In den Aufgaben dieses Moduls geht es um die Anwendung des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck bzw. Viereck. Außerdem wird der Basiswinkelsatz im gleichschenkligen Dreieck benötigt. Die Verwendung von trickreich zu findenden Hilfslinien ist nicht erforderlich.

Die Aufgaben sind im Schwierigkeitsgrad gestaffelt. Zur Wiederholung können die Schülerinnen und Schüler vor der Bearbeitung die angegebenen Fragen beantworten.

Wenn in einer Aufgabe weitere geometrische Sachverhalte hilfreich sind, werden die Schülerinnen und Schüler in einer Teilaufgabe aufgefordert, sich darüber zu informieren.

Zu manchen Aufgaben ist eine DGS-Datei im DynaGeo-Format verfügbar, die den Schülerinnen und Schülern Hilfen bei der Bearbeitung der Aufgaben geben kann. Der Umgang mit der Datei kann jedoch nur Ideen liefern und in keinem Fall den Nachweis ersetzen.

Bei manchen Aufgaben werden zusätzlich gestufte Hilfekarten angeboten.

Bei der Bearbeitung der Aufgaben ist es sinnvoll, die Schülerinnen und Schüler zunächst in Gruppen selbständig arbeiten zu lassen, so dass sie unterschiedliche Ansätze und Ideen miteinander diskutieren können. Hilfen, die zur Lösung der Aufgaben angeboten werden, sollten erst nach einer genügend großen Zeitspanne den Schülerinnen und Schülern gegeben werden, wenn diese wirklich nicht mehr weiterkommen, um sie nicht zu früh auf einen bestimmten Lösungsweg festzulegen.

In der Regel werden zu den Aufgaben Ideen zur Weiterarbeit, Ergänzung oder Variation angeboten.

### **Das solltest Du vor der Bearbeitung der Aufgaben wissen:**

* Was ist ein spitzwinkliges Dreieck?
* Was ist ein gleichschenkliges Dreieck?
* Was ist ein gleichseitiges Dreieck?
* Wie groß ist die Winkelsumme in einem Dreieck?
* Wie erkennt man ein gleichschenkliges Dreieck an den Winkeln?

Alle Dreiecke in den Aufgaben dieses Moduls heißen *ABC*. Die Innenwinkel bei *A, B, C* werden mit  (in dieser Reihenfolge) bezeichnet.

### Olympiadeaufgabe 490713

#### Vorbemerkung für die Hand des Lehrers

Die Formulierung der Aufgabe ist so einfach, dass alle Schülerinnen und Schüler eine Skizze erstellen können. Zur Bestimmung der Winkelgrößen muss in der Skizze ein gleichschenkliges Dreieck identifiziert werden.

**Aufgabe 1 (490713):**

Über ein Dreieck *ABC* ist bekannt:

1. Die Größe des Winkels beträgt 60°.
2. Die Winkelhalbierende von **schneidet die Seite *AB* so in einem Punkt *D*, dass die Strecken *CD* und *BD* gleich lang sind.

Stelle das Dreieck durch eine Skizze dar.

Bestimme die Größe der Winkel **und **.

# **Lösungsvorschlag:**



In der Skizze ist das Teildreieck *CDB* als gleichschenklig zu identifizieren. Daraus ergibt sich, dass im Teildreieck *CDB* der Winkel bei *C* die Größe ** hat.

Da *CD* Winkelhalbierende von ** ist, hat im Teildreieck *ADC* der Winkel bei *C* ebenfalls die Größe **.

Betrachtet wird die Winkelsumme im Dreieck *ABC*:

,

also 

und .

**Anmerkungen zur Aufgaben und zum Einsatz:**

Als erste Hilfe kann bei Schwierigkeiten die Skizze ohne die Eintragung der Winkelgrößen bei *C* vorgegeben werden. Weitere Hilfen stehen als Tipp-Karten in der Datei „<Winkel_im_Dreieck_Hilfe_490713.docx>“ zur Verfügung.

Eine weitere Hilfe bietet die DynaGeo-Datei „<490713_S.geo>“, mit deren Hilfe die Schüler die Eigenschaft der Gleichschenkligkeit erkunden können, indem sie an den Punkten *B* oder *C* ziehen können

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Statt des Wertes 60° lassen sich andere Winkelwerte vorgeben.

Die Werte von ** und ** lassen sich allgemein in Abhängigkeit von ** bestimmen. 

