Normalverteilung

Erforschung der „Normalität" -- Naturgesetz oder Zufall in der Natur ?

Autoren:
Cornelia Nicksch
Dr. Olaf Noll

Gesamtschule Sophie-Scholl, Remscheid

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial

Kurzbeschreibung

Das Unterrichtsvorhaben führt von der Erforschung der Gesetzmäßigkeiten annähernd normalverteilter Zufallsgrößen zur Normalverteilung. Mit lediglich 2 Parametern (μ und σ) lassen sich viele Phänomene in Natur und Technik beschreiben und analysieren. Die Betrachtung der Analysis der Gauß'schen Glocke führt zur Bedeutung der Parameter für den Verlauf des Graphen.
Das vorgestellte Unterrichtsvorhaben ist laut Lehrplan nur für den **Leistungskurs** geeignet. Grundlegende Fähigkeiten der Schüler mit dem GTR werden vorausgesetzt. Die Fertigkeiten der Schüler den GTR zu bedienen werden dabei automatisch verfeinert.

Mit besonderem Blick auf die Abiturvorbereitungen ist ein gefestigtes Wissen im Bereich der Modellierungskompetenz und im Umgang mit dem Werkzeug GTR außerordentlich wichtig.

Das Unterrichtsvorhaben gliedert sich in 4-5 Sequenzen, die insgesamt ca. 4-5 Unterrichtsstunden á 45 min umfassen (je nachdem, ob Anteile bzw. Übungsaufgaben im Unterricht oder als Hausaufgabe bearbeitet werden).

Übersicht über die Unterrichtssequenzen

	Sequenz	Material	mögl. Arbeitsform	Zeit
1	Untersuchung von selbsterzeugtem Datenmaterial – Darstellung -	Arbeitsblatt 1	Partnerarbeit	45
2	Gauß'sche Dichtefunktion – Eigenschaften – Bedeutung der Parameter	Arbeitsblatt 1 Rückseite	Partnerarbeit	45
3	Vergleich verschiedener Normalverteilungen – Gauß'sche Integralfunktion – Zusammenhänge	Arbeitsblatt 2	Gruppenarbeit	45
4	Übungsaufgaben	Arbeitsblatt3	Einzelarbeit	45
5	evtl. vertiefende Schülervorträge			45

Didaktische Hinweise:

Idealerweise erfolgt das Unterrichtsvorhaben nach Einführung der Binomialverteilung und dem Testen von Hypothesen.

Die Unterrichtseinheit wurde mit dem TI-*n*spire CX CAS erstellt. In der Modelllösung sind auch Lösungshinweise für den TI-*n*spire CX (ohne CAS) enthalten. Es können aber auch andere GTR benutzt werden, wenn unten genannte Funktionalitäten vorhanden sind.

Benötigte Funktionalitäten des GTR

- Tabellenkalkulation
- Zufallszahlen erzeugen
- Histogramme darstellen, Funktionen einzeichnen
- Analysieren von Graphen

Benötigte Vorkenntnisse der Schüler mit dem GTR:

- Kennwerte von Verteilungen ermitteln
- Histogramme aus der Tabellenkalkulation erstellen
- Funktionen (auch mit Parameter) mit dem GTR zeichnen.
- Funktionsuntersuchung (Kurvendiskussion) mit dem GTR

Die Behandlung der Normalverteilung über die Erforschung mit dem GTR bietet einige Vorteile:

- Integrierte Wiederholung: Kennwerte von Verteilungen (Mittelwert, Standardabweichung, Sigmaregeln)
- Festigt das Darstellen von Funktionen (auch mit Parametern) mit Hilfe des GTR
- Kennenlernen der Normalverteilung als universell einsetzbare Methode um viele Phänomene in Natur und Technik nur mit μ und σ zu beschreiben.
- Ermöglicht die Veranschaulichung des Übergangs der Gauß'schen Dichtefunktion zur Gauß'schen Integralfunktion.
- Möglichkeit vertiefender Schülervorträge z.B. :
  - Six-Sigma-Methode, ein Managementsystem zur Prozessverbesserung
  - Risikoquantifizierung, ein wesentlicher Bestandteil des Risikomanagements eines Unternehmens
  - Standardnormalverteilung
  - Satz von de Moivre-Laplace (Stetigkeitskorrektur)
  - Testen mit der Normalverteilung

Lehrplanbezug

Thema: Was macht Daten „Normal"? – Normalverteilung als Möglichkeit Vorgänge zu beschreiben.

