Von der Bestimmung orthogonaler Vektoren zum Skalarprodukt und der Winkelberechnung in der Vektorrechnung

November 2015

Autoren:
K. Burgard
J. Weihers

Leibniz-Gymnasium Remscheid

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial

Kurzbeschreibung

Das vorliegende Unterrichtsbeispiel soll einen Weg aufzeigen, ausgehend von der Frage, ob sich zwei Geraden senkrecht schneiden, das Ergebnis des Skalarprodukts zweier Vektoren als Entscheidungskriterium zu verwenden. Anschließend wird das Skalarprodukt – unter Ausnutzung des Kosinussatzes - für die Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren eingesetzt. Für den GTR wird eine Funktion erstellt, die den Winkel zwischen zwei Vektoren direkt bestimmt.

Der angebotene Kontext nutzt die Tatsache, dass sich die SuS im Vorhinein bereits mit Schnittproblemen von Geraden im Zusammenhang mit Flugbahnen von Flugzeugen intensiv und systematisch auseinandergesetzt haben.

Das Unterrichtsbeispiel kann sowohl im Grundkurs als auch im Leistungskurs eingesetzt werden, im Leistungskurs sollten sich vertiefende Fragestellungen bzgl. der vom vorliegenden Kontext losgelösten geometrischen Interpretation des Skalarprodukts anschließen (z.B. bei der Betrachtung von *Projektionen* oder im Sachzusammenhang der physikalischen *Arbeit*). Der Konzeption der Unterrichtseinheiten liegt ein 67,5‘-Modell zugrunde, bei einem 45‘ oder 90‘-Modell können entsprechende Anpassungen durchgeführt werden.

Skalarprodukt

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial

Übersicht über die Unterrichtssequenzen

1. Stunde

Phase	**Verlauf**	**Medien**
Einstieg in die Reihe und in die Stunde	Erläutern des Stundenablaufs, Ausgabe des Arbeitsblatts *Ein Zeichen für Ned Flanders*	AB 1
erste Erarbeitungsphase	Arbeitsauftrag in Einzelarbeit: Klärung der Frage, ob die Flugbahnen sich orthogonal schneiden, den SuS stehen zwei Hilfekarte zur Verfügung, wobei zuerst die 1. Hilfekarte genommen werden soll Hilfekarte 1: Rektor Skinner: Skizze und erste Hilfe Hilfekarte 2: Lisa Simpson: Angeleitete Hilfestellung	AB 1, Hilfekarten
zweite Erarbeitungsphase	Arbeitsauftrag in Partnerarbeit/ Kleingruppen: Klärung der Frage, ob die Flugbahnen sich orthogonal schneiden Auch hier können die Hilfekarten benutzt werden	AB 1, Hilfekarten
Sicherung	Je nach Zeitbedarf kann die Diskussion im Plenum beginnen, wenn min. eine Gruppe einen Lösungsvorschlag erarbeitet hat, oder auch, mehrere Gruppen Lösungsvorschläge haben. Eine Schülerin/ ein Schüler trägt diesen Vorschlag vor → Diskussion im Plenum	Ggf. Tafel
Hausaufgabe	Arbeitsauftrag: Verändere die z Komponente so, dass sich die Flugbahnen senkrecht schneiden.	

Kommentar:

Ggf. ist es lohnend den SuS nach der ersten Betrachtung des Materials, die Möglichkeit der perspektivisch verzerrten Wahrnehmung von rechten Winkeln vor Augen zu führen. Dies kann z.B. mit einem Fensterflügel anschaulich und unaufwendig erfahrbar gemacht werden.

Ziel sollte es sein herauszustellen, dass eine optische Täuschung möglich ist und klar werden muss, dass bisher eine Methode fehlt, um zu überprüfen, ob zwei Vektoren zueinander orthogonal sind.

