Rechnen mit Resten

Kongruenzen oder Restklassen sind ein sehr wichtiges Hilfsmittel für die Mathematik, mit denen sich viele Aussagen und Überlegungen über Teilbarkeiten elegant formulieren lassen. Versteht man die grundlegenden Aussagen der Restklassenrechnung, so sind sie ebenfalls ein wichtiges Hilfsmittel, für die Lösungen von Aufgaben, die sich auf Überlegungen zu Teilbarkeiten zurückführen lassen. Zu solchen Aufgaben gehören unter anderem die Frage nach den letzten Ziffern einer sehr großen Zahl oder der Beweis von Teilbarkeitsaussagen, wie den bekannten Teilbarkeitsregeln.

Ein möglicher Einstieg, um die Arbeit mit Restklassen zu motivieren, ist die Weiterführung der Ideen der Kryptographie. In der 5. Klasse wird ein [Modul](../../Projekte_und_Spiele/Caesarscheibe/Caesar_Scheibe_Lehrer.docx) angeboten, in dem die Schülerinnen und Schüler bereits erste Erfahrungen mit dem Themengebiet der Kryptographie anhand der Caesar-Scheibe sammeln können. (Sollten Schülerinnen und Schüler noch keine Erfahrungen mit Verschiebe-Chiffren gemacht haben, so wäre es sinnvoll an dieser Stelle zumindest einen kleinen Einblick zu geben.) Dabei konnten sie ebenfalls feststellen, dass die Ver- und Entschlüsselung von längeren Texten sehr zeitaufwändig ist, wenn man sie per Hand durchführt. Die Nutzung eines Computerprogrammes erleichtert das Verfahren natürlich enorm, dabei bleibt jedoch die Frage offen, wie der Computer einen Klartext verschlüsseln kann. Die Beantwortung dieser Fragen führt fast automatisch auf die Verwendung von Restklassen.

Die Information im nachfolgenden Abschnitt kann bei Schülerinnen und Schülern, die bereits mit der Caesar-Scheibe intensiv gearbeitet haben, weggelassen werden.

Bei einer Verschiebechiffre schreibt man statt des normalen Buchstabens immer einen nachfolgenden Buchstaben. Dabei ist der Abstand zwischen dem gemeinten Buchstaben (Klartext) und dem tatsächlich geschriebenen Buchstaben (Chiffre) immer gleich. Für die Caesar-Chiffre ist dieser Abstand zum Beispiel 3. Statt eines A wird also ein D geschrieben. Dies führt für die letzten drei Buchstaben des Alphabetes jedoch zu Problemen, da dort keine Buchstaben mehr folgen. Hier ist es nötig wieder am Anfang des Alphabetes wieder zu beginnen. Das heißt, statt des Buchstaben X wird der Buchstabe A geschrieben usw..

Die nachfolgenden Teile sind für alle Schülerinnen und Schüler wichtig.

Für die Einleitung ist es dabei zunächst sinnvoll im Unterrichtsgespräch gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern zu thematisieren, welchen Nutzen es hat, eine neue Rechenmethode bzw. Schreibweise im Kontext der Kryptographie einzuführen. Ein möglicher Einstieg ist hierbei der Verweis auf die Unterstützung von Computern bei der Ver- und Entschlüsselung längerer Texte.

Ein Computerprogramm kann Buchstaben nicht verschieben. Im Hintergrund arbeiten Computer immer mit Zahlen. Das heißt, es ist nötig den Buchstaben zunächst Zahlen zuzuordnen.

Die folgende Tabelle gibt eine mögliche Zuordnung Buchstabe -> Zahl an. Die Verwendung der Ziffer 0 für den ersten Buchstaben A ist im Prinzip völlig willkürlich, hat jedoch den Sinn, dass man später leichter mit Restklassen arbeiten kann.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

Eine Verschiebechiffre kann man nun umsetzen, indem jede Zahl mit einem festen Summanden addiert wird. Im Fall der Caesar-Chiffre wäre dieser Summand die Zahl 3. Es würde sich dann die Zuordnung

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |

ergeben.