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen (KLP, S. 33)
Die Schülerinnen und Schüler

- untersuchen stochastische Situationen, die annähernd normalverteilt sind.
- unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion.
- beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gauß'sche Glockenkurve).

Prozessbezogene Kompetenzen (Schwerpunkte) (KLP, S. 18-22)

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum…
  …Darstellen von Funktionen grafisch, und als Wertetabelle,
  …Generieren von Zufallszahlen,
  …Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten (Mittelwert, Standardabweichung),
  …Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
  …Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
  …Berechnen der Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung),
  …Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen,
- nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen,

Modellieren (strukturieren, mathematisieren, validieren)
Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle,
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells,
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation,
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen.

Problemlösen (erkunden, lösen, reflektieren)
Die Schülerinnen und Schüler

- analysieren und strukturieren die Problemsituation,
- erkennen Muster und Beziehungen,
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege,
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Symmetrien verwenden, Zurückführen auf Bekanntes),
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus,
- interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung.

Argumentieren (vermuten, begründen, beurteilen)
Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Vermutungen auf,
- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen.

Normalverteilung

Kommunizieren (rezipieren, produzieren, diskutieren)
Die Schülerinnen und Schüler

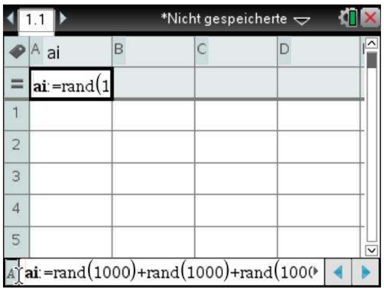
- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen,
- beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen,
- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege,
- verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
- wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus,
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
- dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar,
- erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie,
- nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
- vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen,
- führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei.

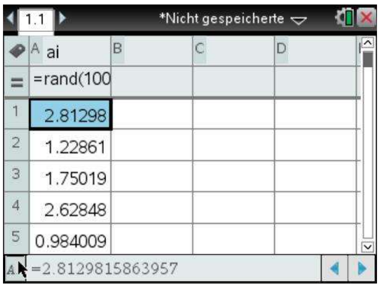
Arbeitsblatt 1

Erforschung der „Normalität“ – Naturgesetz oder Zufall?

Erzeugen Sie 1000mal eine Summe aus vier Zufallszahlen in einer Liste.

Geben Sie dazu rand(1000)+rand(1000)+rand(1000)+rand(1000) in die Tabellenkalkulation des GTR ein. (Der Befehl rand(1000) erzeugt 1000 Zufallszahlen aus dem Intervall [0,1]).





a) (1) Geben Sie ohne weitere Rechnungen die vermutlichen Kennwerte dieser Urliste an:

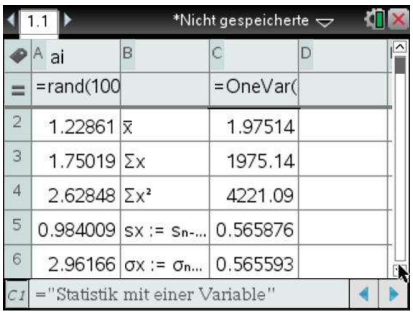
Minimum	Maximum	Mittelwert

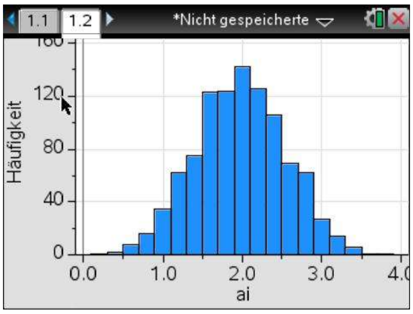
(2) Begründen Sie, wieso es sich hier nicht um eine Binomialverteilung handelt und benennen Sie den grundlegenden Unterschied.