### Olympiadeaufgabe 490723

**Vorbemerkung für die Hand des Lehrers**

Durch die Beschreibung in dieser Aufgabe ist die Zerlegung des Ausgangsdreiecks in zwei Teildreiecke vorgegeben. Das Ausgangsdreieck muss als gleichschenklig erkannt werden. Die rechten Winkel am Fußpunkt des Lotes müssen gefunden werden. Die zusätzliche Schwierigkeit bei dieser Aufgabe besteht darin, dass keine der Winkelgrößen direkt gegeben ist. Daher muss einer der Winkel durch eine Variable bezeichnet werden.

Im Aufgabentext werden die Begriffe „Lot“ und „Fußpunkt“ verwendet. Falls diese den Schülerinnen und Schülern nicht bekannt sind, können sie durch eine Recherche die Bedeutung ermitteln. Alternativ kann der Lehrer helfen.

**Aufgabe 2 (490723):**

Über ein Dreieck *ABC* wird vorausgesetzt:

1. Die Seiten *AC* und *BC* sind gleich lang.
2. Der Fußpunkt des Lotes von *A* auf die Gerade *BC* ist *F* und liegt zwischen *B* und *C*.
3. Der Winkel *FAC* ist um 30° größer als der Winkel *BAF*.



Stelle das Dreieck durch eine Skizze dar.

Bestimme die Größe der Winkel ** und **.

**Lösungsvorschlag:**

Wenn der Winkel im Teildreieck *ABF* bei *A* mit ** bezeichnet wird, hat der Winkel bei *A* im Teildreieck *AFC* die Größe . Damit ist .

Wegen der Gleichschenkligkeit des Ausgangsdreieckes ist .

Betrachtet wird die Winkelsumme im Teildreieck ABF: , also .

Wegen der Gleichschenkligkeit ist  und wegen der Winkelsumme im Ausgangsdreieck .

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Als Hilfe steht die DynaGeo-Datei „<490723_S.geo>“ zur Verfügung. Mit Hilfe dieser Datei können die Schülerinnen und Schüler die einzelnen Winkelgrößen untersuchen. Anschließend sind die Beobachtungen durch geometrische Sätze zu begründen. Die Schülerinnen und Schüler sollten in jedem Fall zunächst die Lösung ohne die Hilfedatei versuchen. Dabei ist eine Diskussion in Kleingruppen empfehlenswert.

**Ergänzungen der Aufgabe:**

Der vorgegebene Wert 30° kann variiert werden.

Es kann untersucht werden, welche Werte als Summand zu ** überhaupt möglich sind.

Die Notwendigkeit der Bedingung über die Lage von *F* zwischen *B* und *C* kann diskutiert werden.

### Olympiadeaufgabe 490732

**Vorbemerkung für die Hand des Lehrers**

In dieser Aufgabe muss der Innenwinkelsatz in drei Dreiecken und in einem Viereck angewendet werden. Hier kommt es auf eine geeignet gewählte Reihenfolge an.

**Aufgabe 3 (490732):**

In einem Dreieck *ABC* hat ** die Größe 50° und ** die Größe 70°. Die Winkelhalbierende von ** schneidet die Seite *BC* im Punkt *D*, und die Winkelhalbierende von ** schneidet die Seite *AB* im Punkt *E*. Der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden wird *F* genannt.

Bestimme die Größen der Innenwinkel des Vierecks *EBDF*.

**Lösung:**

Im Dreieck *ABC* gilt .

Im Dreieck *ABD* hat der Winkel bei *A* die Größe . Damit hat der Winkel bei *D* die Größe .

Analog ergibt sich im Dreieck *CEB* für den Winkel bei *E* die Größe 85°.

Damit sind im Viereck *EBDF* drei Winkel bekannt. Der Winkel bei *F* hat dann den Wert .

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Bei Bedarf können die Schülerinnen und Schüler ein geeignetes DGS-Blatt selber erstellen, wenn sie soweit geübt sind, dass sie eine beim Ziehen stabile Graphik entstehen lassen können.

Weitere Hilfen stehen als Tipp-Karten in der Datei „<Winkel_im_Dreieck_Hilfe_490732.docx>“ zur Verfügung .

### Olympiadeaufgabe 490813

**Vorbemerkung für die Hand des Lehrers**

In dieser Aufgabe wird eine exakte Zeichnung verlangt. Anschließend soll der Messwert mit dem berechneten Wert verglichen werden. Entscheidend ist das Finden von gleichschenkligen Dreiecken. In der Aufgabenstellung wird jedoch die Gleichschenkligkeit noch nicht nahegelegt.