Da die Zahlen 26, 27 und 28 in der ersten Zuordnung aber nicht vorkamen und wir bereits festgestellt haben, dass bei der Caesar-Chiffre das X zu einem A wird, können wir die Zuordnung auch durch die Tabelle

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 0 | 1 | 2 |

ausdrücken.

Mit einer Folie, die die tabellarische Darstellung der Zuordnung zeigt, kann man den Schülerinnen und Schülern die Auswirkung der Addition verdeutlichen. (Alle Zahlen werden um drei Spalten nach links verschoben, also werden die ersten drei Zahlen hinten im Alphabet in die entstandene Lücke wieder eingefügt.) Die Vorlage „<Folienvorlage_Verschiebechiffre.docx>“ steht dafür zur Verfügung.

Anschließend können die Schülerinnen und Schüler einmal selbstständig für weitere Verschiebungen die entsprechende Zuordnung Buchstabe-> Zahl erstellen.

Eine Vorlage für die Tabellen findet sich als Aufgabe 1 auf dem Schülerarbeitsblatt.

***Aufgabe 1:***

*Fülle die tabellarische Darstellung für eine Verschiebung um 5 und 8 Buchstaben aus.*

*Verschiebung um 5 Buchstaben*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Verschiebung um 8 Buchstaben

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Lösungsvorschlag:**

Verschiebung um 5 Buchstaben:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Verschiebung um 8 Buchstaben:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Offensichtlich werden jedes Mal nur die Zahlen zwischen 0 und 25 verwendet, da es nicht mehr Buchstaben gibt. Das heißt, dass statt der eigentlichen Summe jedes Mal nur der Rest der Summe bei der Division durch 26 betrachtet wird, weil es keine größere Zahl als 25 geben kann und man anschließend wieder bei 0 anfangen soll.

An dieser Stelle ist es möglich, gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Schreibweise mit den Kongruenzen einzuführen.

Wenn zwei Zahlen der gleichen Restklasse bezüglich eines gegebenen Moduls angehören, dann nennt man sie kongruent. Man schreibt

Und spricht „ ist kongruent modulo “.

Das heißt die Zahlen und lassen bei Division durch m den gleichen Rest.

Die Zahl wird auch der Modul genannt.

Man kann auch vorerst auf die formale Schreibweise verzichten und diese erst nach Bearbeitung von Aufgabe 4 einführen. Der Begriff Modul muss allerdings erklärt werden, da er für Aufgabe 4 benötigt wird.

***Aufgabe 2:***

*Bestimme durch eine Addition, zu welchem Buchstaben das E wird, wenn man das Alphabet um 13, 23 bzw. 34 Stellen verschiebt.*

**Lösungsvorschlag:**

Im Klartext wird dem E die Ziffer 4 zugeordnet. Es muss nun also nur noch die Addition bezüglich des Moduls 26 ausgeführt werden.

Die Zahl 17 steht im Alphabet für das O. Also wird das E zu einem O.

Auf gleiche Weise ergibt sich bei der Verschiebung um 20 bzw. 34 Stellen

Das E wird dann zu B bzw. zu I.

Eine ebenso gute und sinnvolle Lösungsmethode ist die Verwendung der Verschiebetabellen aus der vorherigen Aufgabe bzw. einfaches Abzählen der Buchstaben. Die formalisierte Schreibweise ist von den Schülerinnen und Schülern an dieser Stelle nicht zu erwarten.

Die Methode des Rechnens mit Resten ist allerdings nicht nur für Verschiebechiffren sinnvoll, sondern auch ein bedeutendes Hilfsmittel für verschiedene andere Aufgabenstellungen. Dazu ist es notwendig sich genauer mit der Struktur von Restklassen und auch der Schreibweise zu beschäftigen.

Die Schülerinnen und Schüler sollen zunächst anhand ihrer bisherigen Beobachtungen mit der Verschiebechiffre den Begriff der Restklasse kennenlernen.

