##### **Vorbemerkungen zum Modul**

Die Zerlegung in Primfaktoren ist im Kernlehrplan nicht mehr als verpflichtender Unterrichtsstoff vorgesehen. Betrachtet man die Primzahlen jedoch als „Atome des Zahlensystems“ lohnt sich eine Auseinandersetzung mit diesen Zahlen sehr.

Um die Auseinandersetzung mit den Primzahlen zu motivieren oder auch zu wiederholen, kann man den Schülerinnen und Schülern das Sieb des Eratosthenes vorstellen.

**Vorübung** Sieb des Eratosthenes

Zeichne ein 10 x 10 – Quadratgitter und trage die Zahlen von 1 bis 100 ein.

1. Streiche die 1 durch.
2. Kreise die 2 ein. Streiche danach alle Vielfachen von 2 in dem Quadratgitter.
3. Kreise die 3 ein. Streiche danach alle Vielfachen von 3 in dem Quadratgitter.
4. Verfahre nun mit der nächsten Zahl wie in c) usw.

Alle eingekreisten Zahlen sind Primzahlen.

Eine weitere Vorübung kann die Zerlegung einiger Zahlen in Primfaktoren sein.

Olympiadeaufgabe 530721

Aufgabe 1 knüpft unmittelbar an die Kenntnis der Primzahlen unter 100 an. Erforderlich sind die Strategien des systematischen Arbeitens und der Fallunterscheidung. Wichtig ist ebenfalls, dass überprüft wird, ob die gefundene Lösung wirklich die einzige ist.

**Aufgabe:**

In der Klausur der 2. Stufe der Mathematik-Olympiade können maximal 40 Punkte erreicht werden. Paula ist an ihrem Ergebnis sehr interessiert und fragt ihren Mathematik-Lehrer. Dieser antwortet:

1. „Ein Teiler deiner Gesamtpunktzahl ist eine Mirpzahl“
2. „Wenn du die Quersumme deiner Gesamtpunktzahl verdoppelst und 7 addierst, erhältst du auch eine Mirpzahl.“

Zeige, dass aus diesen Angaben Paulas Gesamtpunktzahl eindeutig bestimmt werden kann, und gib diese Gesamtpunktzahl an.

Hinweis: Eine Mirpzahl ist eine Primzahl, die eine andere Primzahl ergibt, wenn man die Ziffern von rechts nach links liest. Folglich ist 13 die erste Mirpzahl. Liest man das Wort „mirp“ von rechts nach links, so erhält man das Wort „prim“. Im Englischen heißen solche Zahlen „emirp“, da das englische Wort für „prim“ das Wort „prime“ ist.

**Lösungshinweis:**

Für die Punktzahl von Paula gilt nach Voraussetzung .

Nach (1) gilt , wobei eine positive ganze Zahl ist und eine Mirpzahl.

Deshalb ist , da das die einzigen Mirpzahlen kleiner oder gleich 40 sind.

Betrachtet werden nun alle Vielfachen dieser Zahlen , die noch kleiner oder gleich 40 sind. Das sind

13, 26, 39 als Vielfache von 13;

17, 34 als Vielfache von 17;

31, 37.

Für jede dieser Zahlen wird nun das um 7 vermehrte Doppelte der Quersumme gebildet und auf die Mirp-Eigenschaft überprüft:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Zahl | Quersumme | Verdoppelt | Vermehrt um 7 | Mirpzahl? |
| 13 oder 31 | 4 | 8 | 15 | Keine Primzahl |
| 26 oder 17 | 8 | 16 | 23 | Primzahl, aber 32 keine Primzahl |
| 39 | 12 | 24 | 31 | Mirpzahl |
| 34 | 7 | 14 | 21 | Keine Primzahl |
| 37 | 10 | 20 | 27 | Keine Primzahl |

Somit beträgt die Punktzahl von Paula 39.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Bei der Lösung ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler die Definition der Mirpzahl genau lesen. Es ist wichtig, dass die umgedrehte Zahl eine andere Zahl ist, somit ist 11 keine Mirpzahl.

Listen von Mirpzahlen findet man im Internet zum Beispiel unter <https://oeis.org/A006567> oder

<http://www.t-ocker.de/zahlen/mirpzahlen.html>. Es ist nicht bekannt, ob es unendlich viele solcher Zahlen gibt. Die größte bekannt wird unter <http://www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_020.htm> angegeben.