Skalarprodukt

2. Stunde

Phase	**Verlauf**	**Medien**
Einstieg und Hausaufgabe	Wiederholung der Lernsituation der Vorstunde Wiederholung der Winkelsätze	
Präzisierung des Themas	Ziel: Methode, um orthogonale Vektoren zu finden	
Erste Erarbeitungsphase	Einfache Untersuchung orthogonaler Vektoren im zweidimensionalen Raum: erste Analyse der einzelnen Komponenten im Zusammenhang zur Orthogonalität	AB 2
Zweite Erarbeitungsphase	Arbeitsauftrag in Partnerarbeit/ Kleingruppen: Vorstellen der eigenen Ergebnisse und Überprüfung der gewonnenen Erkenntnisse anhand eigener Beispiele	AB 2
Sicherung I	Präsentation der Gruppenergebnisse und Überprüfung der erstellten Regeln	Tafel
Sicherung II *Lehrervortrag/UG*	*Ansatz des innermathematischen Herangehens an die Orthogonalität von Vektoren durch Formalisierung des Skalarprodukts:* *Siehe Kommentar: Hier ist es eine didaktische Entscheidung, ob der mathematisierte Sachverhalt in dieser oder der nächsten Stunde gesichert wird.* *Abzuwägen ist hier in welcher Tiefe die Schüler das Verständnis erlangt haben oder erlangen sollen.*	
Hausaufgaben	Zeichnen eigener orthogonalen Vektoren und mathematische Überprüfung der Orthogonalität mit der erarbeiteten Regel	

<u>*Kommentar:*</u>

Ziel der Stunde sollte es sein, dass entweder:

1. die Definition des Skalarproduktes gesichert ist mit

   Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist

   $$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0,$$

   genau dann, wenn gilt: $\vec{a} \perp \vec{\mathrm{b}}$, d.h., der Winkel zwischen den Vektoren beträgt 90°.

2. Die Idee des Skalarproduktes gesichert ist:

   Es genügt hier auch, wenn die Schüler diesen Sachverhalt zunächst in eigenen Worten verfassen oder erkennen, dass die Komponenten Vektoren in bestimmten Form zusammen hängen.

Skalarprodukt

3. Stunde

Phase	Verlauf	Medien
Einstieg (LV/SV)	Wiederholung der Ergebnisse der letzten Stunde	
Organisation der Erarbeitung	Schülerinnen und Schüler teilen sich in leistungshomogene Kleingruppen ein (Binnendifferenzierung)	
Erarbeitung II	Die Beweisschritte werden in einzelne Schnipsel zerschnitten und den SuS zunächst nur zum Teil (je nach Leistungsstärke nur grüne oder grüne & gelbe Schnipsel) zur Verfügung gestellt. Kommen die SuS nicht weiter, können sie sich weitere Beweisschnipsel nehmen. So kann Beweis bei leistungsstärkeren SuS selbstständig erfolgen und bei leistungsschwächeren SuS nachvollzogen werden. Arbeitsauftrag in Kleingruppen: Beweis zur Orthognalität je in der eigens gewählten Schwierigkeitsstufe durchführen (Nach Farben eingeteilt: Grün: Schwer, Grün & Gelb: Mittel, Grün& Gelb & Rot: leicht	Arbeitsblatt 3 (Beweis-karten)
Sicherung II	Beweisprüfung durchführen (Idee: Whiteboard schieben, Lösungsblätter, Karten schreiben und an die Tafel hängen mit Magneten,…)	Whiteboard o. Tafel
Sicherung III	Skalarprodukt definieren Hinweise zum Rechnereinsatz (dotP-Befehl)	GTR
Hausaufgabe	Einüben der skalaren Multiplikation durch Aufgaben des jeweils eingeführten Lehrbuchs Hinweise zum Rechnereinsatz (dotP-Befehl) zum Eigenständigen Überprüfen der händisch erhaltenen Ergebnisse	

Kommentar:

Die zweite Sicherung kann je nach äußeren Bedingungen im Klassenraum auf verschiedene Art und Weise geschehen. Denkbar ist, dass die einzelnen Beweisschritte am Whiteboard nach und nach „aufgedeckt“ werden oder aber auch, dass die SuS ihre Reihenfolge mit Magneten an der Tafel anheften. Die SuS können (je nach vorhandener Zeit) anschließend die Beweisschritte in ihr Heft übertragen oder erhalten eine Kopie mit dem kompletten Beweis.

