„Warm-ups 4“

Die Grundkonzeption einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft bleibt selbstverständlich in das Er­mes­sen des jeweiligen Fachlehrers gestellt. Basierend auf den Grundüberlegungen von Helmut König, die in der Grunddokumentation unserer Arbeitsgruppe noch einmal präzisiert wurden, bietet es sich aber an, jede Arbeitsstunde mit einem „Warm-up“ zu beginnen, so dass die Schülerinnen und Schüler aus dem regulären Schulalltag in die Atmosphäre einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft ankom­men können und damit die Bereitschaft geweckt wird, sich auf die nachfolgende intensivere Beschäf­ti­gung mit einem Themengebiet wie Kryptogrammen oder geometrischen Fragestellungen einzulas­sen. Vergleichbar sind diese „Warm-ups“ – auch wenn Vergleiche dieser Art immer hinken – mit dem Warm­machen vor dem Sportunterricht oder den „Energizern“, die im Lions-Quest-Programm vor den eigent­lichen Inhalt der jeweiligen Stunde gestellt werden.

Selbstverständlich ist die Verwendung eines „Warm-ups“ nicht obligatorisch und es bietet sich auch nicht an, mehrere „Warm-ups“ nacheinander innerhalb einer AG-Stunde zu verwenden. Im Mittel­punkt sollte immer die Beschäftigung mit einem der umfassenderen und erweiterbaren Themen­kom­ple­xe stehen, die aus dem Bereich der Mathematik-Olympiade stammen. Das bedeutet natürlich nicht, dass auch diese „Warm-ups“ zu größeren Themenkomplexen ausgebaut werden können, die eben­falls eine intensive mathematische Strukturierung und Beschäftigung erlauben. Das ist aber nicht die Intention der hier vorgestellten Materialien.

Die Liste, die unten vorgestellt wird, speist sich aus vielen verschiedenen Quellen und erhebt selbst­ver­ständlich keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Gerade aus dem Bereich des Känguru-Wettbe­werbs lassen sich sehr viele Aufgaben als „Warm-up“ generieren, die viele interessante Anwendungs­mög­lichkeiten bieten. Auch die hier vorgestellten Beispiele aus dem Bereich der „black stories“ bein­hal­ten noch sehr viele weitere interessante Beispiele. Weiterhin sind in den einschlägigen Kno­bel­bü­chern – etwa von Sam Lloyd oder Martin Gardner – oder mathematischen Zeitschriften ebenfalls vie­le interessante Aufgaben enthalten.

Viele dieser hier vorgestellten „Warm-ups“ fördern Kompetenzen, die nicht ursächlich mathematisch er­scheinen mögen. Gefördert werden aber immer Fähigkeiten, die auch bei der Bearbeitung mathe­ma­tischer Sachverhalte sehr hilfreich sind. Allein die intensive Kommunikation über bestimmte In­hal­te, die genaue Beschreibung und nachfolgende Präzisierung vorgestellter Gedanken oder die Fä­hig­keit zu argumentieren dienen in vielen mathematischen Situationen dazu, seine Gedanken noch ein­mal neu zu strukturieren und Sachverhalte zu hinterfragen, die vielleicht implizit (oder sogar fälsch­li­cher­weise) als gegeben angenommen wurden, in Wirklichkeit aber entweder unerheblich oder sogar ir­re­führend sind.

Gerade diese Aufgaben bieten sich alle als vollkommen voraussetzungsfrei zu bearbeitende Aufgaben an. Deshalb sollten bei der Eingabe der Aufgaben keine weiteren Tipps gegeben werden, sondern al­lei­ne aus der Aufgabenstellung heraus die Ideen der Schülerinnen und Schüler entwickelt werden. Da­zu kann am besten die Aufgabe zu Beginn der AG-Stunde per Folie oder per Whiteboard ohne weitere Ansage projiziert werden.