### Mögliche Erweiterungen der Aufgabe:

Leistungsfähige Schülerinnen und Schüler können versuchen, systematisch Mirpzahlen zu finden. Dabei müssen nicht alle Primzahlen durchforscht werden. Bei den zweistelligen Zahlen kann man alle Zahlen ausschließen, deren Zehnerziffer gerade ist, da die umgedrehte Zahl immer durch 2 teilbar ist. Ebenso kann es im Fünfzigerbereich keine Mirpzahlen geben.

Unter der Adresse http://www.mathematische-basteleien.de/primzahl.htm findet man eine auf den ersten Blick überraschende Eigenschaft. Ob eine Zahl Miprzahl ist oder nicht, hängt vom Stellenwertsystem ab. Auch das ist für interessierte Schülerinnen und Schüler eine lohnende Forschungsaufgabe.

Mirpzahlen unter 100 sind im Dualsystem

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| (1011)2 = 11   (1101)2 = 13   (10111)2 =23  (11101)2 =29 | (100101)2 = 37  (101001)2 = 41   (101011)2 = 43  (101111)2 = 47 | (110101)2 = 53  (111101)2 = 61  (1000011)2 = 67  (1000111)2 = 71 | (1010011)2 = 83  (1100001)2 = 97  . |

Olympiadeaufgabe 400814

Diese Aufgabe thematisiert im ersten Teil eine Strategie zur Überprüfung einer Zahl auf die Primzahleigenschaft. Diese Strategie ist für fast alle der nachfolgenden Aufgaben hilfreich.

Die allgemeine Ziffernschreibweise einer Zahl und die Bestimmung des Wertes daraus wurden bereits im Modul „Besondere Zahlen“ benötigt. Wenn erforderlich, kann an dieser Stelle das Informationsblatt „[Besondere\_Zahlen\_Schreibweisen.docx](../Besondere_Zahlen/Besondere_Zahlen_Schreibweisen.docx)“ aus dem früheren Modul noch einmal eingesetzt werden.

**Aufgabe:**

1. Sven hat ein schlechtes Gedächtnis und kennt die Folge der Primzahlen nur bis zur Primzahl 31 auswendig. Er soll die Zahl 813841 in Primfaktoren zerlegen. Dazu steht ihm zwar ein Taschenrechner, aber keine Primzahltafel zur Verfügung. Erkläre, wie Sven die gestellte Aufgabe lösen kann.
2. Sven hat am Lösen solcher Aufgaben Spaß gefunden. Er zerlegt die 813813, die 841841 und weitere sechsstellige Zahlen des Typs in Primfaktoren. Dabei kommt er zu einer Vermutung über Primzahlen, die Teiler von Zahlen dieses Typs sind. Formuliere eine solche Vermutung.
3. Beweise deine Vermutung.
4. Untersuche entsprechende Primzahl-Aussagen zu anderen speziellen Typen sechsstelliger Zahlen, etwa Zahlen des Typs , , .

**Lösungshinweis:**

1. Wenn die Primzahleigenschaft einer Zahl geprüft werden soll, reicht es, die Teilbarkeit durch Primzahlen zu untersuchen. Dabei muss nur so lange geprüft werden, wie das Quadrat der Primzahl kleiner ist als die zu untersuchende Zahl.

Primzahlen bis 31 sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.

Aus den einfachen Teilbarkeitsregeln ergibt sich, dass 813841 weder durch 2 noch durch 3 oder durch 5 teilbar ist.

Eine Teilbarkeitsregel für 7 wird den Schülerinnen und Schülern nicht bekannt sein, daher müssen sie diese Division mit dem Taschenrechner durchführen.

8133841 : 7 = 116263

Nun ist nur noch die Zahl 116263 zu untersuchen. Sie kann nicht durch eine Primzahl kleiner als 7 teilbar sein, denn sonst wäre es die Ausgangszahl auch.

116263 : 7 = 16609

16609 ist nun nicht mehr durch 7 teilbar. Die Prüfung der Teilbarkeit durch 11 bzw. 13 ist negativ. Erst bei 17 ergibt sich

16609 : 17 = 977.

Da ist, muss nur noch versucht werden, 977 durch die Primzahlen 17, 19, 23, 29 und 31 zu teilen. Da sich jeweils keine Teilbarkeit ergibt, ist 977 Primzahl, und die Zerlegung lautet .

1. Mit der Strategie von Teil a) ermittelt man, dass und   
   .

Die Betrachtung weiterer Zahlen legt die Vermutung nahe:   
Alle Zahlen des Typs sind durch 7, 11 und 13 teilbar.

1. Wegen reicht es zu zeigen, dass jede Zahl vom Typ durch 1001 teilbar ist.

Eine Zahl lässt sich im Dezimalsystem schreiben als

.