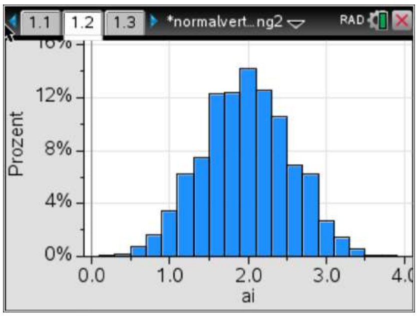
b) (1) Überprüfen Sie Ihre Kennwerte durch eine statistische Berechnung mit dem Rechner.

(2) Stellen Sie Ihre Verteilung der Zufallsgröße X: *Summe von vier Zufallszahlen* in einem Säulengramm dar.
Dabei kann die Einheit der y-Achse auf Prozent geändert werden. (menu, 2: Plot-Eigenschaften, 2: Histogrammeigenschaften, 1: Histogrammmaßstab).

Da jeder eine eigene Verteilung erzeugt, sehen Sie hier ein Beispiel:







c) Erläutern Sie die Bedeutung einer Säule des Histogramms beispielhaft an der Säule „über“ dem Wert 2.0.

Es gibt zahlreiche Phänomene in der Natur, die sich durch eine ähnliche glockenförmige Häufigkeitsverteilung beschreiben lassen, z.B. Körpergrößen, Intelligenzquotienten, Blattgrößen, Hühnereigewichte, Neugeborenengewichte etc...
Die zugehörigen Zufallsgrößen bezeichnet man als „stetig“, weil prinzipiell alle Werte in einem gewissen Intervall angenommen werden können.

Normalverteilung

Information

Normalverteilte Zufallsgrößen werden nur durch den Erwartungswert μ (bzw. $\bar{x}$) und die Standardabweichung σ charakterisiert.

Bei sehr vielen Messdaten ist es günstig, die Verteilung durch eine Funktion zu beschreiben, die sogenannte **Gauß'sche Dichtefunktion** φ :

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Der Graph von φ wird als „**Gauß'sche Glocke**" bezeichnet.

a) Zeichnen Sie die passende „Gauß'sche Glocke" für Ihre Verteilung der Zufallsgröße X: *Summe von vier Zufallszahlen* in ein Graphs-Fenster.

b) Untersuchen Sie Ihre Funktion mit den Mitteln der Analysis. Nutzen Sie dazu die Möglichkeiten im Graphik-Menu Ihres Rechners, falls er keine CAS-Funktion hat.

Listen Sie die gefundenen Eigenschaften auf.

c) Ermitteln Sie Werte der folgenden Integrale für Ihre Verteilung und erläutern Sie deren Bedeutung.

$$\int_0^2 \varphi(x)dx = \qquad \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \varphi(x)dx = \qquad \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} \varphi(x)dx =$$

$$\int_{1,3}^{1,3} \varphi(x)dx = \qquad \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} \varphi(x)dx = \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx =$$

(Ermitteln Sie den Wert des letzten Integrals im Graphikfenster, wenn Ihr Rechner keine CAS-Funktion hat.)

Aufgaben:

z.B. Lambacher Schweizer LK/GK S. 336 Nr. 8, S: 337, Nr. 11, S. 340 Nr. 4

Normalverteilung

Hinweise zur Durchführung /Lösung der Aufgaben

Arbeitsblatt 1 Vorderseite:

a) (1) z.B. Minimum: 0, Maximum: 4, Mittelwert: 2 (theoretische Werte, die nicht zwangsläufig auftauchen)

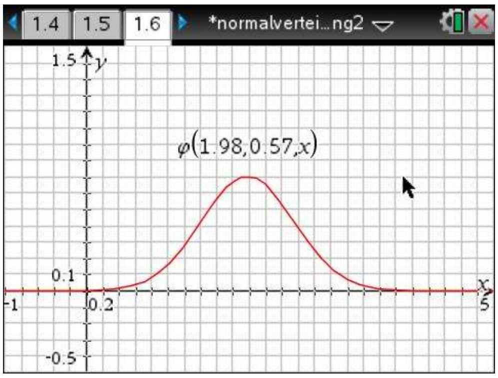
a) (2) Es gibt nicht nur 2 Ergebnisse (Erfolg/Misserfolg). Die Wahrscheinlichkeit eines Einzelereignisses ist nicht bestimmbar