Man kann diese Aufgaben auch als bewussten Gegenpol zu den die Diskussion und Kommunikation för­dernden Aufgaben aus der Mathematik-Olympiade einsetzen, indem sie innerhalb der ersten Mi­nu­ten einer Arbeitsgemeinschaft auf Schnelligkeit bearbeitet werden. Dabei sollte die Schülerin oder der Schüler, der meint, eine Lösung zu haben, diese der Lerngruppe vorstellen. Wenn diese falsch ist oder es Ergänzungen gibt, können diese selbstverständlich im Anschluss vorgestellt werden. Es sollte aber nicht so sein, dass die Bearbeitung und Diskussion dieser „Warm-ups“ deutlich mehr als 10 Mi­nu­ten einnehmen.

Selbstverständlich ist die hier angegebene Reihenfolge der „Warm-ups“ weder verbindlich noch in ir­gend­einer Weise nach Schwierigkeit geordnet. Sie können je nach Bedarf oder Vorlieben kombiniert oder auch weggelassen werden. Viel Vergnügen mit den hier vorgestellten Beispielen, die alle schon in­nerhalb von mathematischen Arbeitsgemeinschaften erprobt worden sind.

**Warm-up 77: Eine hundertprozentige Einsparung?**

Nehmen wir einmal an, es gäbe drei neue Methoden, Energie einzusparen. Die erste Me­tho­de würde 30%, die zweite 45% und die dritte 25% einsparen. Wenn man jetzt alle Methoden gleichzeitig anwendet, spart man damit also 100% Energie ein, oder etwa doch nicht?

Lösung:

Das wäre leider zu schön, um wahr zu sein. Wenn die Einsparmethoden auf verschiedenen und von­einan­der unabhängigen Voraussetzungen beruhen, wird der Verbrauch maximal herabgesetzt. Bei einem angenommen Verbrauch von 100 Einheiten würde also der Verbrauch zunächst auf 70% von 100, also auf 70 Einheiten herabgesetzt. Danach erspart man sich 45%, es verbleiben also 55% von 70 = 38,5 Einheiten. Zum Schluss reduziert man den Verbrauch auf 75% von den verbleibenden 38,5 Ein­hei­ten, das ergibt 28,875 Einheiten. Die Ersparnis wäre dann also insgesamt100% - 28,875% = 71,125%. Auf die Reihenfolge des Einsatzes der Methoden kommt es selbstverständlich bei Unabhän­gig­keit nicht an. Vermutlich werden allerdings die Wirkungen der ver­schiedenen Methoden doch teil­wei­se auf denselben Voraussetzungen beruhen, so dass die Wirkung der Methoden ähnlich groß ist wie die der wirksamsten Methode, also 45%.

**Warm-up 78: Welche Kiste ist schwerer?**

Es gibt zwei würfelförmige Kisten, gefüllt mit Kugeln aus gleichem Material. Im ersten Kasten befinden sich 27 gleich große Kugeln und im zweiten 64 kleinere, aber untereinander gleich gro­ße Kugeln. In beiden Kisten liegen die Kugeln dicht bis oben, so dass sich in jeder Schicht die gleiche Anzahl befindet und dass die äußeren Kugeln die Kistenwände berühren. Wenn man den Deckel schließen würde, würde auch der Deckel jeder Kiste von den Kugeln der ober­sten Schicht berührt. Welche Kiste ist schwerer?

