Spielstände

**Aufgabe 1 (Känguru-Wettbewerb 1998)**

Im Semifinale eines Basketballturniers spielt die Mannschaft A gegen Mannschaft B und Mannschaft C gegen Mannschaft D. Die Gewinner des Semifinales spielen dann um den 1. und 2. Platz, die Verlierer um den 3. und 4. Platz.

Wie viele Turnier-Endstände sind möglich? Liste sie auf.

**Aufgabe 2 (Känguru-Wettbewerb 1998)**

Vier Fußballteams spielten in einem Wettbewerb jeder gegen jeden genau einmal. Der Sieger bekam 3 Punkte, bei Unentschieden gab es 1 Punkt für jedes Team. Am Ende waren die Punktergebnisse 5, 3, 3, 2.

Wie viele Unentschieden gab es bei diesem Turnier? Begründe deine Antwort.

Hinweis: Wenn du einen Hinweis brauchst, benutze die Hilfekarten 2.1 und 2.2!

**Aufgabe 3 (Mathematik-Olympiade, Aufgabe 360512)**

Drei Fußballvereine A, B und C tragen ein Turnier aus, bei dem jeder Verein genau einmal gegen jeden der beiden anderen Vereine spielt. Die Punkteverteilung erfolgt so:

Jeder Verein bekommt …

für jedes gewonnene Spiel 3 Punkte

für jedes verlorene Spiel 0 Punkte

für jedes unentschiedene Spiel 1 Punkt

1. Wie viele Spiele werden insgesamt in dem Turnier gespielt und welche sind es?
2. Wie viele Spiele insgesamt gibt es bei einem entsprechenden Turnier mit vier (mit fünf, mit sechs, mit n) Vereinen?
3. Xaver, Yvonne und Zacharias sprechen über den Tabellen-Endstand des Turniers mit den Vereinen A, B und C. Alle sind unterschiedlicher Meinung. Kann der Tabellen-Endstand des Turniers mit den Vereinen A, B und C wie folgt aussehen?

|  |  |
| --- | --- |
| Xaver behauptet: | |
| Verein | Punkte |
| A | 6 |
| B | 3 |
| C | 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| Yvonne behauptet: | |
| Verein | Punkte |
| A | 4 |
| B | 1 |
| C | 2 |

|  |  |
| --- | --- |
| Zacharias behauptet: | |
| Verein | Punkte |
| A | 2 |
| B | 2 |
| C | 2 |

Stelle für jede der drei Behauptungen fest, ob sie einen möglichen Endstand angibt. Begründe deine Feststellungen.

**Aufgabe 4 (Mathematik-Olympiade, Aufgabe 360522)**

Vier Fußballvereine A, B, C und D tragen ein Turnier aus, bei dem jeder dieser Vereine gegen jeden anderen genau einmal spielt. Die Punkteverteilung erfolgt so:

Jeder Verein bekommt …

für jedes gewonnene Spiel 3 Punkte

für jedes verlorene Spiel 0 Punkte

für jedes unentschiedene Spiel 1 Punkt

1. Welche Werte kann die Summe aller derjenigen Punkte annehmen, die in einem solchen Turnier vergeben werden? Nenne alle diese Werte und begründe, dass es alle sind.
2. Bei einem solchen Turnier wurde der folgende Tabellen-Endstand erreicht:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Verein | A | B | C | D |
| Punkte | 9 | 4 | 3 | 1 |

Gib für jedes einzelne Spiel des Turniers einen möglichen Spielausgang so an, dass dieser Endstand zustande kommen konnte. Gib dabei für jedes Spiel den Gewinnerverein, den Verliererverein bzw. die Information, dass das Spiel unentschieden ausging, an!

1. Bei einem anderen solchen Turnier war 14 die Summe aller derjenigen Punkte, die in dem Turnier vergeben wurden. Außerdem ergab sich im Endstand:
   * A erhielt mehr Punkte als B,
   * B mindestens so viele Punkte wie C,
   * C mindestens so viele Punkte wie D.

Gib auch hierzu für jedes einzelne Spiel einen Spielausgang so an, dass ein derartiger Tabellen-Endstand zustande kommen konnte!

