Der Integralbegriff

Von der Randfunktion zur Integralfunktion

März 2016

Autoren:
Klaus Busse, Jens Dahmen, Ulrich Hoffert, Ingo Koschinski, Dr. Kay Nüßler,

GE Weierheide, Oberhausen / Leibniz-Gymnasium, Dortmund / GE Greven, Greven / GE Holsterhausen, Essen

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial

Kurzbeschreibung

Das hier vorgestellte Unterrichtsvorhaben zeichnet eine Möglichkeit auf den Integralbegriff in der Qualifikationsphase im Unterricht zu behandeln.

Dazu werden 5 Unterrichtssequenzen im Gesamtumfang von 12 Unterrichtsstunden à 45 Minuten vorgeschlagen. Die Unterrichtssequenz, die zum Anwenden des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (in Sachzusammenhängen o. innermathematisch) vorgesehen ist, wird in diesem Vorschlag nicht weiter ausgearbeitet, da hier Schulbücher genügend sinnvolle Aufgaben liefern.

Der Schwerpunkt dieses Unterrichtsvorhaben liegt auf der Entwicklung von tragenden Grundvorstellungen der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf den Begriff des Integrals. Deshalb wird dieser Begriffe zunächst qualitativ in unterschiedlichen sinnstiftenden Kontexten thematisiert.

Der GTR bietet die Möglichkeit der selbstständigen Entdeckung von Zusammenhängen von Randfunktion und Integralfunktion.

Übersicht über die Unterrichtssequenzen

Std.	Thema	Material
1. *2.* *3.*	Die Fläche unter einem Graphen hat eine Bedeutung! (Gruppenarbeit mit anschließender Vorstellung der Ergebnisse)	**M1**
4.	Produktsummen (dyn. Geometriesoftware) Orientierter Flächeninhalt	**M2**
5.	Bestimmung von Stammfunktionen (GTR)	**M3**
6.	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	**M4**
7.	Anwendungen/Gesamteffekt	
8. *9.* *10.* *11.*	u.a. Volumen Rotationskörper	

Didaktische Hinweise

1. Unterrichtssequenz: Die Fläche unter einem Graphen hat eine Bedeutung

Durch die zunehmende Orientierung auf kompetenzorientierte Lehrpläne verschiebt sich insbesondere die Schwerpunktsetzung hin zum Verständnis von Konzepten. Beim Schlüsselkonzept Integral steht somit bei der Einführung des Integralbegriffs nicht das Kalkül im Vordergrund (reine Flächenberechnung, Umkehrung der Differentialrechnung bzw. Stammfunktionen ermitteln), sondern der Wirkungszusammenhang. Somit wird ausgehend von Änderungsraten auf einen Gesamtbestand geschlossen (Kumulation statt Flächeninhalt).

Durch die ausgewählten Beispiele müssen sich die Schülerinnen und Schüler intensiv mit einem konkreten Anwendungskontext auseinandersetzen, der den Wirkungszusammenhang als zentrales Thema beinhaltet. Jedoch müssen die Schülerinnen und Schüler selbstständig entscheiden, mit welchen Werkzeugen und Näherungen sie arbeiten. Die Anwendungsbespiele sind so konzipiert, dass sie wesentliche Aspekte zur Herleitung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung anschneiden (Stammfunktion und Produktsummen).

Durch die Konzeption der Unterrichtssequenz werden die unterschiedlichen methodischen und fachlichen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler berücksichtigt, da sie der Vielfalt der Lernwege und dem selbständigen Arbeiten gerecht werden.

Folgende inhaltliche Kompetenzen werden durch diese Unterrichtsequenz angebahnt und/oder gefestigt:

- Die Interpretation von Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion eines Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe,
- das Deuten von orientierten Flächeninhalten im Kontext und
- das Skizzieren einer zugehörigen Flächeninhaltsfunktion zu einer gegebenen Randfunktion.

Im Mittelpunkt der Unterrichtssequenz stehen folgende prozessbezogenen Kompetenzen, die gefestigt werden:

- Das Erfassen und Strukturieren von zunehmend komplexen Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung und
- die Erarbeitung einer Lösung mit Hilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten innerhalb des mathematischen Modells.

Ablauf:
Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten zunächst unterschiedliche Sachzusammenhänge in arbeitsteiliger Gruppenarbeit, anschließend werden die Ergebnisse mittels eines Museumsganges ausgetauscht (vgl. AB Arbeitsplan zur GA - Flächeninhalte haben eine Bedeutung).
Zur Sicherung der Ergebnisse dient das AB Arbeitsauftrag für den Museumsgang.
Zum Abschluss sollten folgende zentralen Aspekte hervorgehoben werden: *Der Wirkungszusammenhang, die Ermittlung des Flächeninhalts, die Orientierung des Flächeninhalts, die Bedeutung der ‚Aufleitung' (Stammfunktion) sowie das näherungsweise Bestimmen von Integralen als Methode zur Bestimmung von krummlinigen begrenzten Flächen.*

Lehrplanbezug

Thema: *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-GK-A3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe
- deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext
- skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion

Prozessbezogene Kompetenzen:

Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)*
- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)*
- wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)*
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*
- dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar *(Produzieren)*
- erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)*

Thema: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-GK-A4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs
- erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
- nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen
- bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen
- bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge
- ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate
- bestimmen Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen

Prozessbezogene Kompetenzen:

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Vermutungen auf *(Vermuten)*
- unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)*
- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)*
- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)*

Der Integralbegriff

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen […] digitale Werkzeuge *[Erg. Fachkonferenz: Tabellenkalkulation und Funktionenplotter]* zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse … Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial

Unterrichtsmaterial M1

1. Unterrichtssequenz: Die Fläche unter einem Graphen hat eine Bedeutung

   AB - Arbeitsplan zur GA - Flächeninhalte haben eine Bedeutung

   AB - Amalgam

   AB - Heißluftballon

   AB - Spirometer

   AB - Rote Welle-Stopp and Go

   AB - Arbeitsauftrag zum Museumsgang

Arbeitsplan

Problemstellung
In dieser Unterrichtssequenz sollen Sie zur Einführung in die Integralrechnung unterschiedliche Bedeutungen von Flächeninhalten betrachten und herausfinden sowie die gesuchten Größen rekonstruieren. Diese Seite gibt Ihnen einen Überblick über den Ablauf der Unterrichtssequenz.

Ablaufplan
Es gibt insgesamt 5 Beispiele:

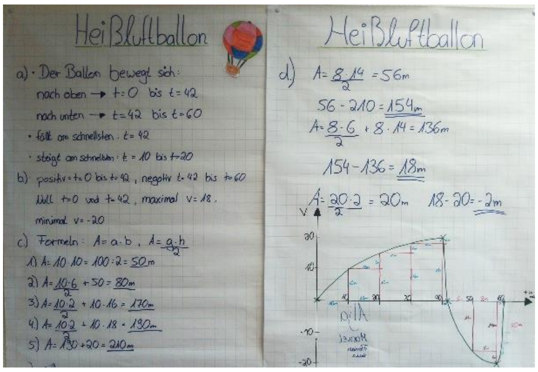
- A1 Badetag
- A2 Heißluftballon
- A3 Rote Welle - Stopp and go
- A4 Amalgam
- A5 Spirometer

Bildung von Gruppen und Erarbeitung (90 min)
Teilen Sie Ihre Klasse zunächst in Gruppen mit vier bis fünf Mitgliedern auf. Bearbeiten Sie das Ihnen zugewiesene Beispiel mit Hilfe der Arbeitsaufträge. Fertigen Sie zu Ihrem Beispiel ein Plakat an, auf denen Sie die Aufgabe, Ihre Lösungsansätze und die wesentlichen Ergebnisse darstellen.

GA

Ergebnispräsentation mittels Gruppenpuzzle und Museumsgang (30 min)
Jetzt werden die Ergebnisse wie in einer Ausstellung vorgestellt. Dafür werden Sie im ganzen Raum möglichst weit entfernt voneinander aufgehängt. Dann werden so viele neue Gruppen gebildet, wie die kleinste Gruppe Mitglieder hat. Aus jeder alten Gruppe wird jeweils ein Mitglied in die neuen Gruppen geschickt.

GP



Die einzelnen Gruppen wandern nun von Lernplakat zu Lernplakat. Das jeweilige Gruppenmitglied, das bei der Erstellung des Plakates beteiligt war, präsentiert den anderen Mitgliedern der Museumsgruppe die Ergebnisse. Im Anschluss an jede Präsentation vervollständigen Sie dann die Ihnen vorliegende Übersicht.
Der Zeittakt zum Wechseln beträgt 5 min.

MG

Auswertung (15 min)
Im Anschluss an den Museumsgang bilden wir einen Stuhlkreis, um die Zusammenhänge zu erörtern und die weitere inhaltlich Vorgehensweise zu erarbeiten und abzusprechen.

SK

Der Integralbegriff

Arbeitsauftrag zum Museumsgang „Rekonstruktion einer Größe“

Ergänzen Sie jeweils zum Abschluss der einzelnen Präsentationen folgende Übersicht:

Arbeitsgruppe	A1 Badetag	A2 Heißluftballon	A3 Stopp and Go	A4 Amalgan	A5 Spirometer
Ausgangssituation/ Momentane Änderungsrate Einheiten der beiden Achsen					
Wirkungszusammenhang (ggf. Bedeutung des Flächeninhaltes) Einheiten des Wirkungszusammenhangs Vorgehensweise zur konkreten Ermittlung der gesuchten Größe					

Arbeitsauftrag zum Museumsgang „Rekonstruktion einer Größe“ - <u>Lösungshinweise</u>