***Aufgabe 3:***

*Alle Zahlen können entsprechend des Restes, den sie bei Division durch 26 lassen, geordnet werden. Ergänze die Tabelle.*

|  |  |
| --- | --- |
| *Rest* | *Zahlen mit dem gleichen Rest bei Division durch 26* |
| *0* | *0; 26; 52; 78; …* |
| *1* | *1; 27; 53; 79; …* |
| *2* | *2; 28; 54; 80; …* |
| *3* |  |
| *…* |  |
| *24* |  |
| *25* |  |

**Lösungsvorschlag:**

|  |  |
| --- | --- |
| Rest | Zahlen mit dem gleichen Rest bei Division durch 26 |
| 0 | 0; 26; 52; 78; … |
| 1 | 1; 27; 53; 79; … |
| 2 | 2; 28; 54; 80; … |
| 3 | 3; 29; 55; 81; … |
| … | … |
| 24 | 24; 50; 76; … |
| 25 | 25; 51; 77; … |

***Aufgabe 4:***

*Die Zahlen, die bei der Division bezüglich eines gegebenen Moduls (s. o.) den gleichen Rest lassen, gehören einer Restklasse an. Man kann eine solche Einteilung auch für die Division durch andere Zahlen verwenden.*

*Erstelle eine entsprechende Tabelle für die Restklassen bei der Division durch 3, 5 und 9.*

**Lösungsvorschlag:**

Unter den Repräsentanten einer Restklasse sind alle Zahlen zu verstehen, die einer Restklasse bezüglich eines bestimmten Moduls *n* angehören. Also alle Zahlen, die bei Division durch *n* den gleichen Rest lassen.

|  |  |
| --- | --- |
| Restklasse | Repräsentanten der Restklassen bezüglich des Moduls 3 |
| 0 | … -6; -3; 0; 3; 6; 9; 12; … |
| 1 | … -5; -2; 1; 4; 7; 10; 13; … |
| 2 | …; -4; -1; 2; 5; 8; 11; 14; … |

|  |  |
| --- | --- |
| Restklasse | Repräsentanten der Restklassen bezüglich des Moduls 5 |
| 0 | …; -10; -5; 0; 5; 10; 15; … |
| 1 | …; -9; -4; 1; 6; 11; 16; … |
| 2 | …; -8; -3; 2; 7; 12; 17; … |
| 3 | …; -7; -2; 3; 8; 13; 18; … |
| 4 | …; -6; -1; 4; 9; 14; 19; … |

|  |  |
| --- | --- |
| Restklasse | Repräsentanten der Restklassen bezüglich des Moduls 9 |
| 0 | …; -18; -9; 0; 9; 18; 27; … |
| 1 | …; -17; -8; 1; 10; 19; 28; … |
| 2 | …; -16; -7; 2; 11; 20; 29; … |
| 3 | …; -15; -6; 3; 12; 21; 30; … |
| 4 | …; -14; -5; 4; 13; 22; 31; … |
| 5 | …; -13; -4; 5; 14; 23; 32; … |
| 6 | …; -12; -3; 6; 15; 24; 33; … |
| 7 | …; -11; -2; 7; 16; 25; 34; … |
| 8 | …; -10; -1; 8; 17; 26; 35; … |

Möglicherweise erkennen die Schülerinnen und Schüler bereits von allein, dass auch negative Zahlen sich in die Restklassen einordnen lassen. Vermutlich muss diese Erkenntnis jedoch motiviert werden. Sinnvoll kann es dabei sein, das Muster der Repräsentanten (immer 3 weiter bei modulo 3) in Gegenrichtung über die 0 hinweg durchführen zu lassen.

Nachdem die Schülerinnen und Schüler die Gemeinsamkeit der Restklassen verstanden haben, ist es möglich, ihnen die formale Schreibweise nahezubringen.

Wenn zwei Zahlen der gleichen Restklasse bezüglich eines gegebenen Moduls angehören, dann nennt man sie kongruent. Man schreibt

Und spricht „ ist kongruent modulo “.