**Aufgabe 4 (490813):**

Wir betrachten ein Rechteck *ABCD* mit dem Diagonalenschnittpunkt *S*. Im Punkt *A* ist die Senkrechte auf *AC* errichtet. Diese schneidet die Verlängerung der Diagonalen *BD* im Punkt *E*.

Außerdem gilt:

1. Die Diagonale *AC* ist 8 cm lang.
2. Die Größe des Winkels *BAC* beträgt 30°.
3. Informiere dich über die Eigenschaften des Diagonalenschnittpunktes in einem Rechteck.
4. Fertige eine exakte Zeichnung der Figur an, die alle Voraussetzungen erfüllt, und ermittle die Länge der Strecke *DE* durch Messung.
5. Ermittle die Länge der Strecke *DE* durch Rechnung.

**Lösungsvorschlag:**

Die Zeichnung legt die Vermutung nahe, dass die Länge von *ED* den Wert 4 cm hat.



Der Winkel *CAD* hat die Größe 90°-30° = 60°.

Da die Diagonalen im Rechteck durch den Schnittpunkt halbiert werden und gleich lang sind, ist das Dreieck *ASD* gleichschenklig. Daher hat Winkel ADS die Größe 60°, und wegen der Winkelsumme hat *ESA* ebenfalls die Größe 60°. Somit ist das Dreieck *ASD* sogar gleichseitig, und *AD* hat die Länge 4 cm.

Wegen der Winkelsumme im Dreieck *EAS* hat der Winkel bei *E* die Größe 30°. Der Winkel *DAE* hat ebenfalls die Größe 90°-60° = 30°. Damit ist das Dreieck *EAS* gleichschenklig mit den gleichlangen Schenkeln *DE* und *AD*. Damit hat *ED* eine Länge von 4 cm.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Da in dieser Aufgabe eine exakte Zeichnung verlangt ist, ist der Einsatz von DGS nicht sinnvoll. Durch die exakte Zeichnung lässt sich die Vermutung, dass die gesuchte Größe gerade die Hälfte der Diagonalenlänge ist, finden.

**Erweiterungen der Aufgabe:**

Besonders leistungsfähige Schülerinnen und Schüler können untersuchen, welche Ergebnisse bei Variation des gegebenen Winkelwertes vorliegen. Dabei stoßen sie auf ein elementargeometrisch nicht lösbares Problem. Die Untersuchung ist möglich mit Hilfe der Dynageo-Datei „<490813_E.geo>“. Die Schülerinnen und Schüler können mit Hilfe dieser Datei den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Winkel *BAC* und der Länge von *ED* untersuchen und durch einen Graphen darstellen.

Nur mit trigonometrischen Methoden, die frühestens am Ende der Sekundarstufe I zur Verfügung stehen, lässt sich finden: .

### Olympiadeaufgabe 430723

**Vorbemerkung für die Hand des Lehrers**

In dieser Aufgabe sind keine konkreten Winkelgrößen gegeben. Somit muss durch die gesamte Aufgabe hindurch mit Variablen gearbeitet werden. Die Dreiecke, in denen gearbeitet wird, müssen erst durch geeignete Hilfslinien gebildet werden. Die Spitzwinkligkeit des Ausgangsdreiecks wird nur im Teil e) benötigt.

Im Aufgabenteil a) sollen die Schüler ihre Kenntnisse über Spiegelungen auffrischen.

**Aufgabe 5 (430723):**

Es sei *ABC* ein spitzwinkliges Dreieck. Im Inneren des Dreiecks wird ein beliebiger Punkt *D* gewählt. Dieser wird sowohl an der Geraden *AB* als auch an der Geraden *AC* gespiegelt. Die Bildpunkte heißen *P* und *Q*.

1. Informiere dich über die Eigenschaften einer Spiegelung:
   * Wie liegen Punkt und Bildpunkt zueinander?
   * Was geschieht mit der Winkelgröße bei einer Spiegelung?
2. Ermittle die Größe des Winkels *PAQ* in Abhängigkeit von **.
3. Ermittle die Größe des Winkels QDP in Abhängigkeit von **.
4. Berechne die Größe von ** für den Fall, dass der Winkel *QDP* doppelt so groß ist wie der Winkel *PAQ.*
5. Untersuche, ob der Winkel *PAQ* doppelt so groß sein kann wie der Winkel *QDP*.