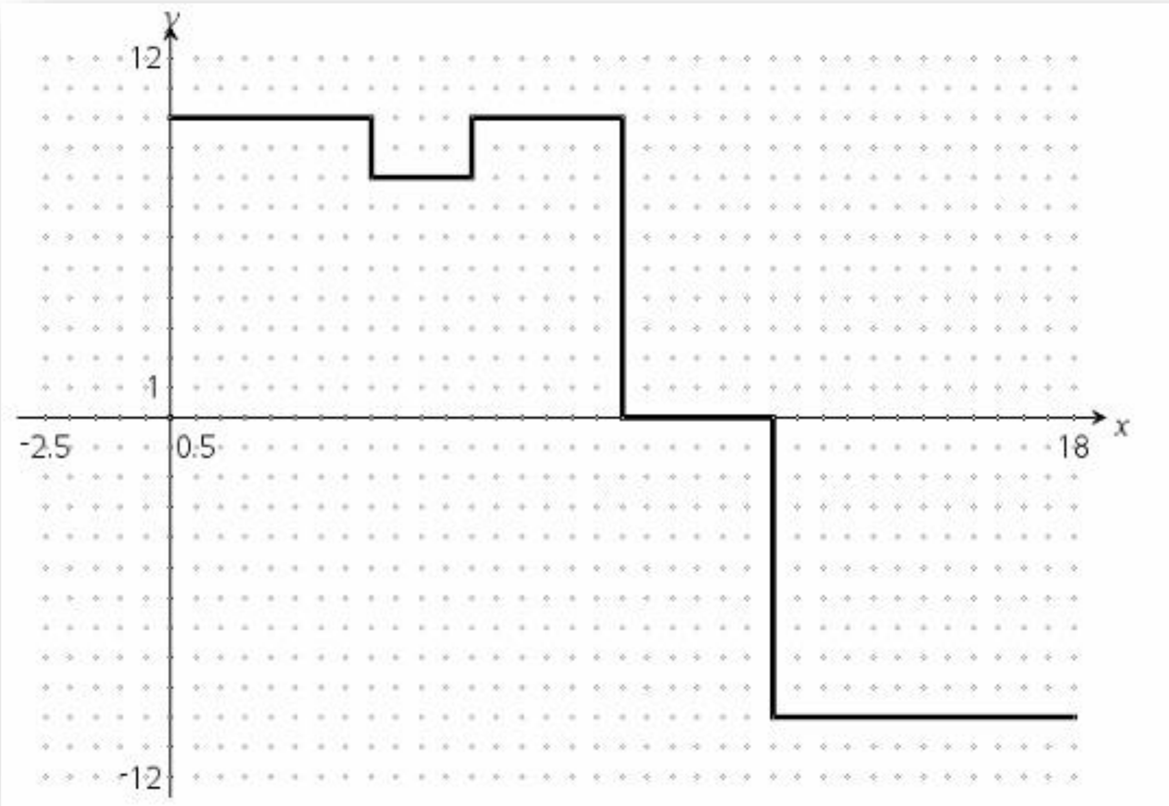
Ergänzen Sie jeweils zum Abschluss der einzelnen Präsentationen folgende Übersicht:

Arbeitsgruppe	A1 Badetag	A2 Heißluftballon	A3 Stopp and Go	A4 Amalgan	A5 Spirometer
Ausgangssituation/ Momentane Änderungsrate Einheiten der beiden Achsen	Zuflussgeschwindigkeit t-Achse: Zeit in min y-Achse: Liter pro min	Steiggeschwindigkeit t-Achse: Zeit in min y-Achse: Meter pro min	Geschwindigkeit t-Achse: Zeit in s y-Achse: km/h	Auscheidungsrate t-Achse: Zeit in Tagen y-Achse: Menge Hg in µg/Tag	Fließrate t-Achse: Zeit in Tagen y-Achse: Liter pro Sekunde
Wirkungszusammenhang (ggf. Bedeutung des Flächeninhaltes) Einheiten des Wirkungszusammenhangs Vorgehensweise zur konkreten Ermittlung der gesuchten Größe	Wasservolumen Liter Individuell verschieden	Höhenunterschied zum Startpunkt m Individuell verschieden	Zurückgelegte Strecke km Individuell verschieden	Insgesamt ausgeschiedene Quecksilber- menge Hg in µg Individuell verschieden	Eingeatmete(s) Luftmenge (-volumen) Liter Individuell verschieden

Badetag

Herr Schmitz bereitet sich auf sein geliebtes Wannenbad vor und lässt Wasser in die leere Wanne ein.

Das folgende Diagramm stellt die zeitliche Entwicklung von Zufluss- und Abflussrate dar
[*t* in min; *v*(*t*) in Liter/min]:



a) Beschreiben Sie, wie Herr Schmitz das Wasser in die Wanne einlässt.

b) Bestimmen Sie das maximale Wasservolumen in der Badewanne sowie das Volumen zum Zeitpunkt t = 16 min.

c) Für $t > 12$ min soll $v(t)$ konstant bleiben. Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Badewanne leer ist.

d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion *V(t)*, welche die Wassermenge in der Badewanne in Abhängigkeit von der Zeit angibt.

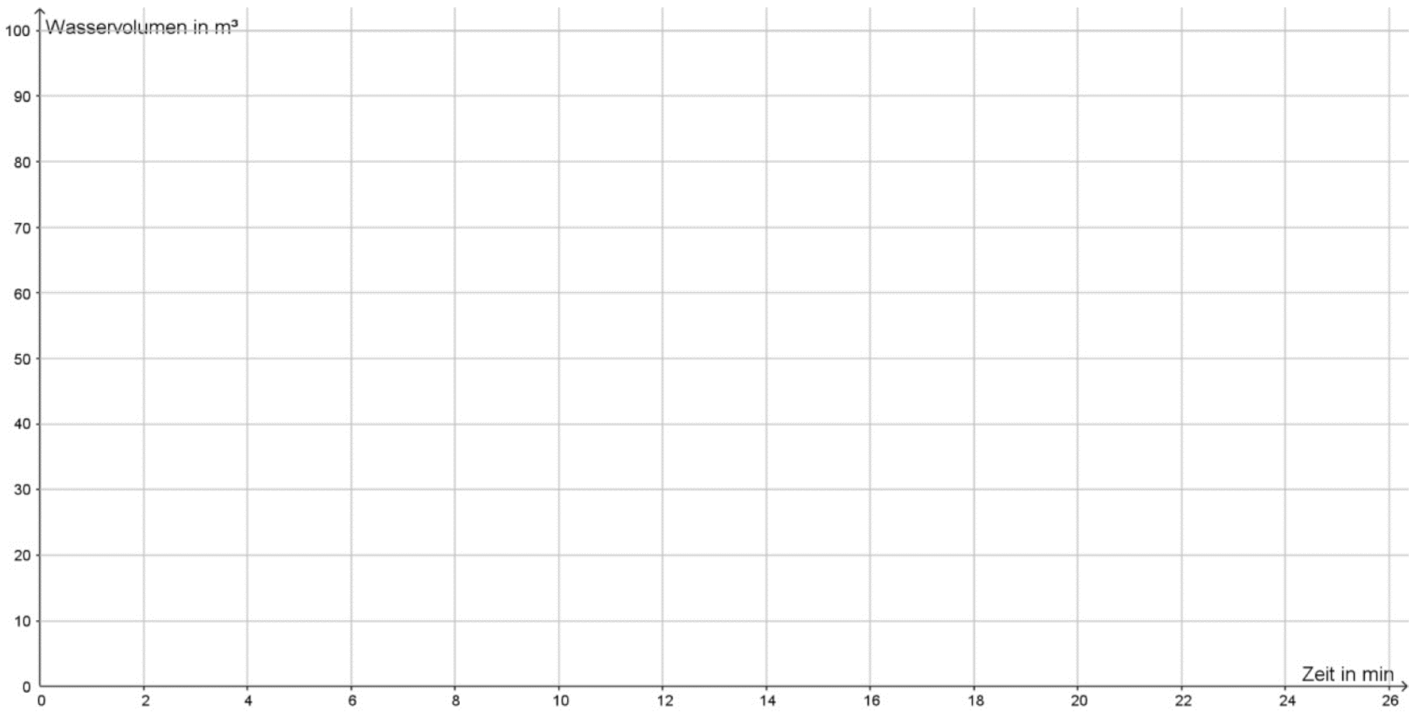
Hilfen zu „Badetag“:

Zu a)
Berücksichtigen Sie dazu folgende Fragestellungen:
- Welche Zufluss- und Abflussraten kommen vor?
- Welche Bedeutung haben Bereiche, in denen der Graph unterhalb der *t*-Achse verläuft?
- Ist es auch möglich, dass Herr Schmitz zu einem Zeitpunkt sowohl den Wasserhahn aufgedreht hat als auch den Abfluss öffnet?

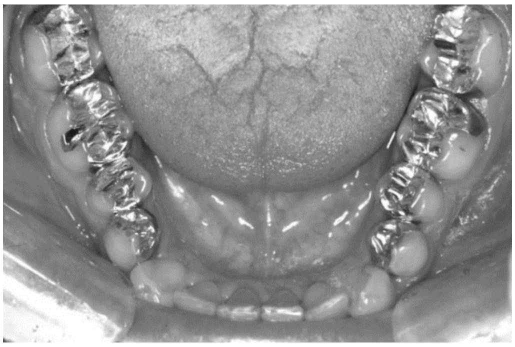
Zu b)
Berücksichtigen Sie dazu folgende Fragestellung:
- Welche Bedeutung hat die Fläche, die v(t) mit der t-Achse einschließt?

Zu c)
Berücksichtigen Sie dazu folgende Fragestellung:
- Welche Unterschiede bestehen zwischen Flächen, die oberhalb bzw. unterhalb der t-Achse mit v(t) eingeschlossen werden.

Zu d)
Benutzen Sie folgendes Koordinatensystem:



Amalgam



Frau Schulze hat davon gehört, dass Amalgamfüllungen zu einer Quecksilberbelastung des menschlichen Körpers führen können. Sie möchte deshalb wissen, ob sie ihre alten Füllungen besser entfernen lassen sollte, und versucht, sich zu diesem Thema zu informieren.

Manche Zahnärzte vertreten dazu die Ansicht, dass die Quecksilberausscheidung unabhängig von der Menge der vorhandenen Füllungen ist und immer gleich bleibt. Demgegenüber steht die Hypothese, dass die Quecksilberausscheidungen eben von dieser Menge der Amalgamfüllungen abhängig sind.
In einer Studie zur wissenschaftlichen Untersuchung der Belastung wurde an einem Testpatienten P1 direkt vor und über einen Zeitraum von 6 Monaten nach der Entfernung von Amalgamfüllungen die Menge des über den Urin ausgeschiedenen Quecksilbers (Hg) gemessen:

Zeit in Tagen	0	2	30	60	90	120	150	180
Menge Hg in µg/Tag	3,5	3,2	2,4	1,8	1,2	0,8	0,5	0,4

Bei einem Vergleichspatienten P2, dem die Füllungen nicht entnommen wurden, wurden über den gleichen Zeitraum hinweg relativ konstante Hg-Mengen von 3,5 µg/Tag gemessen.

a) Stellen Sie das Datenmaterial graphisch dar.

b) Bestimmen Sie die insgesamt ausgeschiedene Quecksilbermenge für jeden der beiden Patienten?

c) Skizzieren Sie für beide Patienten die insgesamt ausgeschiedene Quecksilbermenge in Abhängigkeit von der Zeit in Tagen.