Für die Verwendung des TI-nspire CX ist es wichtig, den SuS klarzumachen, dass das Skalarprodukt mit dem Befehl *dotP* eingegeben wird. Die übliche Notation mit einem · kann nicht einfach im Taschenrechner verwendet werden. (Vergleiche hierzu auch den Screenshot des TI-nspire CX im Anhang.)

Die SuS können im Rahmen der Hausaufgabe zunächst händisch mit Hilfe des Skalarprodukts überprüfen, ob Vektoren orthogonal zueinander sind und ihre Rechnungen eigenverantwortlich mit dem GTR überprüfen. So lernen und vertiefen sie auch den Unterschied zwischen Notation im Heft mit $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und der Eingabe in den GTR mit dotP(a,b)

Skalarprodukt

4. Stunde

Phase	Verlauf	Medien
Einstieg	Die HA konnten eigenverantwortlich mit dem GTR kontrolliert werden, Fragen können ggf. zu Beginn dieser Stunde oder individuell während der Erarbeitungsphase geklärt werden. Rückgang zum Ausgangsproblem: Größe des Schnittwinkels der Kondensstreifen Problematisierung der Fragestellung, dass bisher nur orthogonale Winkel bestimmt werden können	Arbeitsblatt 1
Organisation der Erarbeitung	Der Kosinussatz wird als „Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras" für nicht-rechtwinklige Dreiecke gut sichtbar und zentral am Whiteboard/der Tafel notiert. Anschließend erweitern die SuS in der Erarbeitungsphase den Beweis aus der vorangegangenen Stunde entsprechend. Sie entwickeln so eine Vorgehensweise zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren. Die ursprünglichen Beweisschritte werden so ein weiteres Mal vertiefend nachvollzogen.	Whiteboard/ Tafel
Erarbeitung I	Arbeitsauftrag in Kleingruppen: Die Beweisschritte werden in einzelne Schnipsel zerschnitten, die SuS erhalten diesmal alle Schnipsel des Beweises – allerdings ohne Nummerierung. Sie bringen diese in die richtige Reihenfolge, um so die Erweiterung des Beweises aus der letzten Stunde nachzuvollziehen und die Beweisschrittigkeit zu festigen. Die SuS „bauen" analog zum Beweis der Vorstunde die erweiterte Version für die Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren zusammen und übertragen die Schritte in ihr Heft.	Arbeitsblatt 4 (Winkel-berechnung …)
Sicherung I	Am Whiteboard schieben oder der Tafel oder in Form von einem Lösungsblatt wird den SuS die korrekte Reihenfolge der Äquivalenzumformungen geliefert.	Whiteboard o. Tafel
Erarbeitung II	Arbeitsauftrag: Die SuS sollen nun die Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren mit dem GTR durchführen. Hierbei wird erneut die Eingabe des Skalarprodukt mit dem dotP() Befehl notwendig, außerdem auch auf den Befehl norm() zurückgegriffen, dieser wurde in EF bereits bei der Berechnung der Länge von Vektoren eingeführt.	GTR
Sicherung II	Am Whiteboard schieben oder der Tafel oder in Form von einem Lösungsblatt wird den SuS die Notation des korrekten Befehls zur Verfügung gestellt. (vgl. Anhang)	Whiteboard o. Tafel
Hausaufgabe	Einüben der Winkelberechnung durch Aufgaben des jeweils eingeführten Lehrbuchs, eigenständiges Überprüfen mit GTR	

Skalarprodukt

Kommentar:

Umgang mit dem Kosinussatz: An unserer Schule wird der Kosinussatz in der Sekundarstufe 1 behandelt. Daher kann (zumindest theoretisch) auf den Satz zurückgegriffen werden, es erscheint in jedem Falle sinnvoll, den Kosinussatz unter dem Blickwinkel einer Erweiterung des Satzes von Pythagoras zu reaktivieren. Wurde der Kosinussatz noch nicht behandelt, kann dies natürlich auch in der Q-Phase erfolgen. Im Grundkurs ist es allerdings auch möglich, den Satz in Form einer *black-box* zu verwenden. Für leistungsstarke SuS sollte auf jeden Fall eine Beweisidee zur Verfügung gestellt werden, die beispielsweise zu Hause nachvollzogen werden kann – auch dann, wenn der Satz bereits in der Sek I behandelt wurde.