Das heißt die Zahlen a und b lassen bei Division durch m den gleichen Rest.

Mit den bereits erstellten Tabellen ist es leicht möglich, verschiedene Beispiele aufzuführen. Natürlich kann man auch Beispiele für andere Moduln verwenden.

In der Regel nutzt man Kongruenzen um eine Zahl auf ihre Restklasse zu reduzieren und damit spätere Rechnungen zu vereinfachen. Der nächste Schritt im Rechnen mit Resten ist nun zu untersuchen, wie sich die Grundrechenarten bei Kongruenzen verhalten.

***Aufgabe 5:***

*Mit Restklassen ist es auch möglich Grundrechenarten auszuführen. Dies soll am Beispiel des Moduls 5 näher untersucht werden.*

*Wähle dazu zwei verschiedene Zahlen aus und bearbeite mit ihnen die folgenden Aufgaben.*

1. *Bestimme die Reste von zwei Zahlen und addiere dann die Reste.*
2. *Bilde die Summe der beiden Zahlen und bestimme dann den Rest.*
3. *Bestimme die Reste von zwei Zahlen und subtrahiere dann die Reste.*
4. *Bilde die Differenz aus jeweils zwei Zahlen und bestimme dann den Rest.*
5. *Bestimme die Reste von zwei Zahlen und multipliziere dann die Reste.*
6. *Bilde das Produkt aus jeweils zwei Zahlen und bestimme dann den Rest.*
7. *Bestimme die Reste der Zahlen und dividiere dann die Reste.*
8. *Bilde den Quotienten aus jeweils zwei Zahlen und bestimme dann den Rest.*

*Welche Beobachtungen machst du?*

**Lösungsvorschlag:**

In diesem Vorschlag werden die Zahlen 17 und 24 gewählt.

1. Aus 24 und 17 kann kein ganzzahliger Quotient gebildet werden. Es gibt also auch keinen ganzzahligen Rest.

Die Schülerinnen und Schüler können mehrere Zahlen ausprobieren und sollten dabei die Beobachtung machen, dass es bei Addition, Subtraktion und Multiplikation egal ist, ob zuerst die Rechenoperation oder die Bestimmung des Restes ausgeführt wird.

Bei der Division ist dies jedoch nicht möglich. Folglich kann man das Rechnen mit Resten auf die Grundrechenarten mit Ausnahme der Division anwenden.

Die Multiplikation kann noch zu einer Regel für Potenzen erweitert werden.

Wenn und bei Division durch den gleichen Rest lassen, dann lassen auch und den gleichen Rest bei Division durch m.

Beispiel:

Also gilt:

Ein gutes Beispiel für die Anwendung der Grundrechenarten sind Aufgaben zur Zeitrechnung.

***Aufgabe 6 (Zeitrechnung):***

1. *Es ist der 16. November, 16 Uhr. Bestimme die Uhrzeit nach 1000 Stunden.*
2. *Es ist der 1. Januar des Jahres 2017. Bestimme das Datum in 1000 Tagen.*

**Lösungsvorschlag:**



Es ist 8 Uhr morgens.

Der Modul 365 kann an dieser Stelle verwendet werden, da erst 2020 wieder ein Schaltjahr ist.

Es sind 2 Jahre und 270 Tage vergangen. Das heißt in 1000 Tagen ist der 27. September 2019.

Neben der Zeitrechnung sind vor allem Aufgaben, die auf Teilbarkeitsaussagen zurückgeführt werden können, ein guter Anwendungsbereich von Kongruenzen.

***Aufgabe 7:***

*Zeige, dass durch 44 teilbar ist.*

**Lösungsvorschlag:**

Um die Aussage nachzuweisen, kann man natürlich mit einem Taschenrechner arbeiten. Allerdings sind die Zahlen, die vorkommen, sehr groß, so dass sie häufig nicht mehr auf das Display des Taschenrechners passen werden. Einfacher ist dann die Betrachtung über die Reste. Umformuliert in die Modulo-Schreibweise würde die Aufgabe lauten:

Zeige, dass gilt .