Der Integralbegriff

Hilfen zu „Amalgamfüllung“:

Zu a) Vorlage Koordinatensystem

Zu b)

Beachten Sie folgende Aspekte:

- Wieviel Quecksilber haben beide Patienten nach 2 Tagen ausgeschieden?
- Verwenden Sie zur Annäherung der Daten von P1 z.B. eine Ausgleichsgerade.

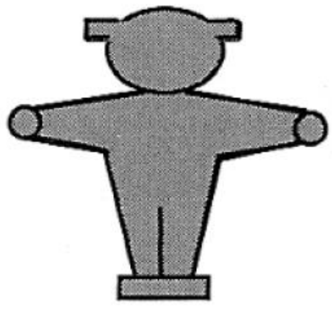
Zu c)

Beachten Sie folgende Fragestellung:

- Welche Bedeutung hat die Fläche, der der Graph der Mengenkonzentration pro Tag mit der Zeit-Achse einschließt?

Rote Welle – Stopp an Go

Jedem ist die folgende für den Straßenverkehr typische Situation geläufig: Man hält mit dem Auto bei Rot an einer Ampel, fährt wieder bei Grün an und kann dann – wenn alles gut geht – einige Sekunden mit ungefähr gleich bleibender Geschwindigkeit weiterfahren. Doch kaum hat man diese Geschwindigkeit erreicht, taucht die nächste Ampel auf …

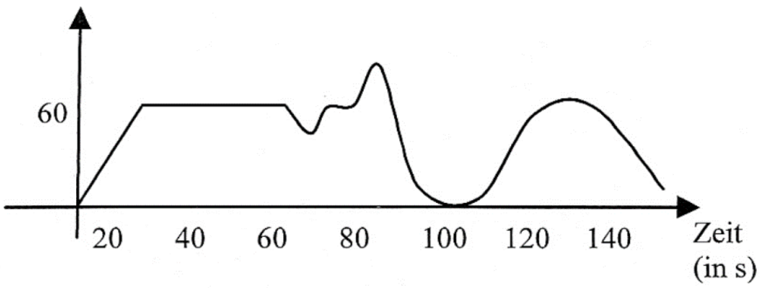


Hier sind für zwei Autofahrten die Verläufe in einer Wertetabelle und in einem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm dargestellt:

Daniel:

Zeit in s	Geschwindigkeit in km/h
8	0
8	18
20	18
26	0
40	0
60	36
69	45
76	45
80	27
90	27
100	27
120	54
130	54
140	0

Sina:



a) Schreiben Sie zu einer der beiden Fahrten stichwortartig einen Bericht, wie sie abgelaufen sein könnte.

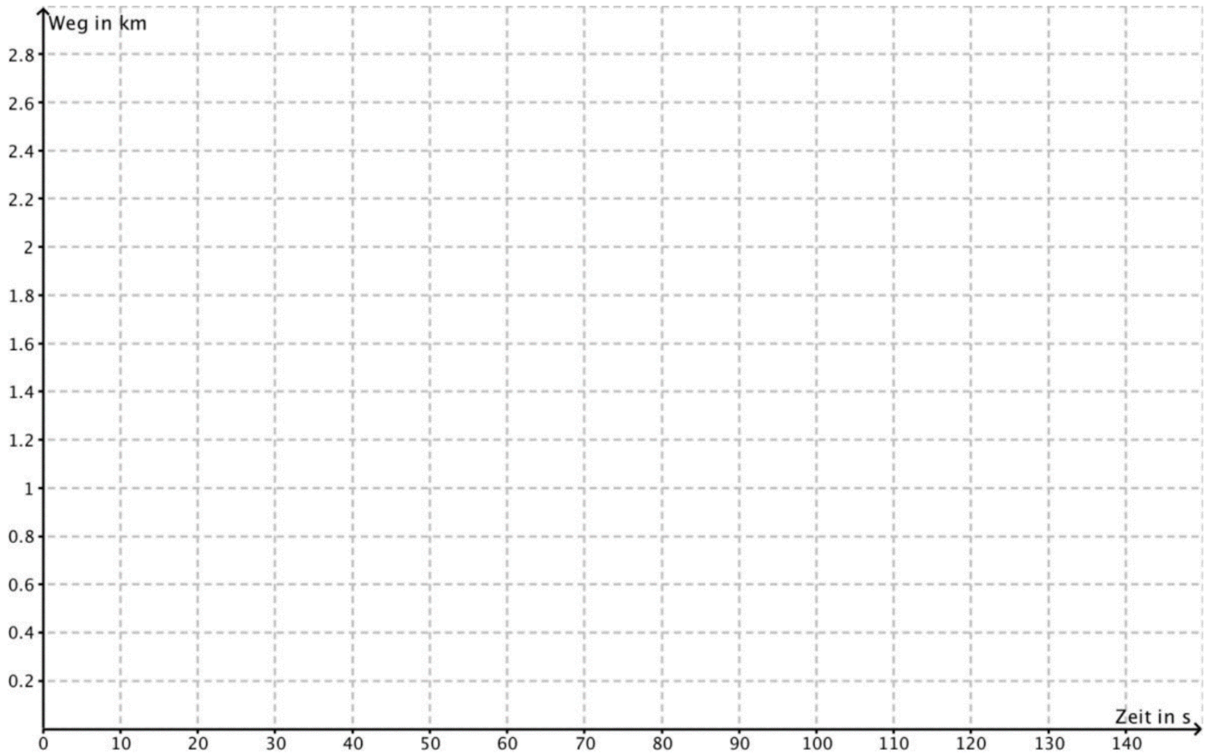
b) Zeichnen Sie zu Daniel‘s Fahrt ein Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm.

c) Bestimmen Sie näherungsweise die zurückgelegten Strecken.

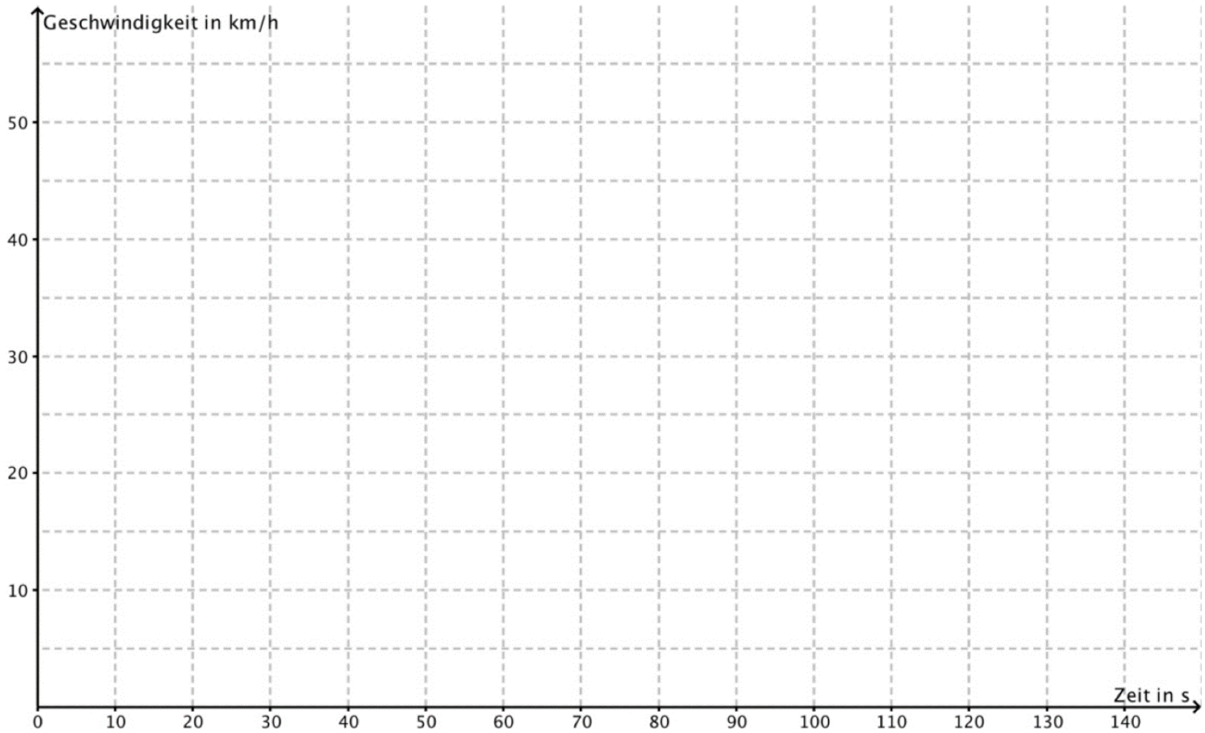
d) Skizzieren Sie für Daniel und für Sina ein Weg-Zeit-Diagramm.