Skalarprodukt

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (Q-LK-G2)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• berechnen das Skalarprodukt
• untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung)
• deuten das Skalarprodukt geometrisch
• bestimmen Abstände zwischen Punkten und Geraden

• Prozessbezogene Kompetenzen:
Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler
• erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (Erkunden)
• analysieren und strukturieren die Problemsituation (Erkunden)
• entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen)
• vergleichen verschiedene Lösungswege

Argumentieren
Die Schülerinnen und Schüler
• präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten)
• stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) (Begründen)
• nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen)
• berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) (Begründen)
• überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen)

Kommunizieren
Die Schülerinnen und Schüler
• verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (Produzieren)
• wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren)
• erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (Produzieren)
• vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität (Diskutieren)
</td><td>
Der Fokus der Untersuchung liegt auf einer Anwendung des Skalarprodukts bei der Bestimmung von Winkeln zwischen Vektoren/Geraden. Anhand der Ergebnisse bei der Berechnung des Skalarprodukts ergibt sich eine Einteilung zueinander orthogonale und nicht orthogonale Vektoren. Das Skalarprodukt wird somit erst nachträglich als neue Verknüpfung von Vektoren erfahren und kann anschließend losgelöst vom vorliegenden Kontext betrachtet werden.

Im Unterricht sollen Kommunikationsprozesse innerhalb der Schülergruppe angeregt werden und eigenständig Ideen für mögliche Lösungswege entwickelt werden.
</td></tr>
</table>

Skalarprodukt

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial

Arbeitsblatt 1

NED FLANDERS: Hadelidaddeliduddeli. Es ist ein Zeichen. Zwei göttliche Strahlen, die sich genau im rechten Winkel über unserer Kirche schneiden.

REVERAND LOVEJOY: So ein Quatsch Ned. Erstens sind das Kondensstreifen von Flugzeugen und zweitens kann man von hier unten gar nichts über den Winkel sagen…

NED FLANDERS: Sie zweifeln am göttlichen Zeichen, Reverand.

REVERAND LOVEJOY: Nein, Ned, nur an Dir...

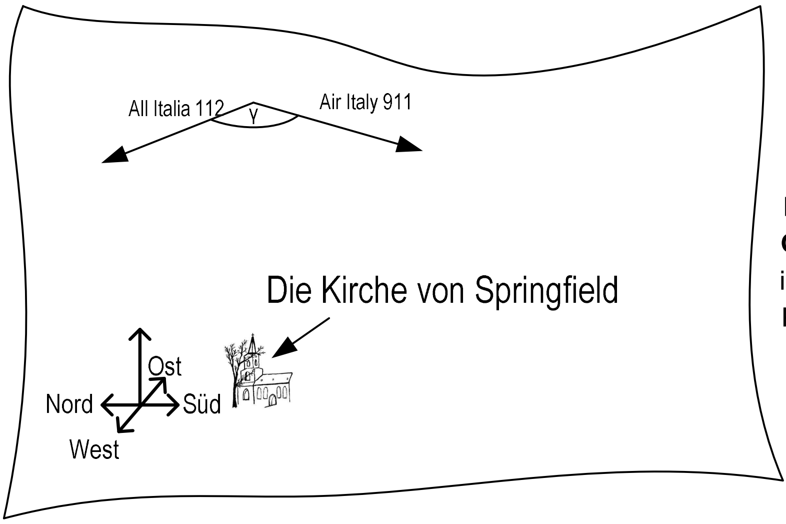
NED FLANDERS: Ich beweise Ihnen, dass ich recht habe. Hadelidaddeliduddeli.

Nachdem Ned Flanders mit der Flugaufsicht von Springfield telefoniert hatte, hatte man ihm tatsächlich Informationen über zwei Flugzeuge liefern können:

Flug *Allitalia 112* befand sich genau um 15.15h in einer Höhe von 4km über Springfields Kirche. Flug *Allitalia 112* flog zu diesem Zeitpunkt pro Minute 4km in westliche, 2km in nördliche Richtung und stieg um 0,5km.