Lösung:

Weil die Kisten würfelförmig sind, liegen in der ersten Kiste drei und in der zweiten Kiste vier Kugeln in einer Reihe. Die Kantenlänge der beiden Kisten ist gleich, demnach ist der Durchmesser einer gro­ßen Kugel mal so groß wie der Durchmesser einer kleinen Kugel und damit ihr Volumen bzw. ihr Ge­wicht mal so groß wie bei einer kleinen Kugel, da Volumen bzw. Gewicht proportional zur drit­ten Potenz des Durchmessers sind. Also ist jede große Kugel mal so schwer wie eine kleine, aber da­für gibt es auch im gleichen Verhältnis mehr kleine Kugeln in einer Kiste wie große. Die Kisten sind also bei­de gleich schwer. (Selbstverständlich wird diese Berechnung von den Schülerinnen und Schülern nicht explizit verlangt werden können. Es ist aber bestimmt interessant zu sehen, welche Argumente für die Begründung der einen oder anderen Behauptung von ihnen aufgestellt werden. Die Lehrkraft kann die exakte Begründung gerne auch in Nachhinein mit den Schülerinnen und Schülern bespre­chen.)

**Warm-up 79: Der Mittelpunkt eines Kreises**

Wie findet man mit Hilfe eines Zeichendreiecks ohne jegliche Maßeinteilung und eines Blei­stifts den Mittelpunkt eines Kreises? Natürlich darf der Bleistift nur zum Zeichnen von Hilfs­li­ni­en benutzt werden.

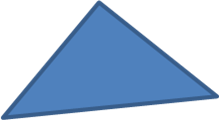
C

B

A

Lösung:

Man legt das Zeichendreieck so auf den Kreis, dass die Ecke mit dem rechten Winkel auf einem be­lie­bi­gen Punkt des Dreiecks liegt. Dann sind D und E die beiden Schnittpunkte des Dreiecks mit dem Kreis. Die Strecke bildet dann mit der Umkehrung des Satzes von Thales einen Durchmesser des Kreises. Analog kann man einen beliebigen zwei­ten Durchmesser des Kreises konstruieren. Der Schnittpunkt der beiden Durchmesser ist der ge­suchte Mittelpunkt des Kreises.



D E

**Warm-up 80: Gehaltserhöhung**

Das Monatsgehalt eures Vaters erhöht sich um sagenhafte 30%. Um wie viel Prozent nimmt damit die Kaufkraft zu? Natürlich ebenfalls um 30%. Jetzt kommt erst die eigentliche Frage. Das Gehalt eu­res Vaters bleibt unverändert, aber die Warenpreise werden alle um sagenhafte 30% gesenkt. um wie­viel Prozent steigt in diesem Fall die Kaufkraft?

Lösung:

Wenn man vor der Preissenkung beispielsweise für 1 € Waren im Wert von 1 € kaufen konnte, kann man nach der Preissenkung um 30% für 1 € Waren im Wert von € kaufen. Das sind mehr und das entspricht in etwa 43% mehr Kaufkraft.

**Warm-up 81: Vier aus Vierzehn**

PI

LOT

PLUS

MINUS

ZIFFER

QUADRAT

DIVISION

GLEICHUNG

MATHEMATIK

LOGARITHMUS

STEREOMETRIE

TRIGONOMETRIE

VEKTORRECHNUNG

KUGELAUSSCHNITT

Bei den oben stehenden 14 Wörtern hat jedes einen Buchstaben mehr als das voranstehende. Das letz­te Wort hat 15 Buchstaben. Wenn man mit a, b, c und d die Anzahl der Buchstaben in einem je­weils ausgesuchten Wort bezeichnet, besteht jetzt die Aufgabe darin, vier Wörter auszusuchen, dass sich mit den zugehörigen Buchstabenanzahlen die Gleichungen a² = bd und gleichzeitig ad = b²c er­ge­ben.

Lösung:

Natürlich kann man die Lösung durch Probieren finden: Es ergibt sich als einzige Lösung a=6, b=3, c=8 und d=12 und damit als gesuchte Wörter Ziffer, Lot, Division und Stereometrie.