Hilfen zu „Rote Welle – Stopp and Go“:

Zu a):



Zu b):



Der Integralbegriff

zu a)

Welche Informationen können Sie aus der Tabelle und aus dem Diagramm entnehmen?

zu b)

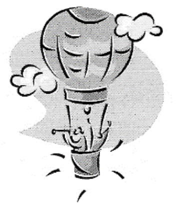
Zu welchen Zeitpunkten standen die Autos vermutlich vor einer roten Ampel?

zu c)

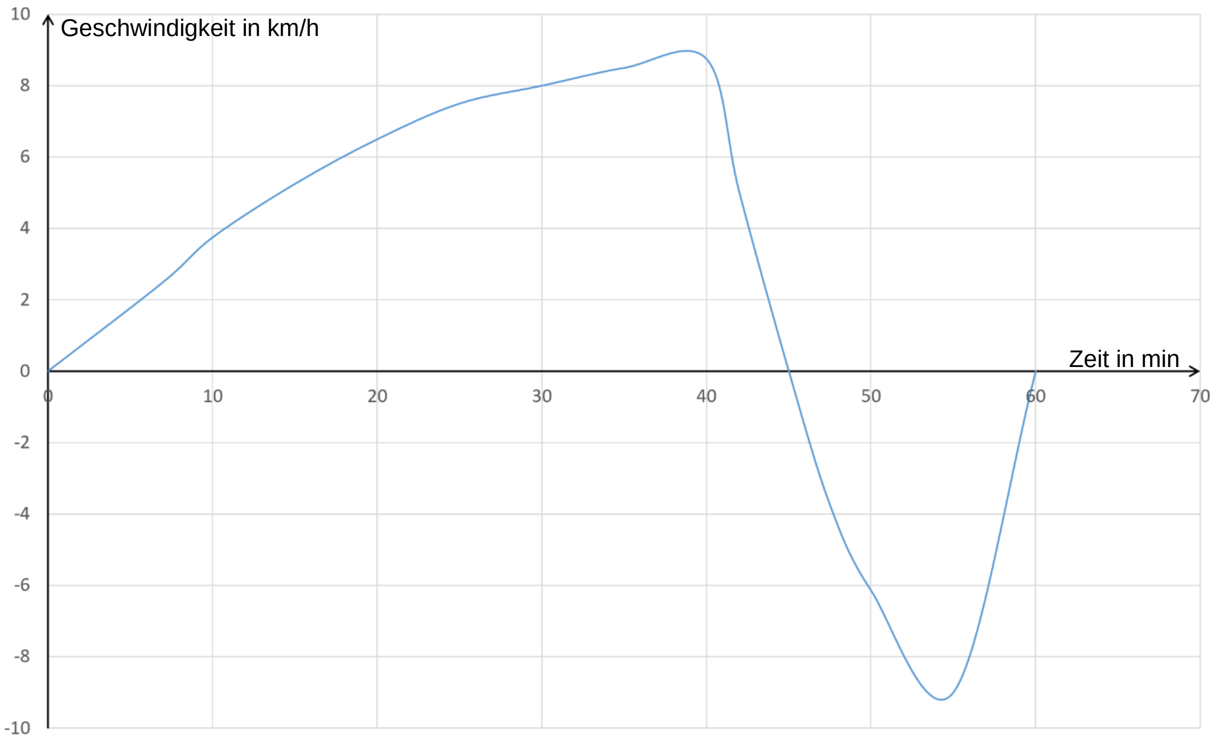
Welche Strecke hat Sina im Zeitraum zwischen 40s und 60s zurückgelegt?
Welche Strecke ist Daniel im gleichen Zeitraum gefahren? Achten Sie auf die Einheiten (km/h und s).

Heißluftballon

Ein Heißluftballon startet zum Zeitpunkt t = 0 min vom Boden.



Das Diagramm beschreibt die Geschwindigkeit des Ballons in vertikaler Richtung.



a) Beschreiben Sie den Bewegungsablauf qualitativ (ohne Rechnung).

b) Beschreiben Sie nun die Beschleunigung des Ballons ebenfalls qualitativ.

c) Geben Sie eine sinnvolle Schätzung für den Höhenunterschied des Landungsortes zum Abflugort.

d) Skizzieren Sie das Diagramm Zeit → Höhenunterschied zum Abflugort des Heißluftballons in ein geeignetes Koordinatensystem.

Der Integralbegriff

Hilfen zu „Heißluftballon":

Zu a)
Berücksichtigen Sie dazu folgende Fragestellungen:

- In welchen Zeitabschnitten bewegt sich der Ballon nach oben/ unten?
- Zu welchen Zeitpunkten steigt bzw. fällt er am schnellsten?
- Was passiert vermutlich in Zeitpunkten mit $v = 0$?
- Haben Sie eine Idee, wie es zu den abrupten Geschwindigkeitsänderungen bei $t = 40$ min und $t = 58$ min kommt?

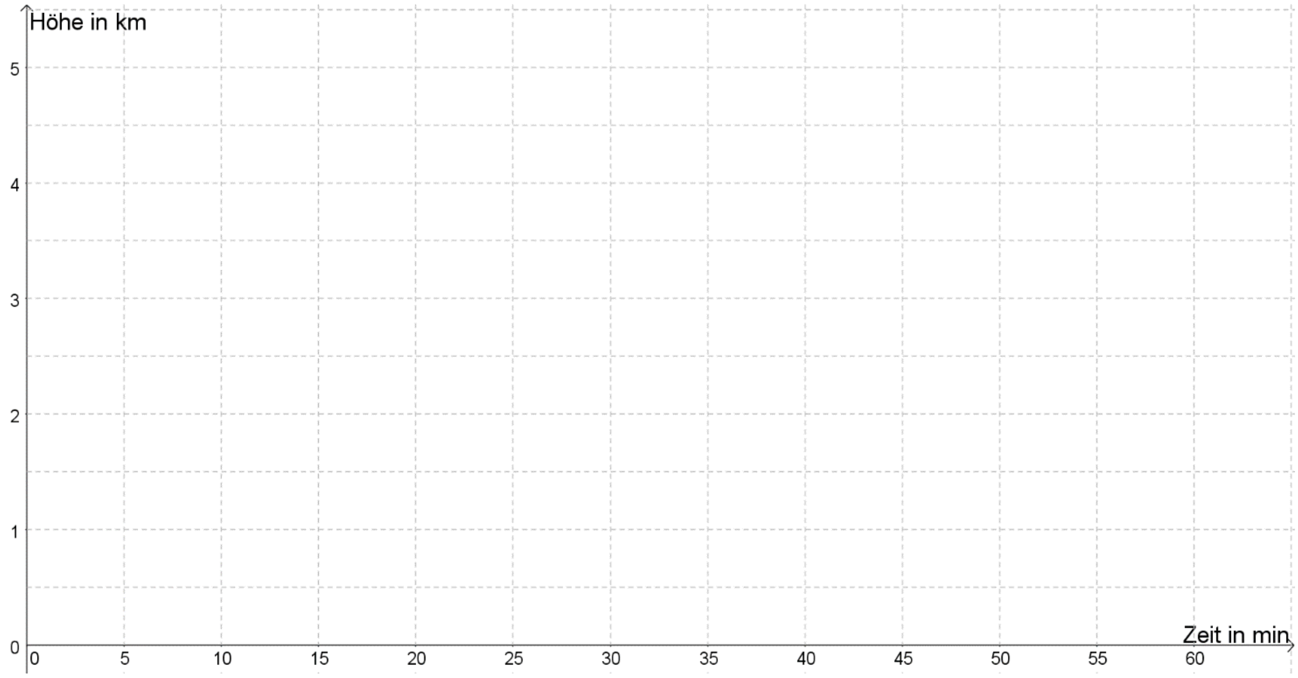
Zu b)
Berücksichtigen Sie dazu folgende Aspekte:

- Wann war die Beschleunigung positiv, negativ, Null, maximal, minimal?
- Was bedeutet positive/negative, maximale/minimale Beschleunigung für den Ballon?

Zu c)
Berücksichtigen Sie folgende Fragen:

- Welche Höhe hat der Ballon nach 30 Minuten erreicht?
- Was war die maximale Steighöhe und wann wurde diese erreicht?
- Woran erkennt man, dass die Ballonfahrt nicht auf der gleichen Höhe endet wie sie begonnen hat?
- Wie groß ist der Höhenunterschied zum Abflugort?

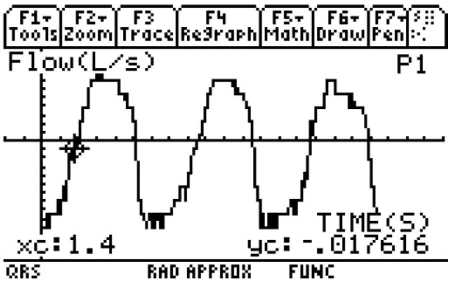
zu d)



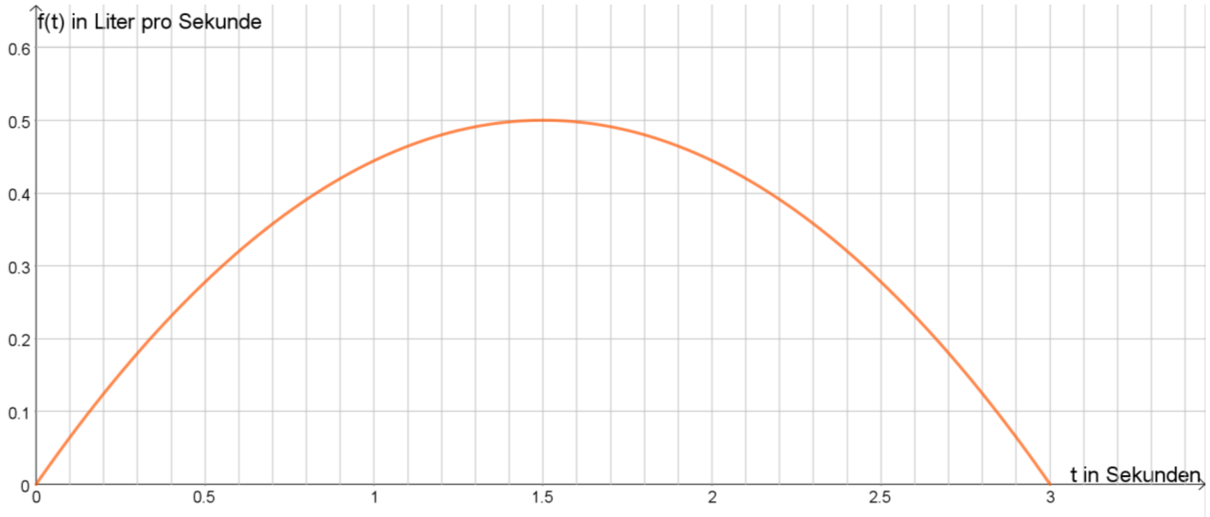
Pneumotachograph / Spirometer

Physiologen verwenden einen „Pneumotachograph bzw. Spirometer“, um die Fließrate f(t) in Liter/Sekunde (= l/s) der Luft beim Ein- und Ausatmen in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden zu messen und anschließend graphisch darzustellen. In das Gerät wird über ein Mundstück ein- bzw. ausgeatmet.

Dadurch baut sich im Gerät eine Druckdifferenz auf, mit der sich die Fließrate der Luft in die Lunge messen lässt. Die Abbildung links zeigt den Graphen einer Originalmessung über mehrere Atemzüge.



Um die Kurve mathematisch nutzen zu können, wurde nur die Einatmungsphase des Probanden durch eine Parabel modelliert (Abbildung unten).



a) Beschreiben Sie den Einatmungsvorgang mit Hilfe des Graphen der Fließrate möglichst genau.