Und auch Flug *Air Italy 911* war genau über die Kirche hinweg geflogen und das ebenfalls in einer Höhe von 4km, allerdings 5 min nachdem Flug *Allitalia 112* über die Kirche geflogen war. Flug *Air Italy 911* legte zu diesem Zeitpunkt pro Minute 3km in westliche, 3km in südliche Richtung zurück und stieg um 0,5km.

Ned dachte bei sich: *Hadelidaddeliduddeli. Damit haben sich die Flugbahnen der Flugzeuge genau über meiner Kirche gekreuzt. Bleibt nur noch zu zeigen, dass es im rechten Winkel war! Hadelidaddeliduddeli!*



Ned überlegt, was er tun kann: Zunächst wird er es alleine versuchen. Wenn er jedoch alleine nicht mehr weiterkommen sollte, könnte er zunächst den **Grundschulrektor Skinner** bitten, ihm bei seinem mathematischen Problem zu helfen.

Und falls ihn dies immer noch nicht zum Ziel bringen sollte, wäre da noch **Lisa Simpson**. Auch diese hätte im Notfall sicher einen Tipp für ihn.

Quelle: eigene Erstellung mit MS Word / MS Visio, Foto K. Fey.

Skalarprodukt

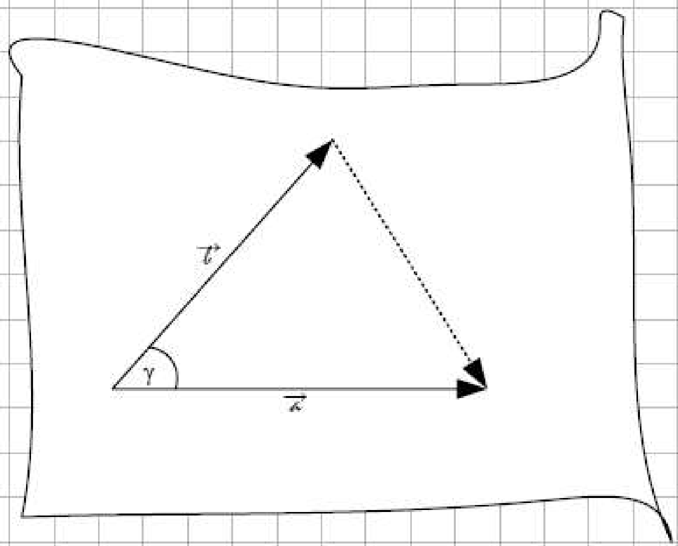
Arbeitsblatt 1 (Hilfekarten)

REKTOR SKINNER

REKTOR SKINNER: Nun, Ned, Sie wollen also den Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen.

NED: So ist es.

REKTOR SKINNER: Nun, wie das geht, weiß ich auch nicht. Aber ich zeichne immer Dreiecke, wenn ich ein Problem habe, das ich nicht lösen kann. In einem Dreieck erscheint auf einmal alles einfach...



LISA SIMPSON

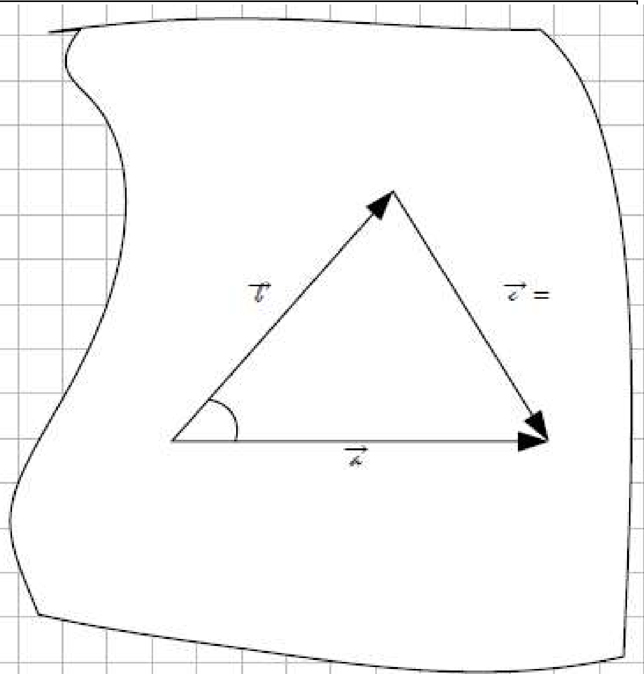
LISA SIMPSON: Mmmmh, ein Dreieck, Vektoren, Winkel. Das erinnert mich an die erste Klasse....