Der algebraische Beweis ergibt sich, indem man die beiden zu erfüllenden Gleichungen miteinander mul­tipliziert. Es ergibt sich die Gleichung a³d = b³dc und damit nach dem Kürzen a³ = b³c. c muss also ei­ne dritte Potenz einer Zahl sein, damit bleibt als einzige Lösung für c zwischen 2 und 15 die Zahl 8. Da­mit vereinfacht sich die obige Gleichung zu a³ = 8b³ bzw. a = 2b. Da nach der ersten Bedingung a²=bd gilt, ist dann 4b²=bd oder 4b=d. b kann aber nicht 2 sein, weil dann d =8 wäre, was schon durch c belegt ist. b kann auch nicht größer als 3 sein, weil es kein Wort mit 16 oder mehr Buchstaben gibt. Da­mit folgt b=3 und daraus a=6 sowie d=12.

**Warm-up 82: Eine interessante Zahl**

Wenn man vor eine interessante fünfstellige Zahl die Ziffer 1 setzt, erhält man natürlich eine sechs­stel­lige Zahl. Wenn man hinter dieselbe fünfstellige Zahl ebenfalls die Ziffer 1 setzt, erhält man na­tür­lich auch eine - vermutlich andere - sechsstellige Zahl. Gibt es eine derartig interessante Zahl, dass die zweite gebildete sechsstellige Zahl dreimal so groß ist wie die erste sechsstellige Zahl?

Lösung:

Diese Zahl existiert wirklich, sie lautet 42.857. Das Voransetzen einer Zahl erhöht eine Zahl um 100.000, das Anfügen einer Zahl verzehnfacht die ursprüngliche Zahl und fügt noch eine 1 hinzu. Da­mit ergibt sich als zu erfüllende Gleichung =3, daraus 7n=299.999 und damit die oben ge­nann­te Lösung.

**Warm-up 83: Zeitungsseiten**

Eine Zeitung besteht aus einzelnen Zeitungsblättern, die in der Mitte gefaltet und dann zusammengelegt sind, so dass auf jedem Blatt vier Zeitungseiten stehen. Ein Blatt aus der Zeitung wird herausgenommen. Man stellt fest, dass darauf die Seitenzahlen 8 und 21 stehen. Wie viele Seiten hat die Zeitung?

Lösung:

Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Die Seitenzahlen stehen auf der gleichen Seite des Blattes

Dann würde auf der Rückseite des Blattes hinter der 8 die 7 und hinter der 21 die 22 stehen. Betrachtet man weitere Blätter stellt man fest, dass die Summe der Seitenzahlen, die auf einer Seite eines Blattes stehen, immer gleich ist. In diesem Fall beträgt die Summe 29. Neben der ersten Seite ist auf dem gleichen Blatt die letzte Seite gedruckt. Daher hat sie die Nummer 28.

1. Die Seitenzahlen stehen auf verschiedenen Seiten des Blattes. Da hinter der 8 in jedem Fall die 7 stehen muss, wäre auf der Seite daneben die 21. Damit wäre auf der Seite neben der Seite 8 die Seite 20. Die Summe der Seitenzahlen auf einer Blattseite wäre damit gerade. Das geht aber nicht, da die letzte Seite der Zeitung neben der Seite 1 gedruckt werden muss. Die letzte Seite hat eine durch 4 teilbare Seitenzahl, ist also gerade. Somit muss die Summe der nebeneinander gedruckten Seitenzahlen immer ungerade sein.

**Warm-up 84: Das ägyptische Grabmal**

Ein Schatzsucher entdeckte auf einer Grabplatte in einer Pyramide in Hieroglyphen eingeschlagen die Zahl 2520. Warum wurde genau diese Zahl verewigt? Vielleicht, weil sie die kleinste Zahl ist, die durch alle natürlichen Zahlen von 1 bis 10 teilbar ist. Kannst du das beweisen?

Lösung:

Man bildet das kgV der 10 Zahlen von 1 bis 10, indem man die Zahlen in Primfaktoren zerlegt und das Pro­dukt aus den größten Anzahlen der gleichen Faktoren bildet, die in einer der Zerlegungen auf­tre­ten.