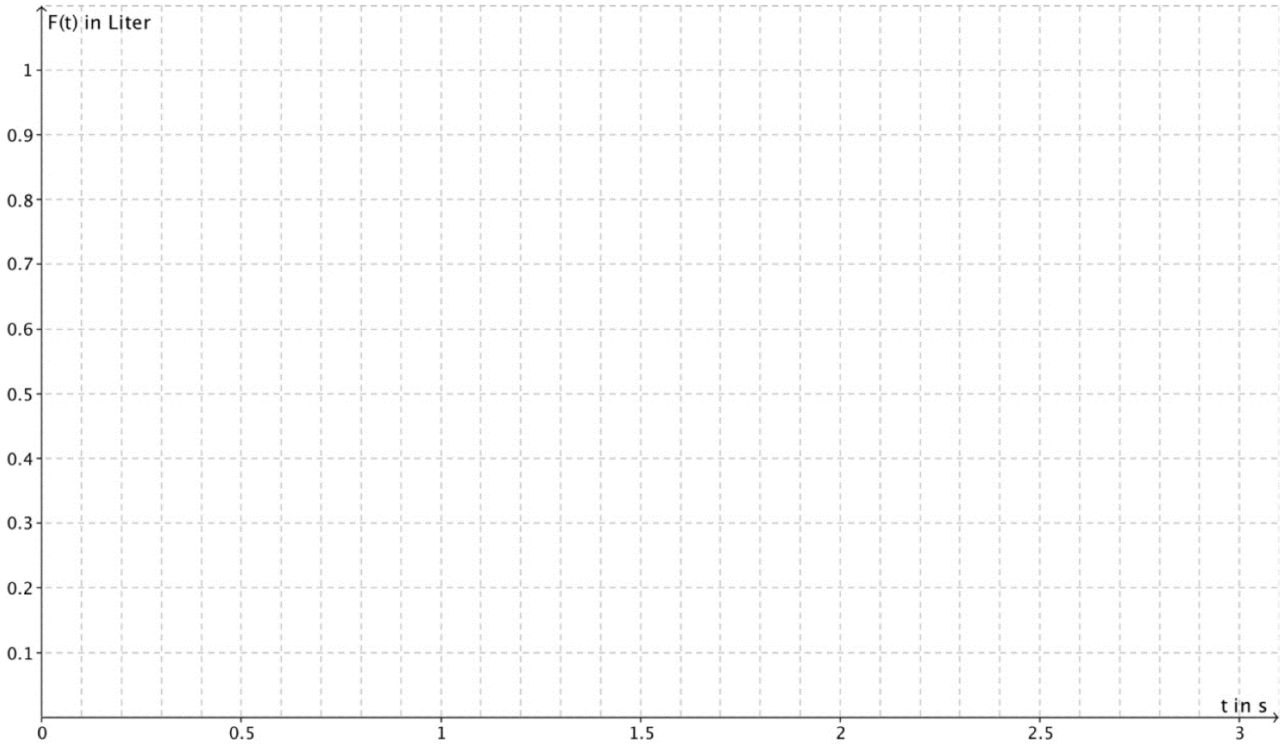
b) Beschreiben Sie die Veränderung der eingeatmeten Luftmenge in Abhängigkeit von der Zeit.

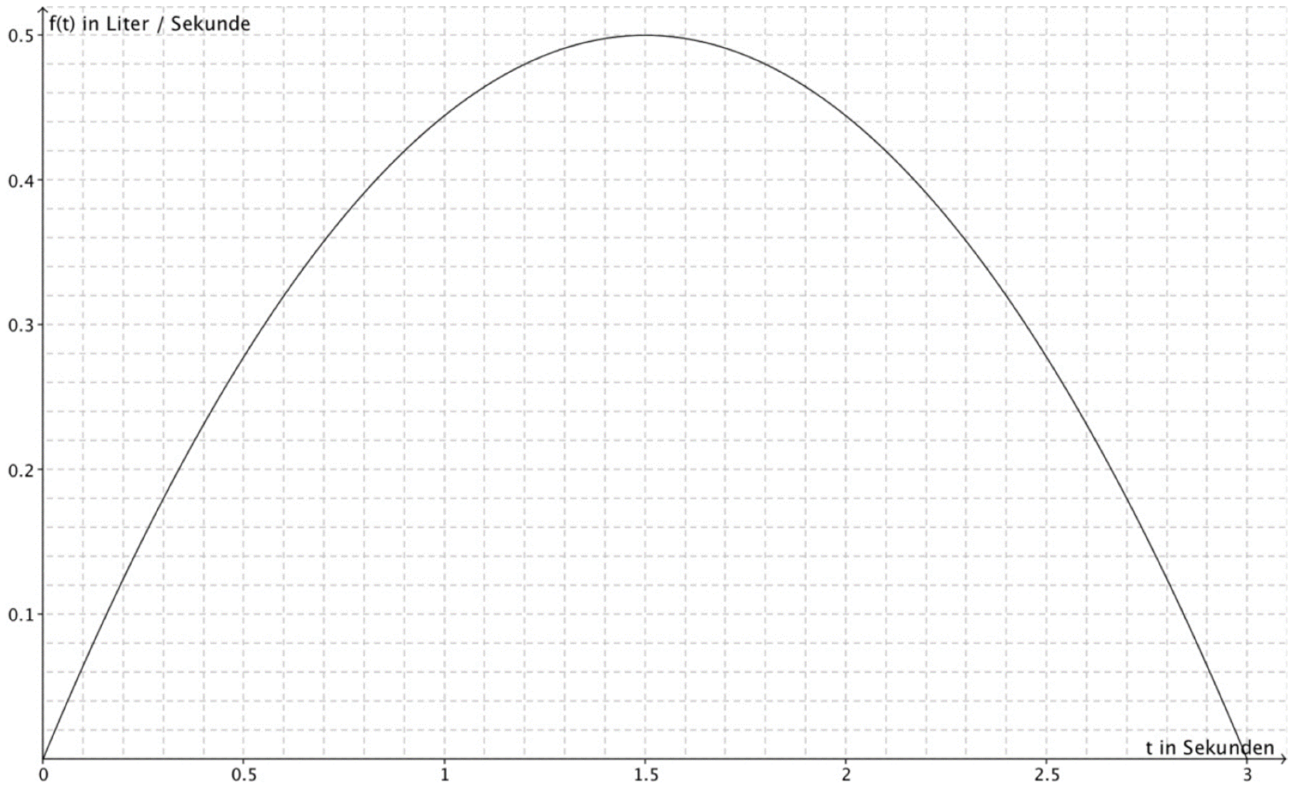
c) Skizzieren Sie die den Verlauf des Graphen der eingeatmeten Luftmenge F(t) in das vorbereitete Koordinatensystem.

d) Vergleichen Sie die Graphen der beiden Funktionen f(t) und F(t).

Hilfen zu „Spirometer“

Zu c)





Zu a)
Berücksichtigen Sie folgende Fragestellungen:

- In welchen Zeitabschnitten nimmt die Fließrate zu / ab?
- An welchen Zeitpunkten steigt bzw. fällt die Fließrate am schnellsten?
- An welchem Zeitpunkt ist die Fließrate maximal / minimal?

Zu b)
Berücksichtigen Sie folgende Fragen:

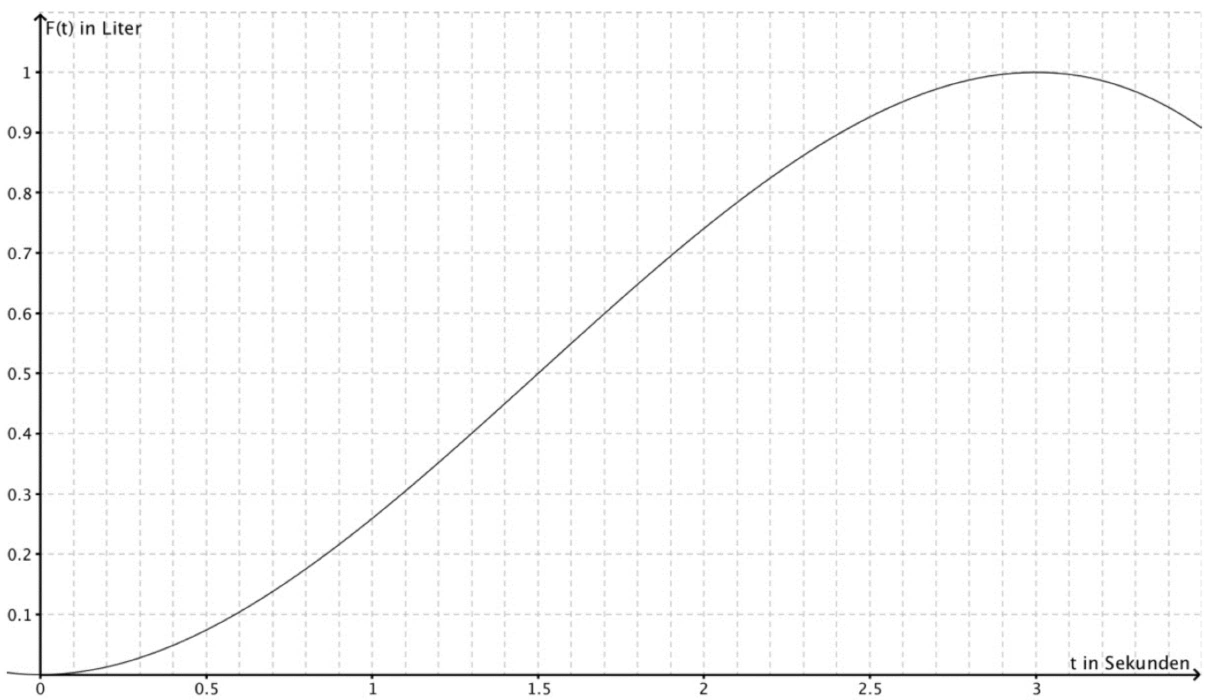
- Wie nimmt die Luftmenge während der Einatmung zu?
- Wann nimmt sie am stärksten / wenigsten zu?
- Wann ist das maximale Volumen erreicht?

Zu c)
Berücksichtigen Sie folgende Aspekte:

- Schätzen Sie die eingeatmete Luftmenge nach 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5 und 3,0 s.
- Zu welchem Zeitpunkt ist die eingeatmete Luftmenge maximal/minimal?
- Wann nimmt die Menge der eingeatmeten Luft F(t) (in Liter) am schnellsten/ langsamsten zu?

Zu d)
Berücksichtigen Sie folgende Aspekte:

- Vergleichen Sie die Steigung der Luftmengenfunktion F(t) mit der Fließrate f(t).
- Vergleichen Sie den Wendepunkt der Funktion F(t) mit dem Hochpunkt der Funktion
  f(t).