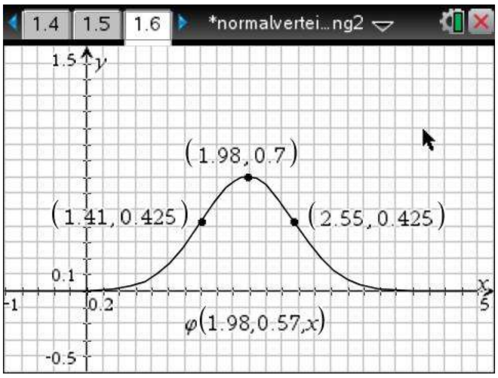
b) (1) Kennwerte über menu →4: Statistik→1: Statistische Berechnungen→ 1: Statistik mit einer Variable

b) (2) Histogramm über Neues Fenster „Data and Statistics" öffnen→Auf der x-Achse die Variable **ai** auswählen→ menu →1:Plot-Typ→3: Histogramm.

c) Die Säule gibt die Häufigkeit der Werte von 1,9 bis 2,1 wieder.

Arbeitsblatt 1 Rückseite: a) b)



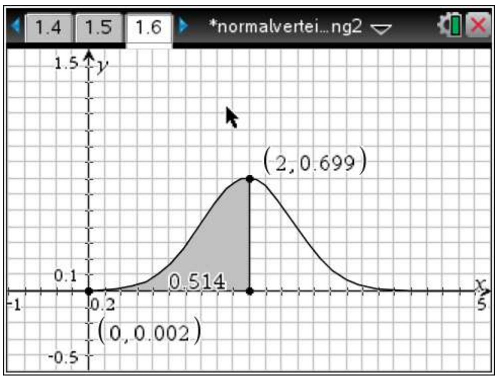


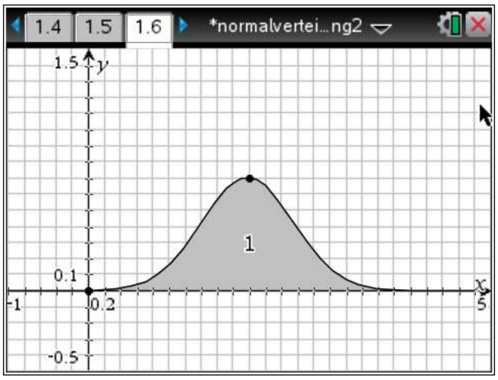
Hochpunkt bei μ (1.98)
Wendepunkte bei μ±σ (1.98±0.57)

c) $\int_0^2 \varphi_{\mu,\sigma}(z)dz = 0.514$; $\int_{1.3}^{1.3} \varphi_{\mu,\sigma}(z)dz = 0$; $\int_{1.41}^{2.55} \varphi_{\mu,\sigma}(z)dz$ =0.683 etc…

μ±σ, μ±2σ, μ±3σ sind die zu den Sigma-Regeln passenden Intervalle mit den Ergebnissen 0.683, 0.955, 0.997.

Alternativ können Lösungen über das Menu Graph analysieren über das Graphs-Fenster $\int_0^2 \varphi_{\mu,\sigma}(z)dz$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\mu,\delta}(z)dz$





Normalverteilung

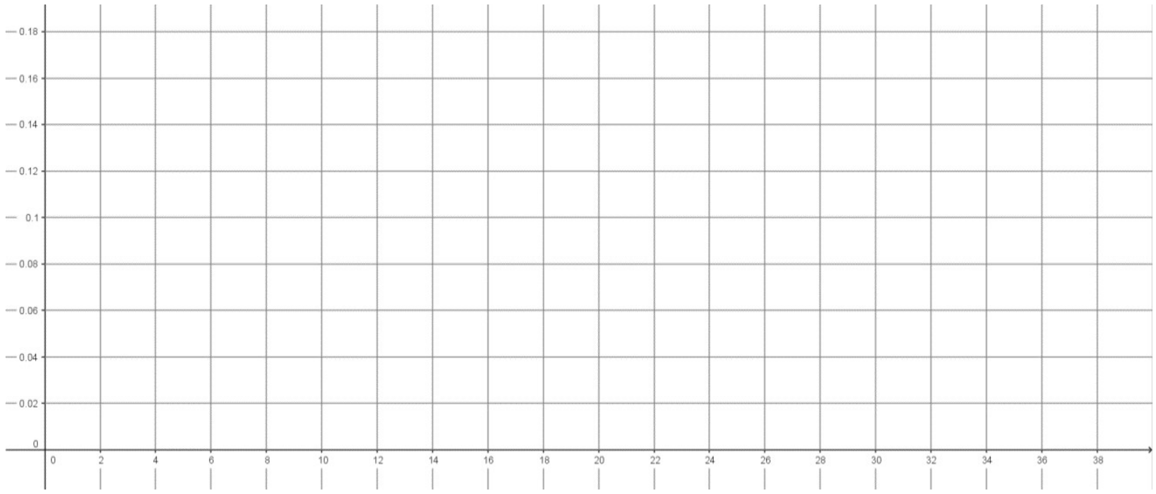
Vergleich verschiedener Normalverteilungen **Arbeitsblatt 2**