Interessanterweise ist das kgV der Zahlen 1 bis 10 gleich dem kgV der zweiten Hälfte dieser Zahlen, der Zahlen von 6 bis 10. Allgemein kann man auch beweisen, dass folgende Formel gilt:

kgV (1; 2; ...; 2n) = kgV (n+1; ...; 2n).

Alternative Lösung ohne kgV:

Dass die Zahl 2520 durch alle Zahlen von 1 bis 10 teilbar ist, lässt sich leicht nachprüfen. Dadurch ist aber noch nicht klar, dass es auch die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist.

Die gesuchte Zahl muss durch 9 teilbar sein. Damit ist sie automatisch auch durch 3 teilbar.

Die gesuchte Zahl muss durch 8 teilbar sein. Damit ist sie automatisch auch durch 2 und 4 teilbar.

Die gesuchte Zahl muss durch 7 teilbar sein.

Die gesuchte Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.

Die gesuchte Zahl muss durch 5 teilbar sein. Wenn sie zusätzlich durch 2 teilbar ist, ist sie dann auch durch 10 teilbar.

Die gesuchte Zahl muss also durch 9, 8, 7 und 5 teilbar sein, damit sie durch alle Zahlen von 1 bis 10 teilbar ist. Damit hat sie mindestens den Wert .

**Warm-up 85: Dividiere oft!**

Gibt es eine Zahl, die bei Division durch 3 den Rest 1, bei der Division durch 4 den Rest 2, bei der Di­vi­si­on durch 5 den Rest 3 und bei der Division durch 6 den Rest 4 ergibt?

Lösung:

Es gibt sogar unendlich viele derartige Zahlen, die kleinste davon ist 58. Die Differenz zwischen den Di­visor und dem Rest ist in allen Fällen gleich 2. Wenn man daher zu ihr 2 addiert, dann ist sie ohne Rest durch einen beliebigen der in der Aufgabe genannten Divisoren teilbar. Das kgV der Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6 ist 60, die um 2 verminderte Zahl demnach 58.

Alternative Lösung ohne kgV:

Die Bedingung, dass der Rest bei Division durch 6 den Wert 4 hat, liefert die wenigsten Zahlen. Diese werden der Reihe nach aufgeschrieben:

10

16 teilbar durch 4

22

28 teilbar durch 4

34

40 teilbar durch 4

Es fällt auf, dass jede zweite dieser Zahlen durch 4 teilbar ist, also entfällt. Daher muss jede zweite Zahl nicht weiter betrachtet werden und kann in der Reihe ausgelassen werden:

46

58

70

Betrachtet man die übrig gebliebenen Zahlen, fällt auf, dass sie alle bei Division durch 3 den Rest 1 lassen und bei Division durch 4 den Rest 2. Es geht also nur noch darum, die Reste bei Division durch 5 zu betrachten. Sie lauten der Reihe nach 0, 2, 4, 1, 3, 0 …

Damit ist 58 die kleinste Zahl, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

**Warm-up 86: Viele Eier**

Eine Frau trug einen Eierkorb zum Markt. Ein Wanderer, der ihr entgegenkam, stolperte und stieß so un­­glücklich gegen die Frau, dass der Korb herunterfiel und alle Eier zerbrachen. Der Mann wollte den Scha­den ersetzen und fragte nach der Anzahl der Eier im Korb. Die Frau antwortete: „Genau kann ich mich nicht erinnern, aber ich weiß noch folgendes: Wenn ich aus dem Korb je 2, 3, 4, 5 oder 6 Eier her­aus­nahm, blieb jedes Mal ein Ei im Korb zurück. Wenn ich je 7 Eier herausnahm, blieb kein Ei im Korb zu­rück.“ Wie viele Eier waren nun im Korb?