Damit ist die Vermutung bewiesen.

1. Durch Probieren einiger Beispiele kommt man zu der Vermutung, dass alle Zahlen des Typs   
    durch 11 teilbar sind.

Aus ergibt sich durch Zusammenfassen .

Somit ist 11 ein Teiler von z. Da aber 9091, 910 und 100 teilerfremd sind, ist 11 der einzige Teiler, den alle diese Zahlen haben.

Für gilt ,

also .

Somit sind alle diese Zahlen durch 3, 7, 13 und 37 teilbar.

ist ein Spezialfall von und ist damit durch 7, 11 und 13 teilbar.

### Mögliche Erweiterungen der Aufgabe:

Hier können sich weiterführende Ideen entwickeln, z. B. Zahlen des Typs zu untersuchen.

Olympiadeaufgabe 510835

In dieser Aufgabe geht es um das Finden von drei Primzahlen, die eine bestimmte Gleichung lösen sollen. Zur Lösung der Aufgabe sollten die Schülerinnen und Schüler als Vorübung die Primzahlzerlegung kennen lernen bzw. wiederholen.

Außerdem müssen die Schülerinnen und Schüler in dieser Aufgabe Fallunterscheidungen zur Lösung einer Aufgabe anwenden und mathematisch argumentieren.

Die Aufgabe ist zwar in einer Landesrunde der Klasse 8 gestellt worden, kann aber gut von Schülerinnen und Schülern der Klasse 7 bearbeitet werden, zumal in der Arbeitsgemeinschaft in der Regel ein Rechner benutzt werden kann, um bei größeren Zahlen die Primzahleigenschaft schnell zu überprüfen. In jedem Fall ist es hilfreich, wenn die Schülerinnen und Schüler wissen, dass sie die Teilbarkeit nur durch Primzahlen bis zur Wurzel aus der zu überprüfenden Zahl untersuchen müssen.

**Aufgabe:**

Ermittle alle geordneten Tripel von Primzahlen , und , welche die Gleichung   
 erfüllen und für die gilt .

**Lösungshinweis:**

Die Primfaktorzerlegung von 1683 lautet: .

Damit sind drei Fälle für die Primzahl möglich.

Fall 1, :

Dann ist . Da 561 eine ungerade Zahl ist, kann sie als Summe nur einen geraden und einen ungeraden Summanden haben. Also sind und . Wegen ist aber keine Primzahl.

Fall 2, :

Dann ist . Die Zahl 153 ist wiederum in einen ungeraden und einen geraden Summanden zu zerlegen: . Da 151 eine Primzahl ist, erfüllt das Tripel (11, 2, 151) die Bedingung.

Fall 2, :

Dann ist . Wegen der Zerlegung erfüllt das Tripel (17, 2, 97) die Bedingung.

Somit gibt es zwei Zahlentripel, die die Aufgabe lösen: (11, 2, 151) und (17, 2, 97).

Olympiadeaufgabe 400735/350835

In Aufgabe 4 kommen Primzahlzwillinge zum Einsatz. Hier können die Schülerinnen und Schüler z. B. noch einmal auf das Sieb des Eratosthenes zurückgreifen und alle Primzahlzwillinge unter 100 finden. Sie könnten aber auch im Internet recherchieren, was es über Primzahlzwillinge zu wissen gibt. Im Anschluss geht es um den Beweis der Teilbarkeit einer Summe, bei dem der Umgang mit Variablen gezeigt bzw. erarbeitet werden kann.

Die Teile der Aufgabe stammen aus zwei unterschiedlichen Olympiadeaufgaben und wurden hier miteinander kombiniert.

**Aufgabe:**

Zwei Primzahlen und heißen Primzahlzwillinge, wenn für sie gilt. Es seien und Primzahlzwillinge, und es gelte .

1. Gib mindestens drei Primzahlzwillinge an.
2. Überprüfe an den Beispielen aus Teil (1), dass die Summe aus den Primzahlzwillingen und der Zahl, die zwischen ihnen steht, durch 18 teilbar ist.
3. Beweise, dass die Summe aus , und der Zahl, die zwischen ihnen steht, stets durch 18 teilbar ist.
4. Beweise, dass das Produkt von und vergrößert um 1 durch 18 teilbar ist.

**Lösungshinweis:**

1. ( 5 , 7 ) ; ( 11 , 13 ) ; ( 17 , 19 ) ; ( 29 , 31 ); ( 41 , 43 ) ; ( 59 , 61 ) ; ( 71 , 73 ) ; ( 101 , 103 ) sind Beispiele für Primzahlzwillinge.
2. Betracht zum Beispiel das zweite Paar: 11 + 12 + 13 = 36 = 2 ∙ 18.