Diskutieren Sie in Ihrer Arbeitsgruppe die Gestalt der Graphen folgender Normalverteilungen.
Skizzieren Sie die Graphen dann mit Bleistift im Koordinatensystem.
Überprüfen Sie Ihre Vermutungen anschließend mit dem Rechner und korrigieren Sie gegebenenfalls Ihre Skizzen.

Tipp: Ihr Taschenrechner verfügt über einen Befehl, der die Normalverteilung berechnen lässt:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \text{normPdf}\,(\text{x},\mu,\sigma)$$

(1) $\varphi_{12,4}(x)$ (2) $\varphi_{24,4}(x)$ (3) $\varphi_{24,8}(x)$



Erläutern Sie den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Graphen der Normalverteilungen:

………

………

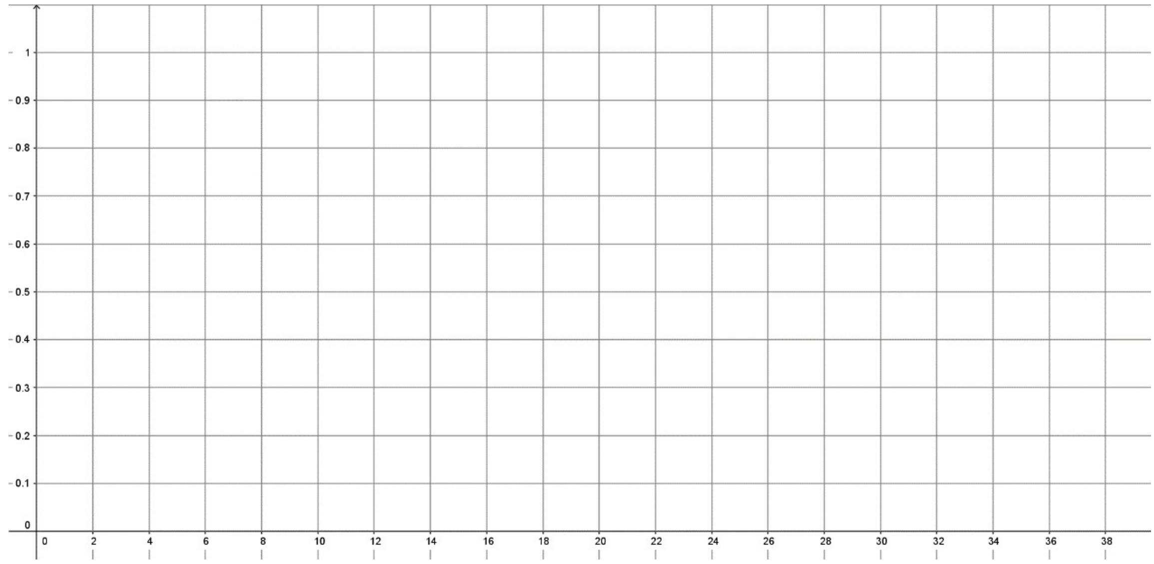
Die Funktion $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma}(z)dz$ heißt **Gauß'sche Integralfunktion**.

Normalverteilung

Skizzieren Sie jetzt die zu obigen Normalverteilungen gehörigen Gauß´schen Integralfunktionen zunächst ohne und zur Kontrolle mit Ihrem Rechner und stellen Sie Zusammenhänge mit den obigen Graphen her.