Lösung:

Diese Aufgabe schließt an die vorangehende an, man muss ebenfalls mit kgV (1; 2; 3; 4; 5; 6;) = 60 ar­gu­mentieren. Nun ist dasjenige Vielfache von 7 gesucht, das um 1 größer ist als ein Vielfaches von 60. Die beiden kleinsten Lösungen sind 301 und 721. Die letzte Lösung kommt aber nicht in Frage, da das Ge­wicht der Eier selbst bei einem angenommenen Gewicht von 50g für ein kleines Ei mit über 36 Ki­lo­gramm für eine einzige Person bestimmt zu schwer wäre.

Alternative Lösung ohne kgV:

Die gesuchten Zahlen müssen Vielfache von 7 sein. Da sie bei Division durch 2 den Rest 1 lassen, können es nur ungerade Vielfache sein. Diese werden der Reihe nach aufgeschrieben:

7, 21, 35, 49, 63, 77, 91, 105, 119, …

Es fällt auf, dass die Endziffern immer die Ziffern 7, 1, 5, 9, 3 in dieser Reihenfolge sind. Nur die Vielfachen von 7, die auf 1 enden, lassen bei Division durch 5 den Rest 1. Auf 1 enden jedoch nur die Vielfachen von 7, bei denen der zweite Faktor auf 3 endet.

Also sind möglich:

7 ∙ 3 = 21, ist aber teilbar durch 3

7 ∙ 13 = 91, lässt bei Division durch 4 jedoch den Rest 3

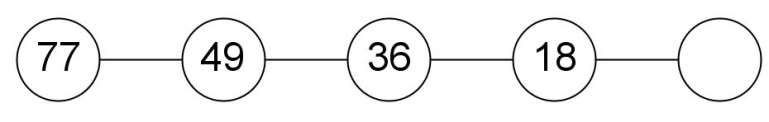
7 ∙ 23 = 161, lässt bei Division durch 3 den Rest 2

7 ∙ 33 = 231, ist teilbar durch 3

7 ∙ 43 = 301, diese Zahl hat bei jeder Division den richtigen Rest.

**Warm-up 87: Zahlenreihe**

Die Reihe der Zahlen ist nach einer bestimmten Regel gebildet. Welche Regel kann das sein? Wie lautet die Zahl im nächsten Feld, wenn sie nach dieser Regel gebildet wird?



Die Reihen sollen immer dann aufhören, wenn eine einstellige Zahl erreicht wird. Gibt es auch eine Zahlenreihe, die mit der Zahl 0 endet?

Finde möglichst viele Reihen, die mit der Zahl 0 enden.

Lösung:

In jedem Feld steht das Produkt der Ziffern aus dem vorhergehenden Feld. Daher muss die Reihe mit 8 enden.

Alle Zahlenreihen, die mit einem Vielfachen von 10 beginnen, enden auf 0.

Alle Zahlenreihen, deren Startzahl aus einer geraden Ziffer und der Ziffer 5 zusammengesetzt ist, enden auf 0.

Alle Zahlenreihen, die mit einer Zahl beginnen, deren Ziffern bei der Multiplikation auf eine der oben genannten Anfangszahlen führen, enden auf 0.

Auf Vielfache von 10 kommt man nur, wenn die Ziffer 5 bereits in der Startzahl enthalten ist.

Auf 25 kommt man mit der Startzahl 55.

Auf 45 kommt man mit den Startzahlen 95 oder 59.

Auf 65 und 85 kann man nicht durch ein Produkt aus einstelligen Zahlen kommen.

Auf 54 kommt man mit den Startzahlen 96 oder 69.

Auf 56 kommt man mit den Startzahlen 87 oder 78.

Alle anderen Zahlen, die mit der Ziffer 5 beginnen, lassen sich nicht als Produkt aus einstelligen Zahlen schreiben.

