft? Auf welche Produkte? Wie lautet eine solche Begründung?
4. Welches ist der größte dreistellige Faktor, der mit 143 multipliziert ein Ergebnis der Form \*\*0\*\* liefert, worin die Sterne \* für geeignete Ziffern stehen?

**Lösungsvorschlag:**

Vorbemerkung: Die Aufgabenteile a) bis c) grenzen keine eindeutige Antwort ein, sondern regen zum Entdecken an. Die von den Schülerinnen und Schülern gefundenen Lösungen bieten sich zu Gesprächen bezüglich weiterführender mathematischer Einsichten an.

Die in c) verlangte Begründung steht in Abhängigkeit zu den in a) und b) formulierten Beobachtungen.

1. Der zweite Faktor ist immer ein n-faches von 7, wobei n eine der Zahlen 1, 2, ..., 9 ist. Die Zifferndarstellung eines solchen Ergebnisses ist immer von der Form n00n.
2. Wählt man ein n-faches von 7, wobei n eine zweistellige Zahl mit der Zifferndarstellung *ab* ist, so ist das Ergebnis von der Form *ab*0*ab*.
3. Begründung der hier in a) und b) formulierten Beobachtungen: Da 143 · 7=1001 ist, erhält man 143 · 7 · n = 1001 · n. Wenn n ein- oder zweistellig ist, ergibt sich daraus die Beobachtung (ggf. sollten Kinder eine solche Multiplikation einmal schriftlich ausführen, um zu erkennen, dass die Multiplikation von ein- oder zweistelligen Zahlen mit 1001 zu solchen Ergebnissen führt).
4. Die größte Zahl mit der Zifferndarstellung \*\*0\*\* ist 99099. Aus den Vorüberlegungen in a) bis c) ist klar, dass 1001 · 99 = 99099 ist. Damit kann man berechnen:   
   99099 = 1001 · 99 = 143 · 7 · 99 = 143 · 693. Der gesuchte Faktor ist daher 693.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Die Berechnung der vorgestellten Produkte ergibt eine verblüffende Beobachtung, die sich schnell formulieren lässt. Der Zusammenhang zum Vielfachen von 7 wird erst bei genauerer Beobachtung deutlich. Die Aufgabe regt zum Experimentieren an und lässt weitere Beobachtungen zu. Beispielsweise können Schülerinnen und Schüler auch n-fache von 7 wählen, für die n drei- oder höherstellig ist.

Für das Produkt 143 · 6=858 ergibt sich ein Anagramm. Die Untersuchung kann auch in die Richtung gehen, für welche weiteren Faktoren bei der Multiplikation mit 143 Anagramme entstehen können. Weitere Produkte, wie 2244 und 4488 werden Schülerinnen und Schüler zu Fragen anregen. Eine Regelhaftigkeit in diesen Fällen ist allerdings für Schülerinnen und Schüler kaum zu finden. Die Beobachtungen ergeben sich hier also aus dem Experimentieren mit den Produkten. Auch der Begründungsansatz kann experimentell gefunden werden, wenn z. B. das Produkt aus 143 und 7 gebildet wird.

Olympiadeaufgabe 420632

**Aufgabe:**

Wähle drei von Null verschiedene Ziffern. Bilde aus jeweils 2 dieser Ziffern eine zweistellige Zahl. Schreibe alle Zahlen auf, die sich so bilden lassen. Nun addiere alle diese Zahlen. Teile diese Summe durch die Summe der drei von dir am Anfang gewählten Ziffern. Wetten, dass du stets dasselbe Ergebnis erhältst!

1. Wie lautet dieses Ergebnis?
2. Warum ist das immer so?

**Lösungsvorschlag:**

1. 22
2. Mit jeweils zwei der drei fest gewählten, von Null verschiedenen Ziffern kann man in folgender Weise zweistellige Zahlen bilden: Jede dieser Ziffern wird als Zehnerziffer mit jeder der beiden anderen Ziffern als Einerziffer kombiniert. Auf diese Weise erhält man 6 zweistellige Zahlen. Dabei kommt jede dieser Zahlen zweimal als Einer und zweimal als Zehnerziffer vor. Die Summe dieser zweistelligen Zahlen ist daher das 22–fache der Summe aus den drei anfangs gewählten Ziffern.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Um zur korrekten Beobachtung zu gelangen, müssen die Schülerinnen und Schüler zunächst alle zweistelligen Zahlen der beschriebenen Art vollständig finden und summieren. Führt man die Prozedur für unterschiedliche Zifferntripel aus, ist die Beobachtung verblüffend. Die Begründung ergibt sich beim systematischen Notieren der Summanden sehr natürlich. Auch in dieser Aufgabe liegen weiterführende Fragen nahe: Was ergibt sich für vier Ziffern oder wenn man dreistellige Zahlen bildet? Viele weitere Fragen sind denkbar.