(1) $\Phi_{12,4}(x)$ (2) $\Phi_{24,4}(x)$ (3) $\Phi_{24,8}(x)$

Tipp: $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \text{normCdf}(-\infty, x, \mu, \sigma)$



Die Gauß’sche Dichtefunktion φ ist die momentane Änderungsrate der Gauß’schen Integralfunktion Φ ,bzw. die Gauß’sche Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Gauß’schen Dichtefunktion.

Normalverteilung

Aufgaben

z.B. Lambacher Schweizer LK/GK
S. 336 Nr. 3, 7
S. 337 Nr. 10, 13
S. 346 Nr. 5, 6
S. 347 Nr. 9, 11

z.B. Bigalke/Köhler LK S.505-515

Haie (abgewandelt aus Bigalke/Köhler LK S.508)

An der kalifornischen Küste leben in stark zunehmender Zahl weiße Haie. Die männlichen Exemplare sind etwas kleiner als die weiblichen und erreichen eine Länge von durchschnittlich 4 Metern mit einer Standardabweichung von 1 Meter. Die Länge von Haien kann als annähernd normalverteilt betrachtet werden.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass ein männlicher weißer Hai zwischen 3 und 5 Metern lang ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein solcher Hai länger als 6 Meter ist.

c) Bestimmen Sie eine obere Längengrenze, unter die 75% aller männlichen weißen Haie fallen.

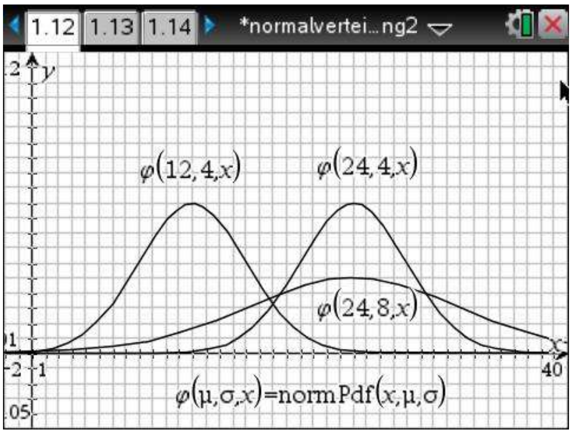
d) Ermitteln Sie ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem die Längen von 50% aller weißen männlichen Haie liegen.

e) Ermitteln Sie die Länge, über der nur noch 10% aller männlichen weißen Haie liegen.

Normalverteilung

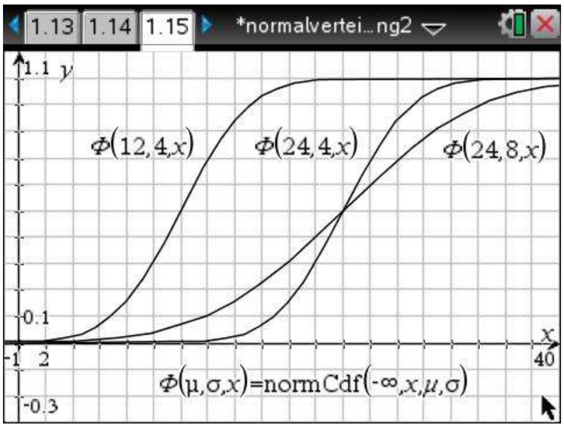
Hinweise zur Durchführung /Lösung der Aufgaben

Arbeitsblatt 2



Graphen der Normalverteilungen

Hochpunkt bei μ. Veränderung von μ verschiebt den Hochpunkt in x-Richtung. Veränderung von σ verschiebt den Hochpunkt in y-Richtung. Die Verteilung wird in diesem Beispiel flacher und breiter.



Graphen der Integralfunktionen

Änderungen von μ führen zu Verschiebungen in x-Richtung. Wendepunkt bei μ. Kleineres σ führt zu größeren Steigungen um den Wendepunkt.

Übungsmaterial: **Haie**

a) normCdf(3,5,4,1)=0.683 → 68,3%
b) normCdf(6,∞,4,1)=0.02275 → 22,75%
c) invnorm(0.75,4,1)=4.675 → obere Längengrenze ist 4,68m
d) invnorm(0.25,4,1)=3.326 und invnorm(0.75,4,1)=4.675 → Zwischen 3,32m und 4,68m Länge.
e) Invnorm(0.9,4,1)=5,282 → Ab 5,82m

Alternative Lösungsstrategien (z.B. Probieren) sind möglich.