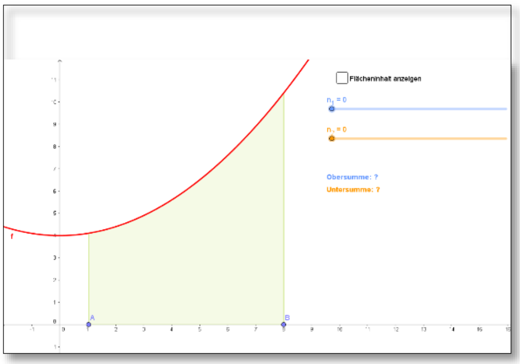
Der Integralbegriff

Unterrichtsmaterial M2

Von der Produktsumme zum Integral

Bearbeiten Sie die Aufgaben auf diesem Arbeitsblatt in der vorgegebenen Reihenfolge.

Öffnen Sie zunächst die Geogebra-Datei Produktsummen1.ggb



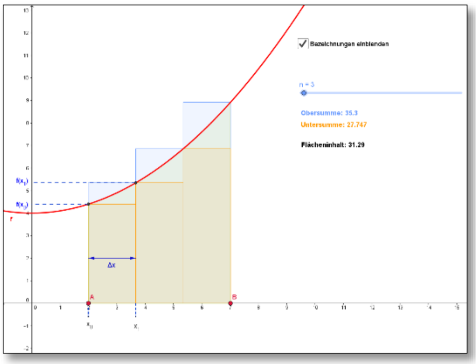
Aufgaben:

1. Verändern Sie zunächst den Wert von n_1 und anschließend den Wert von n_2 und dokumentieren Sie ihre Beobachtungen.
   (mögliche Beobachtungsaspekte: Was bewirkt eine Veränderung von n_1 bzw. n_2? Wie verändert sich die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke? Gibt es einen Zusammenhang zur eingezeichneten Fläche unter dem Graphen?)

2. Blenden Sie den Wert des Flächeninhaltes ein (Klicken auf das Auswahlkästchen). Verändern Sie anschließend sowohl n_1 und n_2. Welche Beziehung von Ober- und Untersumme zum Flächeninhalt ist zu vermuten?

Öffnen Sie zunächst die Geogebra-Datei Produktsummen2.ggb

Blenden Sie die Bezeichnungen ein. (Klicken auf das Auswahlkästchen)



3. Erklären Sie den Zusammenhang der folgenden beiden Produktsummen mit Hilfe der Darstellung in der Geogebra-Datei.

$$s_n = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$$

$$S_n = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

TIPP: Flächeninhalte der Rechtecke betrachten

4. Wie verhalten sich beide Summen, wenn man n unendlich groß werden lässt und dadurch beliebig schmale Teilintervalle entstehen?

Unterrichtsmaterial M3

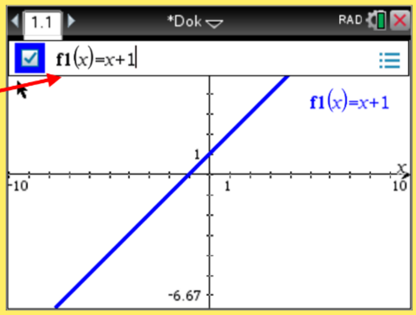
für TI Nspire CX

Aufgabenbeschreibung:

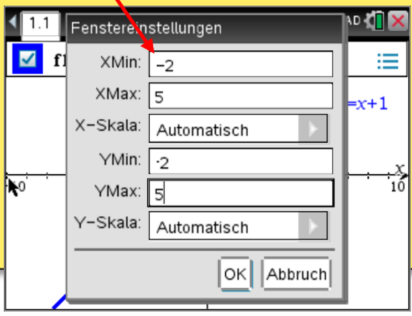
Die folgenden Seiten enthalten die detaillierten Arbeitsanweisungen zur Aufgabenstellung.
Alle notwendigen Schritte werden anhand einer Beispielfunktion erläutert.
Bitte führen Sie alle diese Schritte mit der Beispielfunktion durch.
In der Aufgabe wird dann von Ihnen verlangt, diese Schritte auch für andere Funktionen eigenständig durchzuführen.

1

Geben Sie die angegebene Funktion in Ihren GTR ein und lassen Sie den Graphen zeichnen.



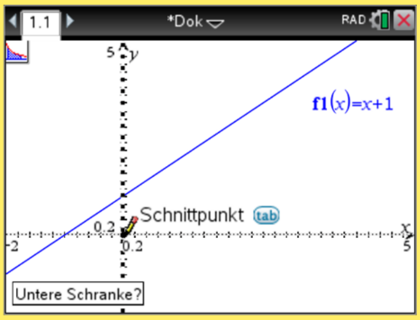
Funktion:
$f(x) = x + 1$
Ausschnitt Koordinatensystem:
$-2 \le x \le 5\,;\; -2 \le y \le 5$

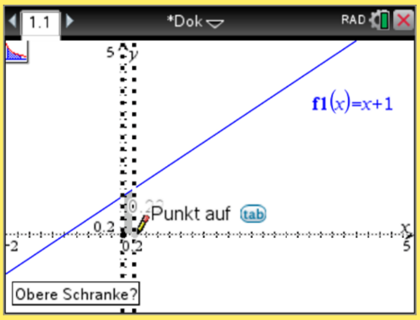


Stellen Sie anschließend den angegebenen Ausschnitt für das Koordinatensystem ein.
menu > *Fenster/Zoom* > *Fenstereinstellungen*

2

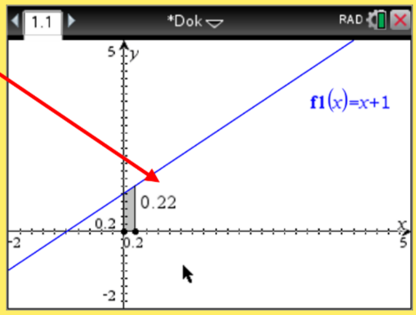
Wählen Sie den folgenden Menüeintrag aus:
menu > *Graph analysieren* > *Integral*
Markieren Sie anschließend als untere Schranke den Koordinatenursprung (x=0) und als obere Schranke einen Punkt der nahe am Koordinatenursprung liegt.





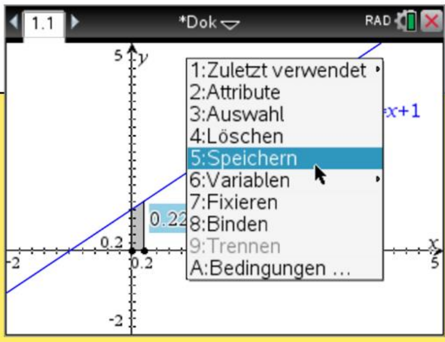
3

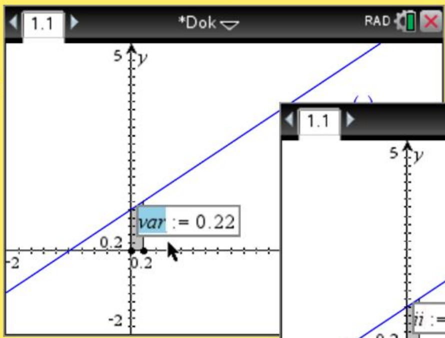
Die jetzt zusätzlich angegebene Zahl (hier: 0,22) gibt den **Flächeninhalt** der Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse (graue Fläche) an.

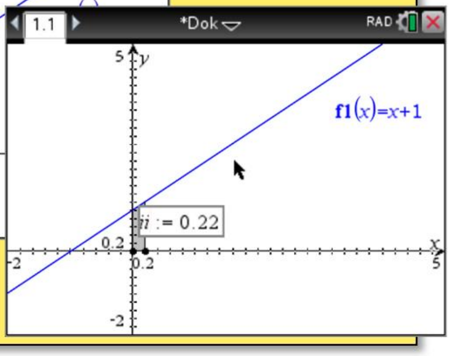


Diese Angabe des Flächeninhaltes wird jetzt in einer Variablen gespeichert.
Klicken Sie dazu mit dem Pfeil <u>einmal</u> auf diese Zahl (Zahl wird farbig hinterlegt).
Drücken Sie anschließend auf ctrl + menu, und wählen sie *Speichern*.

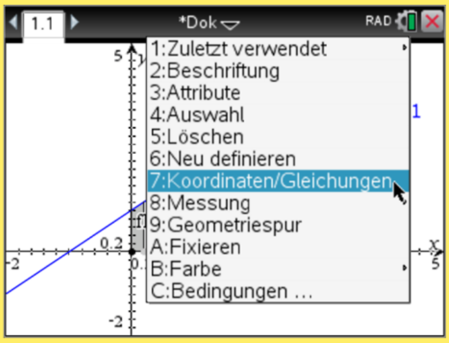
Ersetzen Sie den Variablennamen durch „***ii***" (s. Abb.).







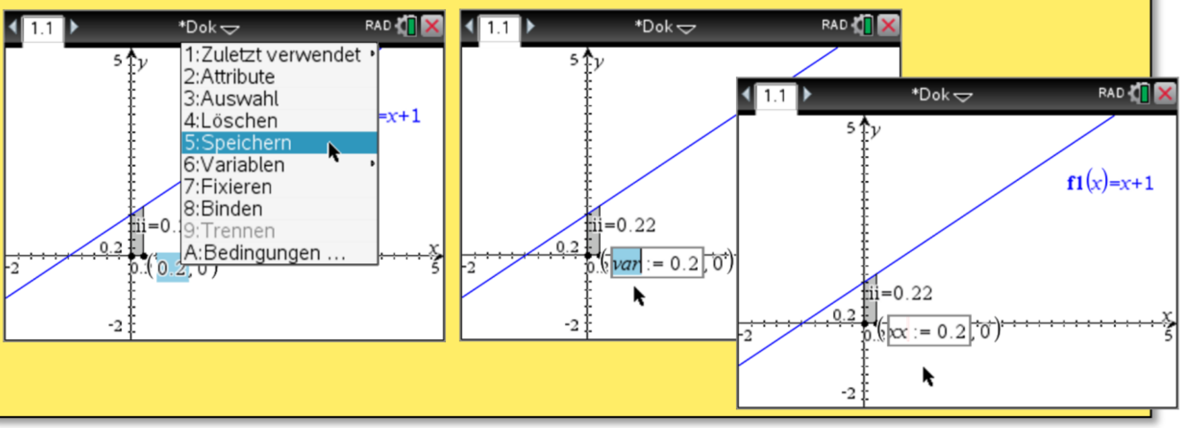
4



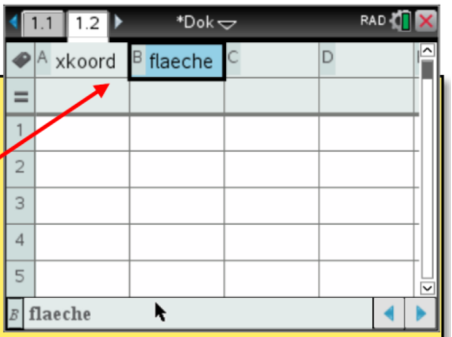
Der x-Wert der oberen Grenze des Integrals wird ebenfalls in einer Variable gespeichert. Erfassen Sie dazu den Punkt der oberen Schranke auf der x-Achse mit dem Zeiger/Hand und drücken dann auf ctrl + menu und wählen *Koordinaten und Gleichungen*.
Die Koordinaten des Punktes werden nun angezeigt.