Bei dieser Aufgabe ist es sinnvoll, mit negativen Resten zu arbeiten. Die Verwendung der negativen Resten führt in dieser Aufgabe dazu, dass die Potenzen leichter gelöst werden können. Die Potenzierung der Basis -1 ist erheblich leichter, als die Potenzierung der Basis 43. Den Schülerinnen und Schülern sollte dies auch schnell einsichtig sein, da eine Grundidee der Rechnungen mit Restklassen es gerade ist mit möglichst kleinen Zahlen zu rechnen.

Bei dieser Aufgabe ist es sicherlich sinnvoll, wenn die Schülerinnen und Schüler zunächst die Erfahrung machen, dass der Taschenrechner bei der Lösung nicht unbedingt hilfreich ist. Selbst wenn graphikfähige Rechner wie der TI-Nspire in der Lage ist, solche Zahlen vollständig anzugeben, gilt dies für einfachere Rechner, die in der Sekundarstufe I häufig verwendet werden, nicht. Die formale Schreibweise wird für die Schülerinnen und Schüler noch äußerst ungewohnt sein und bedarf der Erklärung.

***Aufgabe 8:***

*Bestimme die letzte Ziffer von .*

**Lösungsvorschlag:**

Auch hier ist der Einsatz eines Taschenrechners nur bedingt von Nutzen, da es, je nach verwendetem Taschenrechner, schwierig ist die letzten Ziffern einer sehr großen Zahl sichtbar zu machen. Selbst wenn der Taschenrechner die letzte Ziffer ausgibt, so bleibt trotzdem die Frage, wie eine solche Aufgabe ohne Rechnereinsatz gelöst werden kann.

Bei der Lösung der Aufgabe bietet es sich an, sich zunächst über die ersten Potenzen von 7 ein Bild zu machen. Vermutlich werden die Schülerinnen und Schüler nicht von alleine auf diese Idee kommen. Daher kann man ihnen an dieser Stelle die Tabelle aus den [Hilfsmitteln](Hilfsmaterial%20Restklassen_Einführung.docx) anbieten.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Exponent | Zahl | Letzte Ziffer (10-er Rest) |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 7 | 7 |
| 2 | 49 | 9 |
| 3 | 343 | 3 |
| 4 | 2401 | 1 |
| 5 | 16807 | 7 |
| 6 | 117649 | 9 |
| 7 | 823543 | 3 |
| … | … | … |

Offenbar wiederholt sich die letzte Ziffer in einer Periode der Länge 4. Ein Nachweis der Korrektheit dieser Beobachtung ist an dieser Stelle nicht unbedingt notwendig. Für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler würde sich hier jedoch die Möglichkeit anbieten diesen Nachweis zu führen. Es stellt sich nun nur noch die Frage, welche Stelle in der gefundenen Periode bei dem gegebenen Exponenten 145 angenommen wird.

Das heißt die letzte Ziffer der Potenz ist die Ziffer 7.

***Aufgabe 9:***

1. *Bestimme die letzten drei Ziffern von*
2. *Bestimme die letzten drei Ziffern von*

**Lösungsvorschlag:**

Zu a):

Bei dieser Aufgabe kann man auf die gleiche Weise wie bei Aufgabe 8 vorgehen. In diesem Fall interessieren jedoch die drei letzten Ziffern, also der 1000-er Rest der Potenzen. Dies ist jedoch erheblich schwieriger als bei Aufgabe 8.

Eine Alternative ist eine Umformung der Potenz.

ist die erste Potenz der 2, die größer ist als 1000. Es gilt .

Mit der Implikation über Potenzen können nun leicht die letzten drei Ziffern der Potenz bestimmt werden.

ist eine Zahl, die durch einen handelsüblichen Taschenrechner schon deutlich besser dargestellt werden kann als .