1. Es gilt .   
   Da , ist ungerade, also durch 2 teilbar.  
   Von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer eine durch 3 teilbar. Da und Primzahlen sind, muss das die Zahl sein. Damit ist durch 6 teilbar und durch 18.
2. Es gilt .  
   Wie in Teil (3) wird begründet, dass durch 6 teilbar ist, damit ist durch 36 teilbar und somit auch durch 18.

Olympiadeaufgabe 370841

Aufgabe 5 nutzt die erworbenen Kenntnisse der vorangegangenen Aufgaben zur Lösung.

**Aufgabe:**

Ermittle alle Primzahlen für die folgende Bedingungen gelten

**Lösungshinweis:**

Bis auf 2 sind alle Primzahlen ungerade, also müssen und ungerade Zahlen sein, da sie wegen der Summenbildung auf jeden Fall größer als 2 sein müssen. Damit muss eine der Zahlen oder ungerade sein, denn „gerade + ungerade = ungerade“.

Da gerade ist, muss ungerade sein und gerade. Also ist .

Damit lauten die Bedingungen und . Es folgt, dass , also sind und Primzahlzwillinge. Prüft man die bekannten Primzahlzwillinge, findet man schnell, dass , und eine Lösung ist. Bei allen anderen Primzahlzwillingen findet man bei dieser Überprüfung keine Lösung. Daher liegt die Vermutung nahe, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Zum Beweis werden die Zahlen , und betrachtet. Es sind drei aufeinander folgende ungerade Zahlen. Davon muss eine davon durch 3 teilbar sein. Da alle drei Zahlen Primzahlen seien sollen, muss als die kleinste der Zahlen die Zahl 3 sein.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Von drei aufeinander folgenden Zahlen ist immer eine durch 3 teilbar. Das ist leicht einzusehen, denn in der Dreierreihe ist jede dritte natürliche Zahl durch 3 teilbar. Diese Eigenschaft wurde auch schon in der vorhergehenden Aufgabe genutzt. Die Tatsache, dass von drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen immer eine durch 3 teilbar ist, ist eventuell nicht allen Schülerinnen und Schülern bekannt.

Zur Begründung kann man eine graphische Darstellung nutzen. Der Buchstabe t steht dabei für die Eigenschaft, dass die Zahl durch 3 teilbar ist. In der ersten Zeile steht die Sequenz der aufeinander folgenden Zahlen.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ungerade | gerade | ungerade | gerade | ungerade |
| t | - | - | t | - |
| - | t | - | - | t |
| - | - | t | - | - |

Olympiadeaufgabe 540812

In dieser Aufgabe muss systematisch gearbeitet und durch geeignete Einschränkungen die Zahl der Möglichkeiten reduziert werden. Wenn dabei wie in der Musterlösung nicht äquivalent gearbeitet wird, ist auf jeden Fall eine Probe notwendig. Das sollte den Schülerinnen und Schüler jedoch aus früheren Modulen geläufig sein.

**Aufgabe:**

Ermittle alle Zahlen, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Die Zahl ist eine dreistellige Primzahl.
2. Die erste Ziffer stimmt mit der letzten überein.
3. Die Quersumme der Zahl beträgt 19

**Lösungshinweis:**

Wenn es eine Zahl gibt, welche die gegebenen Bedingungen erfüllt, so ergeben die Bedingungen (1) und (2) für die Darstellung , und Bedingung (3) liefert .

Dabei ist und .

Da eine Primzahl ist, kann a weder gerade noch die Ziffer 5 sein. Damit ergibt sich die Einschränkung .

Da einstellig sein muss, muss sein, also oder .

Zu ergibt sich und zu entsprechend .

Somit kommen höchstens die Zahlen oder als Lösungen in Frage.

Da die Bedingung (1) in der Herleitung nur für die Endziffer von , aber nicht für die Zahl selber berücksichtigt wurde, muss durch eine Probe geprüft werden, ob sie auch erfüllt ist. Tatsächlich sind beide Zahlen Primzahlen.

Alternativ kann man auch in einer Primzahltabelle alle dreistelligen Zahlen suchen, die die Bedingung (2) erfüllen (z. B. unter [www.t-ocker.de/zahlen/primzahlen.html](http://www.t-ocker.de/zahlen/primzahlen.html))und für diese die Bedingung (3) überprüfen. Bei dieser Strategie sind 14 Zahlen zu prüfen.