NED: Lisa, kannst du mir nun helfen oder nicht??

LISA SIMPSON: Ach, wissen Sie Mr. Flanders, interessant ist doch eigentlich nur, dass der Vektor c der Verbindungsvektor von b nach a ist.

NED: Du willst also sagen...

LISA SIMPSON: Um es mit ihren Worten zu sagen: Pythagorididdelidulleli...



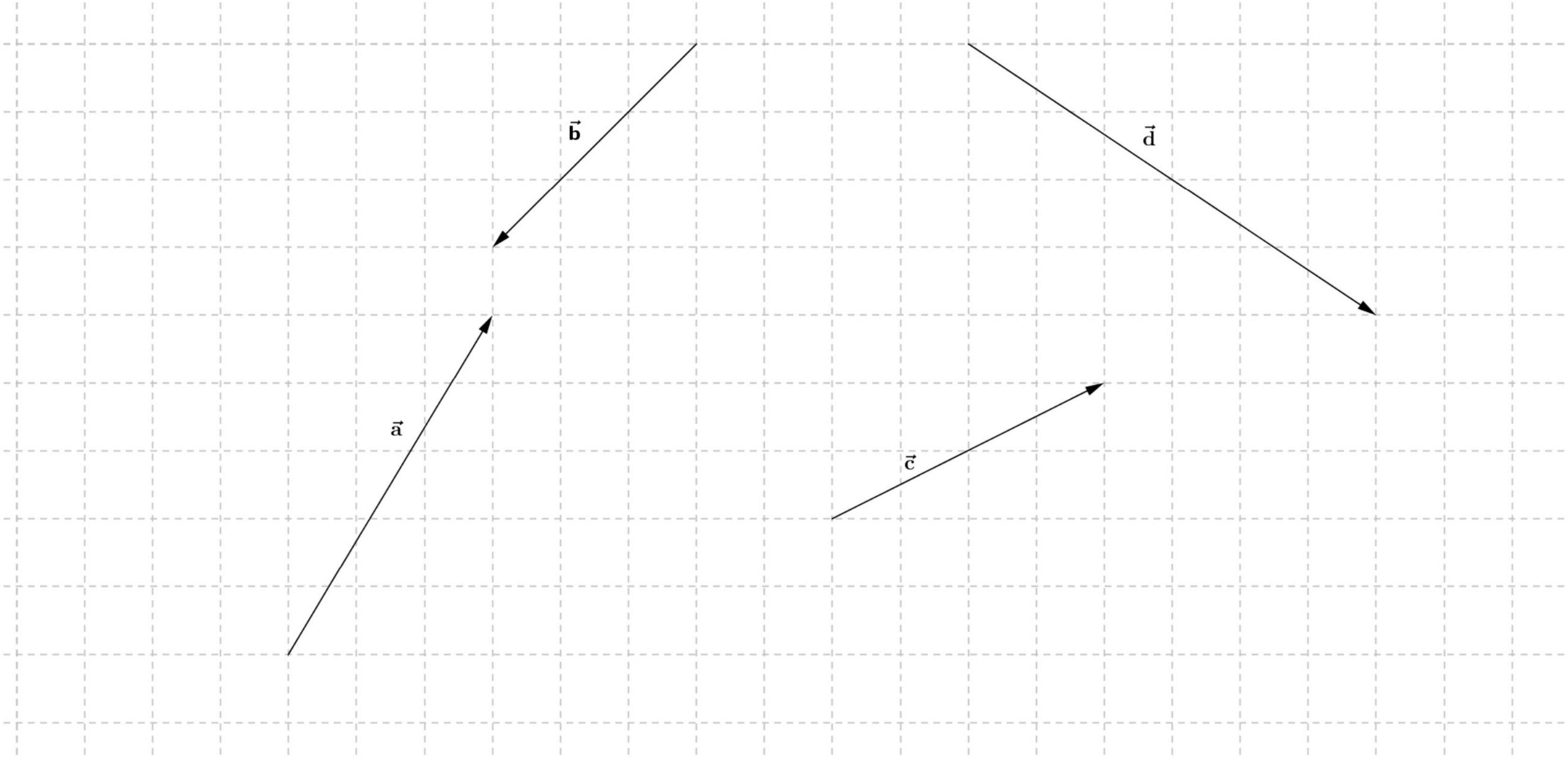
Quelle: Eigene Erstellung mit MS Visio

Skalarprodukt

Arbeitsblatt 2

Aufgabe:

1. Finden Sie zu jedem Vektor mindestens 2 orthogonale Vektoren. Lesen Sie die Koordinaten dieser orthogonalen Vektoren ab.
2. Untersuche Sie sowohl die vorgegebenen, als auch die Ihre gefundenen Vektoren. Beschreiben Sie die Zusammenhänge und versuchen Sie eine Regel zu verfassen, wann Vektoren senkrecht zueinander sind.
3. Erstellen Sie weitere Vektoren und überprüfen Sie Ihre Regel.



Skalarprodukt

Arbeitsblatt 3 (Beweiskarten) Die Beweisschritte werden in einzelne Schnipsel zerschnitten und den SuS zunächst nur zum Teil (je nach Leistungsstärke nur grüne oder grüne & gelbe Schnipsel) zur Verfügung gestellt. Kommen die SuS nicht weiter, können sie sich weitere Beweisschnipsel nehmen. So kann der Beweis bei leistungsstärkeren SuS selbstständig erfolgen und bei leistungsschwächeren SuS nachvollzogen werden.

1	$\lvert\vec{a}\rvert^2 + \lvert\vec{b}\rvert^2 = \lvert\vec{b} - \vec{a}\rvert^2$
2	$\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 + \left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\right)^2 = \lvert\vec{b} - \vec{a}\rvert^2$
3	$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \left(\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}\right)^2$
4	$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$
5	$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_1^2 - 2 \cdot b_1 a_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2 \cdot b_2 a_2 + a_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot b_3 a_3 + a_3^2$
6	$\cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} + \cancel{a_3^2} + \cancel{b_1^2} + \cancel{b_2^2} + \cancel{b_3^2} = \cancel{b_1^2} - 2 \cdot b_1 a_1 + \cancel{a_1^2} + \cancel{b_2^2} - 2 \cdot b_2 a_2 + \cancel{a_2^2} + \cancel{b_3^2} - 2 \cdot b_3 a_3 + \cancel{a_3^2}$
7	$0 = -2 \cdot b_1 a_1 - 2 \cdot b_2 a_2 - 2 \cdot b_3 a_3$
8	$0 = -2 \cdot (b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3)$
9	$0 = (b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3)$

Skalarprodukt

Arbeitsblatt 4: Der Kosinussatz steht gut sichtbar an der Tafel/dem Whiteboard. Die Beweisschritte werden in einzelne Schnipsel zerschnitten, die SuS erhalten diesmal alle Schnipsel des Beweises – allerdings ohne Nummerierung. Sie bringen diese in die richtige Reihenfolge, um so die Erweiterung des Beweises aus der letzten Stunde nachzuvollziehen und die Beweisschrittigkeit zu festigen.

Kosinussatz: $a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) = c^2$

$\lvert\vec{a}\rvert^2 + \lvert\vec{b}\rvert^2 - 2 \cdot \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos(\gamma)$	=	$\lvert\vec{b} - \vec{a}\rvert^2$
$\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 + \left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\right)^2 - 2 \cdot \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos(\gamma)$	=	$\lvert\vec{b} - \vec{a}\rvert^2$
$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert \cos(\gamma)$	=	$\left(\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}\right)^2$
$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos(\gamma)$	=	$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$
$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos(\gamma)$	=	$b_1^2 - 2 \cdot b_1 a_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2 \cdot b_2 a_2 + a_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot b_3 a_3 + a_3^2$
$\cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} + \cancel{a_3^2} + \cancel{b_1^2} + \cancel{b_2^2} + \cancel{b_3^2} - 2 \cdot \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos(\gamma)$	=	$\cancel{b_1^2} - 2 \cdot b_1 a_1 + \cancel{a_1^2} + \cancel{b_2^2} - 2 \cdot b_2 a_2 + \cancel{a_2^2} + \cancel{b_3^2} - 2 \cdot b_3 a_3 + \cancel{a_3^2}$
$-2 \cdot \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos(\gamma)$	=	$-2 \cdot b_1 a_1 - 2 \cdot b_2 a_2 - 2 \cdot b_3 a_3$
$-2 \cdot \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos(\gamma)$	=	$-2 \cdot (b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3)$
$\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cos(\gamma)$	=	$b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$
$\cos(\gamma)$	=	$\dfrac{b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$
γ	=	$\cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}\right)$