Hinweis: Wenn du einen Hinweis brauchst, benutze die Hilfekarte 2.1!

**Aufgabe 5 (Mathematik-Olympiade, Aufgabe 360532)**

Sieben Fußballvereine trugen ein Turnier aus, bei dem jeder dieser Vereine gegen jeden anderen genau einmal spielte. Die Punkteverteilung erfolgt so:

Jeder Verein bekommt …

für jedes gewonnene Spiel 3 Punkte

für jedes verlorene Spiel 0 Punkte

für jedes unentschiedene Spiel 1 Punkt

1. Wie viele Spiele wurden in diesem Turnier gespielt?
2. Nach dem Turnier behauptet Franz: „Der Siegerverein hat genau 17 Punkte.“

Fritz meint: „Das kann nicht stimmen.“

Zeige, dass Fritz recht hat!

1. Die (richtige) Tabelle am Ende des Turniers ergibt 52 als Summe der Punkte aller sieben Vereine. Wie viele von allen Spielen wurden gewonnen?
2. Zeige, dass am Ende eines Turniers die Summe der Punkte aller sieben Vereine nicht 41 sein kann!

**Aufgabe 6 (Mathematik-Olympiade, Aufgabe 380514)**

Nach einem Kniffelspiel vergleichen Gabi, Jana, Martin und Stefan ihre Punktezahlen und stellen folgendes fest:

1. Stefan erreichte mehr Punkte als Martin.
2. Die Mädchen haben zusammen genauso viele Punkte wie die beiden Jungen zusammen.
3. Gabi und Stefan haben zusammen weniger Punkte erzielt als Jana und Martin zusammen.

Wer ist Erster geworden, wer Zweiter, wer Dritter und wer Vierter?

**Aufgabe 7 (Mathematik-Olympiade, Aufgabe 370631)**

Andreas, Birgit und Claudia trugen ein kleines Schachturnier untereinander aus. Folgendes ist bekannt:

1. Jeder spielte gegen jeden die gleiche Anzahl von Spielen.
2. Keine Partie endete remis (unentschieden).
3. Andreas gewann genau seiner Spiele.
4. Birgit gewann genau ihrer Spiele.
5. Claudia gewann genau ein Spiel.
6. Wie viele Spiele gewann Andreas, und wie viele gewann Birgit?
7. Ermittle die Anzahl aller Spiele, die in dem Turnier insgesamt gespielt wurden!

Hinweis: Wenn du einen Hinweis brauchst, benutze die Hilfekarten 7.1 und 7.2!

**Hilfekarten zu Aufgabe 2**

**Hilfekarte 2.1**

Die folgende Tabelle kann dir helfen, mögliche Spielausgänge auszuprobieren. Trage in die Zellen immer die für das Spiel vergebenen Punkte ein. Die Punktesumme muss eingehalten werden.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Punkte für … | | | |
| Spiele | A | B | C | D |
| A:B |  |  |  |  |
| A:C |  |  |  |  |
| A:D |  |  |  |  |
| B:C |  |  |  |  |
| B:D |  |  |  |  |
| C:D |  |  |  |  |
| Endstand | 5 | 3 | 3 | 2 |

**Hilfekarte 2.2**

Tipp: Beginne mit den Spielen für Team D. Eine Möglichkeit ist hier schon eingetragen. Versuche, die leeren Felder stimmig auszufüllen. Gibt es noch mehr Möglichkeiten für die unentschiedenen Spiele von D?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Punkte für … | | | |
| Spiele | A | B | C | D |
| A:B |  |  |  |  |
| A:C |  |  |  |  |
| A:D | 1 |  |  | 1 |
| B:C |  |  |  |  |
| B:D |  | 1 |  | 1 |
| C:D |  |  |  |  |
| Endstand | 5 | 3 | 3 | 2 |

**Hilfekarten zu Aufgabe 7**

**Hilfekarte 7.1**

Tipp: Überlege, welche Anzahl von Spielen ein einzelner Spieler mindestens gespielt hat, wenn die Bedingungen 3 und 4 erfüllt sind.

**Hilfekarte 7.2**

Die Anzahl der Spiele, die jeder Spieler gespielt hat, ist ein Vielfaches von 12. Begründe!