Andernfalls kann auch weiter zerlegt werden, wobei auch hier bei Zwischenschritten jeweils die 1000-er Reste bestimmt werden.

Über den Zusammenhang kann man die Potenz weiter zerteilen.

Zu b)

Wie bei a) ist auch hier eine Zerlegung der Exponenten angebracht. Das Problem hierbei ist es eine sinnvolle Zerlegung zu finden, die möglichst schnell auf kleine Reste bezüglich des Moduls 1000 führt. Dies kann man durch Ausprobieren herausfinden.

|  |  |
| --- | --- |
| Potenz | mod (1000) |
|  | 187 |
|  | 561 |
|  | 683 |
|  | 49 |

Bei ergibt sich ein zweistelliger 1000-er Rest.

Auf die gleiche Weise kann man sich die Reste der Potenzen zur Basis 49 verdeutlichen. Es gilt

.

Damit ergibt sich . Das heißt die letzten drei Ziffern von sind 001.

***Aufgabe 10:***

*Zeige, dass eine Quadratzahl bei Division durch 4 nur den Rest 0 oder 1 lassen kann.*

**Lösungsvorschlag:**

Da es nur eine endliche Anzahl von Restklassen für jeden Modul gibt, kann man Aussagen über Teilbarkeiten häufig durch eine vollständige Fallunterscheidung beweisen.

Eine Zahl *a* kann bei Division durch 4 nur die Reste 0, 1, 2 und 3 lassen.

|  |  |
| --- | --- |
| *Rest von a* | *Rest von* |
| 0 |  |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |

***Aufgabe 11:***

*Zeige, dass die Summe von zwei ungeraden Quadratzahlen niemals eine Quadratzahl sein kann.*

**Lösungsvorschlag:**

Bei dieser Aufgabe kann man sich auf die Aussage von Aufgabe 9 beziehen. Als ungerade Quadratzahlen kommen nur solche in Frage, die nicht durch 4 teilbar sind. Nach Aufgabe 4 müssen sie also bei Division durch 4 den Rest 1 lassen.

Für die Reste von zwei solcher Quadratzahlen gilt bei der Addition dann . Nach Aufgabe 4 kann eine Quadratzahl aber nur den Rest 0 oder 1 lassen. Somit kann die Summe nicht selbst eine Quadratzahl sein.

***Aufgabe 12:***

*Beweise: Ist die Summe von zwei Quadratzahlen durch 3 teilbar, so sind auch die beiden Quadratzahlen durch 3 teilbar.*

**Lösungsvorschlag:**

Wie bei Aufgabe 9 kann auch hier wieder über eine Fallunterscheidung gearbeitet werden.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |

Wenn nun noch die verschiedenen Kombinationen für Summen überprüft werden, so ergibt sich, dass die Summe von zwei Quadratzahlen genau dann durch 3 teilbar ist, wenn die beiden Quadratzahlen durch 3 teilbar sind.

An dieser Stelle kann man sogar die Aussage dahingehend verschärfen, dass auch die Wurzeln der beiden verwendeten Quadratzahlen durch 3 teilbar sein müssen.

***Aufgabe 010833:****Beweise: Die Summe zweier aufeinanderfolgender gerader Zahlen ist nicht durch 4 teilbar.*

(Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Aufgabe aus der dritten Runde der ersten Mathematikolympiade in Deutschland.)

**Lösungsvorschlag:**

Ähnlich wie bei Aufgabe 5 kann auch hier über die Restklasse der Summe argumentiert werden. Bei zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen *a* und *b* muss eine Zahl durch 4 teilbar sein, die andere nicht. Es gilt also und . Für die Summe gilt dann

. Also ist die Summe nicht durch 4 teilbar.

Neben den vorgeschlagenen Aufgaben bieten Kongruenzüberlegungen auch gute Möglichkeiten für die nähere Untersuchung von Teilbarkeitsregeln. Ein ausführliches Skript dazu ist unter <http://www.olympiade-mathematik.de/pdf/saetze/teilb.pdf> zu finden.