Skalarprodukt

Hinweise zu Arbeitsblatt 3:

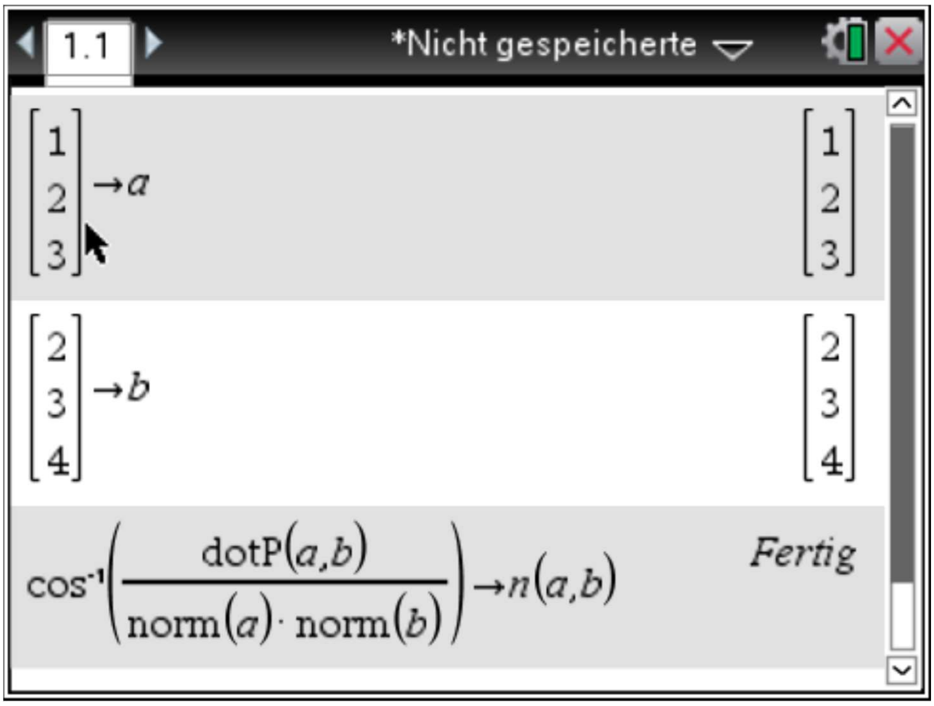
Die Beweisschritte werden in einzelne Schnipsel zerschnitten und den SuS zunächst nur zum Teil (je nach Leistungsstärke nur grüne oder grüne & gelbe Schnipsel) zur Verfügung gestellt. Kommen die SuS nicht weiter, können sie sich weitere Beweisschnipsel nehmen. So kann Beweis bei leistungsstärkeren SuS selbstständig erfolgen und bei leistungsschwächeren SuS nachvollzogen werden.

Hinweise zu Arbeitsblatt 4:

Der Kosinussatz steht gut sichtbar an der Tafel/dem Whiteboard. Die Beweisschritte werden in einzelne Schnipsel zerschnitten, die SuS erhalten diesmal alle Schnipsel des Beweises – allerdings ohne Nummerierung. Sie bringen diese in die richtige Reihenfolge, um so die Erweiterung des Beweises aus der letzten Stunde nachzuvollziehen und die Beweisschrittigkeit zu festigen.

GTR

TI-*n*spire CX Funktion zur Bestimmung des Winkels zwischen zwei Vektoren:



Bildquelle

Das Foto der Kirche in Freisheim wurde zur Verfügung gestellt von K. Fey, Remscheid, unsere Bearbeitung erfolgte mit MS Visio.