5

Klicken Sie jetzt mit dem Pfeil <u>einmal</u> auf die x-Koordinate dieses Punktes (wird farbig hinterlegt) und anschließend auf ctrl + menu und wählen sie *Speichern*.
Ersetzen Sie den Variablennamen durch „***xx***" (s. Abb.).



6

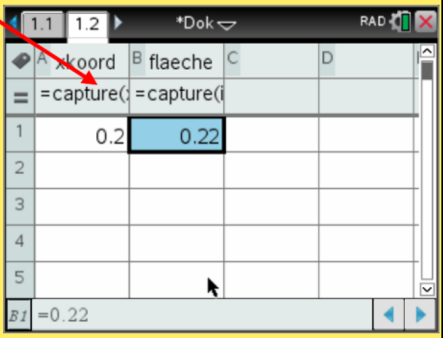


Öffnen Sie jetzt eine Tabelle (Lists&Spreadsheets). Geben Sie der ersten Spalte den Namen „**xkoord**" und der zweiten Spalte den Namen „**flaeche**".

In der Zellen darunter geben Sie folgendes ein:

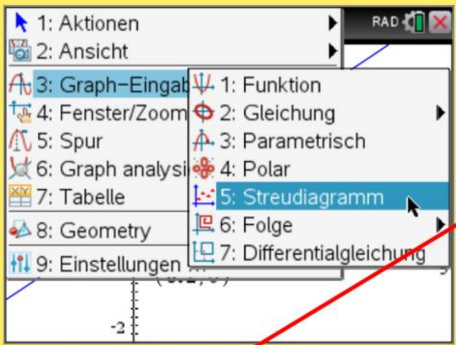
capture(xx,1) in der Spalte xkoord

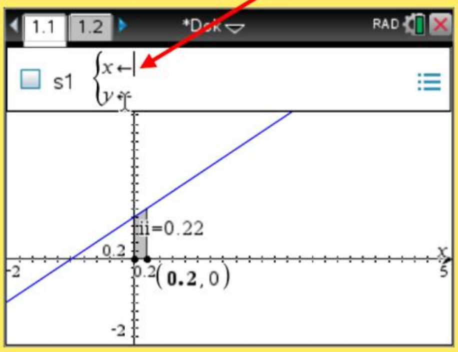
capture(ii,1) in der Spalte flaeche



Durch diesen Befehl werden sowohl die Werte der x-Koordinate der oberen Grenze, als auch die Werte der Größe der zugehörigen Fläche automatisch in die entsprechende Spalte geschrieben.
(hier: obere Grenze zurzeit bei 0,2;
Flächeninhalt beträgt 0,22 [FE])

Wird die obere Grenze durch ziehen des Punktes auf der x-Achse verändert (geschieht später), dann wird die Tabelle mit weiteren Wertepaaren angefüllt.



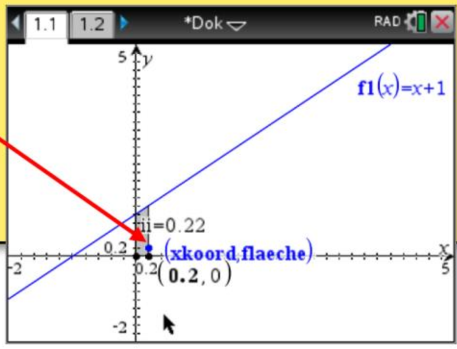


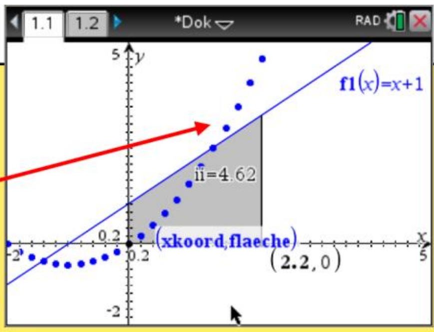
7

Wählen Sie im Graph-Modus den folgenden Menüeintrag aus:

menu *> Graph-Eingabe/Bearbeitung > Streudiagramm*

Anschließend wird verlangt für x und y Zuordnungen durchzuführen.
Bei x geben Sie hinter dem Pfeil „**xkoord**" und bei y geben Sie hinter dem Pfeil „**flaeche**" ein.
Dies sind die bereits definierten Spaltennamen.
Durch diesen Schritt werden die Wertepaare der Tabelle als Punkte im Koordinatensystem dargestellt.
Zurzeit wird nur ein Punkt dargestellt.



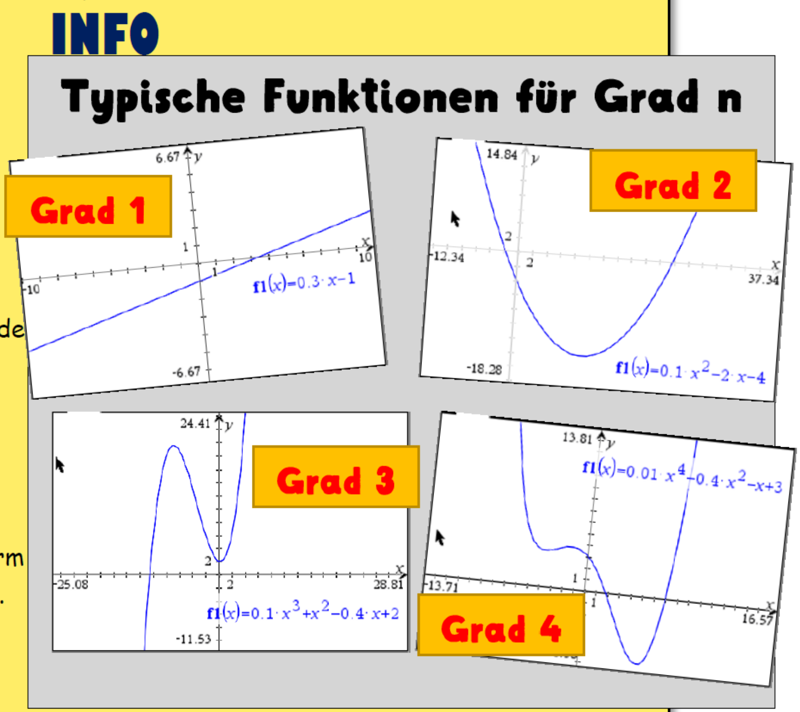


8

Erfassen Sie nun den Punkt der oberen Schranke auf der x-Achse mit dem Zeiger/Hand und ziehen Sie ihn <u>einmal</u>* nach rechts und links über die x-Achse.
Es entsteht eine Spur aus Punkten, an denen man jeweils zu einer bestimmten oberen Schranke den Flächeninhalt der grauen Fläche direkt ablesen kann.
Die Spur lässt einen funktionalen Zusammenhang vermuten, es sieht aus, als würden diese Punkte auf einem Funktionsgraph liegen.
Würde man den Funktionsterm kennen, dann wäre es möglich mit seiner Hilfe den Flächeninhalt der jeweiligen grauen Fläche direkt zu bestimmen.

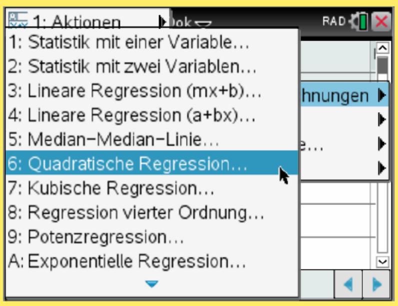
9

Um den Funktionsterm zu ermitteln, müssen sie sich zunächst darüber Gedanken machen, welchen Grad die gesuchte Funktion haben könnte.
Die abgebildete Übersicht kann dabei eine Hilfe sein.



In unserem Fall sieht die Spur der Punkte aus, als würde sie auf einer **Funktion vom Grad 2** (Parabel) liegen.

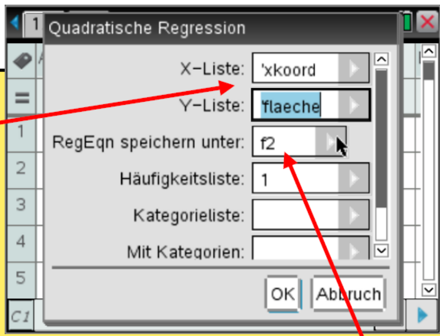
Wir lassen den GTR auf Grundlage dieser Vermutung einen möglichen Funktionsterm durch Regression bestimmen. Wechseln Sie dazu auf die Tabellenansicht und wählen den folgenden Menüeintrag aus: menu > *Statistik > Statistische Berechnungen > Quadratische Regression*



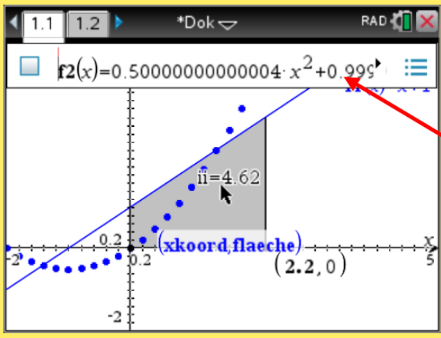
Sollten Sie Funktionen mit einem anderen Grad vermuten, wählen sie die entsprechende Regression:

Grad 1 → Lineare Regression (mx+b)
Grad 2 → Quadratische Regression
Grad 3 → Kubische Regression
Grad 4 → Regression vierter Ordnung

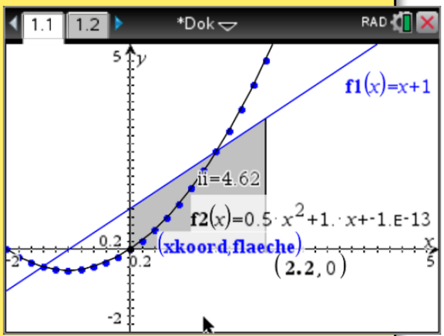
10



Bei X-Liste geben Sie „**xkoord**“ und bei Y-Liste geben Sie „**flaeche**“ ein. Damit werden die x-Werte und die y-Werte für die Regression zugeordnet. Drücken Sie anschließen auf OK.