**Lösungsvorschlag:**



Die erforderlichen Hilfslinien sind gestrichelt dargestellt.

Die Gerade *AD* teilt den Winkel ** in zwei Teile **1 und **2.

1. Wegen der Symmetrie bei der Spiegelung hat im Dreieck *AFQ* der Winkel bei *A* ebenfalls die Größe 1. Ebenso hat im Dreieck APE der Winkel bei *A* den Wert **2.  
   Somit hat der Winkel *PAQ* den Wert .
2. Das Dreieck ADF ist wegen der Eigenschaft der Spiegelung rechtwinklig. Daher gilt . In gleicher Weise ist .  
   Also ist .

Zur Bestimmung der Größe von ** kann auch das Viereck *AEDF*, das zwei rechte Winkel enthält, benutzt werden.

1. Aus den Ergebnissen von b) und c) ergibt sich die Gleichung  mit der Lösung .
2. Die Bedingung lässt sich schreiben als  mit der Lösung . Dann ist aber das gegebenen Dreieck nicht mehr spitzwinklig. Daher kann der Winkel *PAQ* nicht doppelt so groß sein wie der Winkel *QDP*.

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Zu dieser Aufgabe stehen Tipp-Karten in der Datei „[Winkel\_im\_Dreieck\_Hilfen\_430723.docx](Winkel_im_Dreieck_Hilfe_430723.docx)“ zur Verfügung.

**Ergänzungen zur Aufgabe:**

Schülerinnen und Schüler können untersuchen, ob die Ergebnisse auch bei gültig sind.

Wenn die Schülerinnen und Schüler eine DGS-Datei zu dieser Aufgabe erstellt haben, sind weitere Erkundungen zum Punkt *D* möglich. Es kann versucht werden die Lage von *D* zu finden, bei der die Summe der Abstände zu den Eckpunkten des Dreiecks minimal ist.

### Olympiadeaufgabe 430733

**Vorbemerkung für die Hand des Lehrers**

Diese abschließende Aufgabe des Moduls ist vor allem in den beiden letzten Teilen sehr anspruchsvoll.

**Aufgabe 6 (430733):**

Von einem Dreieck *ABC* ist bekannt:

1. Die Mittelsenkrechte des Seite *AB* schneidet die Winkelhalbierende von ** in einem Punkt *E* und die Seite *AC* in einem inneren Punkt *F*.
2. Der Winkel *FEA* ist doppelt so groß wie **.
   1. Berechne ** und ** für den Fall, das  gilt.
   2. Berechne ** und ** für den Fall, dass  gilt.
   3. Informiere dich über den Zusammenhang zwischen der Länge einer Seite und der Größe des gegenüberliegenden Winkels.
   4. Beweise, dass unter den genannten Voraussetzungen stets  gilt.

**Lösungsvorschlag:**



Die Betrachtung der Winkel bei *E* liefert . Also im Teil a) und  wegen der Winkelsumme im Dreieck *ABC*.

Im Teil b) ergibt die Betrachtung der Winkelsumme im Dreieck ABC die Gleichung . Kombiniert mit der Gleichung  ergibt sich , also und .

Damit *F* ein innerer Punkt von *AC* ist, muss  sein und damit . Wegen  ist dann  oder , also .

**Anmerkungen zur Aufgabe und zum Einsatz:**

Die Aufgabe beginnt im Teil a) recht einfach. Es werden nur Kenntnisse über Nebenwinkel und die Winkelsumme benötigt. Daraus lassen sich direkt die gesuchten Winkel bestimmen. Im Teil b) ist die Bestimmung nur durch die Kombination zweier Gleichungen möglich.

In Teil d) wird ein Beweis erwartet. Dabei ist außerdem die Aussage erforderlich, dass der größere Winkel der größeren Seite gegenüberliegt. Es ist zu erwarten, dass nur die leistungsstärksten Schülerinnen und Schüler die beiden letzten Aufgabenteile lösen werden. Als Hilfe steht für den Teil d) die Datei „430733\_S.geo“ zur Verfügung.

**Erweiterungen der Aufgabe:**

Die Schülerinnen und Schüler können untersuchen, ob es auch eine untere Grenze für den Wert von ** gibt. Dabei ist ebenfalls der Einsatz der Datei „<430733_S.geo>“ hilfreich.

Es kann untersucht werden, ob es auch Einschränkungen für die Größe des Winkels ** gibt.