Die durch Regression ermittelte Funktion wird unter dem angegebenen Funktionsnamen abgespeichert und ist im Graph-Modus abrufbar.



Setzen Sie einen Haken bei dieser Funktion und lassen Sie sich den Graphen anzeigen.
Im Graphik-Fenster wird jetzt auch der Funktionsterm der bestimmten Funktion angezeigt.
(hier: $f_2(x) = 0{,}5x^2+1x$)
Der hinten noch erscheinende Wert beruht auf Rundungsfehlern des Rechners und ist zu vernachlässigen ($-1.E-13 = -1 \cdot 10^{-13} = -0{,}0000000000001$).

Aufgabenstellung

1) Wählen Sie einen Zettel mit drei Funktionen aus.
2) Führen Sie nacheinander jeweils alle 10 Schritte der Aufgabenbeschreibung mit diesen Funktionen durch.
3) Tragen Sie den durch Regression ermittelten Funktionsterm in die richtige Zeile der nachfolgenden Tabelle ein.
4) Versuchen Sie einen Zusammenhang zwischen dem Funktionsterm der Ausgangsfunktion und der Flächenfunktion zu entdecken, der für alle untersuchten Funktionen gilt.
5) Versuchen Sie die Funktionsterme der Flächenfunktionen der ebenfalls in der Tabelle angegeben Ausgangsfunktionen anzugeben ohne den GTR zu nutzen.
6) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Ergebnisse ihrer Tisch-/Gruppenpartner.

	f(x)	Flächenfunktion F(x)
1.	$f(x) = x + 1$	$f(x) = 0{,}5x^2 + x$
2.	$f(x) = -2x + 5$	
3.	$f(x) = 3x + 2$	
4.	$f(x) = 4x - 6$	
5.	$f(x) = -4x - 4$	
6.	$f(x) = 4x$	
7.	$f(x) = 6$	
8.	$f(x) = -x^2 + 4x + 5$	
9.	$f(x) = 6x^2 - 6x$	
10.	$f(x) = -x^2 + 2x + 1$	
11.	$f(x) = 9x^2 - 8x + 2$	
12.	$f(x) = -3x^2 + 2$	
13.	$f(x) = 3x^2 + 4x - 3$	
14.	$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x - 1$	
15.	$f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 7$	
16.	$f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 8x + 9$	
17.	$f(x) = -10x^3 + 6x^2 + 6x + 1$	
18.	$f(x) = -8x^3 - 9x^2 + 8x + 9$	
19.	$f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$	

1	2
$f(x) = -2x + 5$ $-1{,}5 \le x \le 6\ ;\ -4 \le y \le 7$ $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ $-4 \le x \le 8\ ;\ -35 \le y \le 35$ $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x - 1$ $-5 \le x \le 2\ ;\ -22 \le y \le 12$	$f(x) = -4x - 4$ $-3 \le x \le 2\ ;\ -11 \le y \le 2.5$ $f(x) = 9x^2 - 8x + 2$ $-0{,}5 \le x \le 1{,}5\ ;\ -1 \le y \le 1$ $f(x) = -10x^3 + 6x^2 + 6x + 1$ $-1{,}5 \le x \le 2\ ;\ -3 \le y \le 6$
3	**4**
$f(x) = 6$ $-1 \le x \le 2\ ;\ -2 \le y \le 9$ $f(x) = 6x^2 - 6x$ $-1 \le x \le 2\ ;\ -2 \le y \le 2$ $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 7$ $-2 \le x \le 8\ ;\ -52 \le y \le 10$	$f(x) = 4x$ $-1 \le x \le 2{,}5\ ;\ -2 \le y \le 10$ $f(x) = -3x^2 + 2$ $-1{,}5 \le x \le 2\ ;\ -2 \le y \le 2$ $f(x) = -8x^3 - 9x^2 + 8x + 9$ $-2 \le x \le 2\ ;\ -9 \le y \le 11$
5	**6**
$f(x) = 4x - 6$ $-1 \le x \le 4\ ;\ -7 \le y \le 5$ $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ $-2{,}5 \le x \le 4{,}5\ ;\ -8 \le y \le 8$ $f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 8x + 9$ $-2 \le x \le 3\ ;\ -8 \le y \le 10$	$f(x) = 3x + 2$ $-3 \le x \le 3;\ -2 \le y \le 9$ $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$ $-4 \le x \le 2\ ;\ -5 \le y \le 7$ $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ $-2 \le x \le 2\ ;\ -2 \le y \le 4$

Unterrichtsmaterial M4

Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung

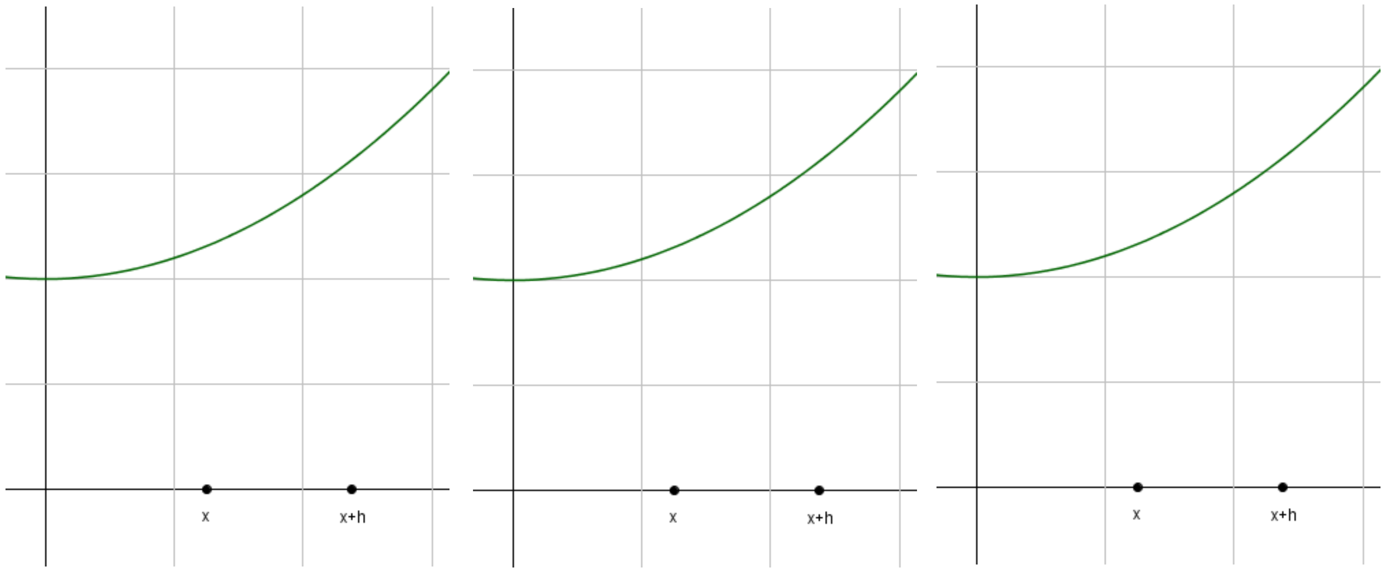
Als bekannt vorausgesetzt: $\int_a^b f(x)dx = A_0(b) - A_0(a)$; A(x) ist Flächeninhaltsfunktion

f wird als streng monoton steigend vorausgesetzt.

Zu zeigen: $A_0'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A_0(x+h) - A_0(x)}{h} = f(x)$ bzw. die Flächeninhaltsfunktion ist Stammfunktion

Beweis: Betrachte den Nenner des Differenzenquotienten: $A_0(x+h) - A_0(x)$

1. Kennzeichne den durch die Differenz beschriebenen Flächeninhalt im mittleren Schaubild (Hilfe 1)



2. Der in 1. beschriebene Flächeninhalt soll jeweils durch ein Rechteck identischer Breite nach unten und nach oben abgeschätzt werden. Zeichne das Rechteck, das den Flächeninhalt nach unten abschätzt, in das linke Schaubild, das nach oben abschätzende in das rechte Schaubild. (Hilfe 2)

3. Bestimme die Terme mit denen jeweils die Flächeninhalte der beiden Rechtecke beschrieben werden und setze sie in der Ungleichung ein. (Hilfe 3)

$$\boxed{} \leq A_0(x+h) - A_0(x) \leq \boxed{} \quad |:$$

$$\boxed{} \leq \frac{A_0(x+h) - A_0(x)}{h} \leq \boxed{} \quad |\lim_{h \to 0}$$

$$\boxed{} \leq \boxed{}\frac{A_0(x+h) - A_0(x)}{h} \leq \boxed{}$$

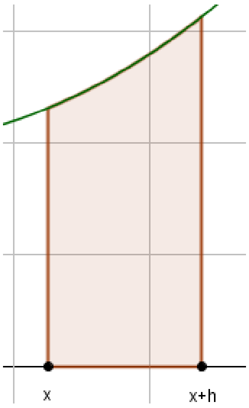
$$\boxed{} \leq \boxed{}\frac{A_0(x+h) - A_0(x)}{h} \leq \boxed{}$$

Daraus folgt:

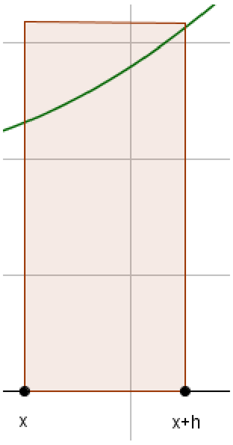
$$\lim_{h \to 0} \frac{A_0(x+h)-A_0(x)}{h} =$$

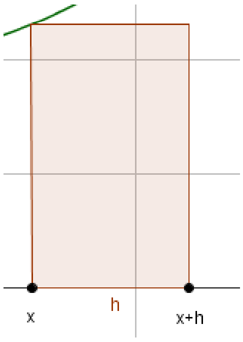
q.e.d.

Hilfe 1:



Hilfe 2:





Hilfe 3: $f(x) \cdot h$ $f(x+h) \cdot h$