**Warm-up 88: Pilzsuche**

Fünf Kinder - Anton, Berta, Cecilia, Dörthe und Erwin - gingen im Oktober in den Wald, um Pilze zu su­chen. Am Ende der Suche hatte ausschließlich Anton Pilze gefunden und zwar genau 45 leckere Ma­ronenröhrlinge. Netterweise schenkte Anton jedem der anderen Kinder eine gewisse Anzahl an Pil­zen, damit sie auch welche in ihren Körben hatten. Am Ende war leider Antons Korb vollkommen leer. Auf dem Heimweg fanden Berta und Dörthe noch weitere Maronen: Berta genau zwei und Dörthe so viele, dass sie die Anzahl der Pilze in ihrem Korb verdoppelte. Cecilia und Erwin stolperten al­ler­dings und verloren dadurch wieder einen Teil ihrer Maronen: Cecilia verlor genau zwei und Erwin die Hälf­te der Pilze, die er von Anton erhalten hatte. Interessanterweise hatten alle Kinder zu Hause die glei­che Anzahl an Pilzen in ihren Körben - nur der von Anton war leider leer, da er alle an die anderen Kin­der abgegeben hatte. Jetzt gibt es nur noch eine Frage: Kann man aus diesen Angaben her­aus­fin­den, wie viele Pilze jedes Kind von Anton erhalten hatte?

Lösung:

Die Anzahl der Pilze, die jedes Kind am Ende in seinem Korb hatte, sei mit x bezeichnet. Dann folgt, dass Anton Berta (x-2) Pilze, Cecilia (x+2) Pilze, Dörthe Pilze und Erwin 2x Pilze gegeben hatte, zu­sam­men Pilze. Da diese Anzahl gleich 45 sein muss, folgt x=10. Demnach hat Berta 8, Cecilia 12, Dör­the 5 und Erwin 20 Pilze erhalten. Am Ende hatte jedes Kind 10 Pilze.

Alternative Lösung ohne Algebra:

Am Anfang sind es insgesamt 45 Pilze. Zwischendurch werden noch einige gefunden, aber auch einige verloren. Das muss sich nicht genau ausgleichen, aber es ist nicht unrealistisch anzunehmen, dass es am Ende auch wieder etwa 45 Pilze sein werden. Jeder hätte dann ca. 11 Pilze in seinem Korb. Da die Anzahl der Pilze von Cecilia auf dem Weg verdoppelt wurde, sind 11 Pilze in ihrem Korb nicht möglich. Es wird ausprobiert, ob 10 oder 12 Pilze möglich sind. In der Tabelle ist jeweils angegeben, wie viele Pilze die Kinder von Anton bekommen hätten

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| In jedem Korb | Berta | Cecilia | Dörthe | Erwin | Summe |
| 10 | 10-2 = 8 | 10 + 2 = 12 | 10 : 2 = 5 | 10 \* 2 = 20 | 8 + 12 + 5 + 20 = 45 |
| 12 | 12-2 = 10 | 12 + 2 = 14 | 12 : 2 = 6 | 12 \* 2 = 24 | 10 + 14 + 6 +24 = 54 |

Man sieht: Je mehr Pilze jedes Kind am Ende in seinem Korb hat, desto mehr Pilze hat es am Anfang von Anton bekommen. Daher ist die Lösung mit 10 Pilzen die einzige

**Warm-up 89: Die zehn Ziffern**

Die größte zehnstellige Zahl, in der alle zehn verschiedenen Ziffern vorkommen, ist 9.876.543.210. Das ist klar. Aber wie viele zehnstellige Zahlen, in denen alle zehn verschiedenen Ziffern vorkommen, gibt es eigentlich? Schätze zuerst: Gibt es mehr oder weniger als eine Million Möglichkeiten?

Lösung:

Am einfachsten ist es, wenn man zunächst die Möglichleiten betrachtet, an welchen Stellen der Zahl ei­ne bestimmte Ziffer stehen kann. Offenbar kann jede Ziffer außer der 0 an allen zehn Stellen auf­tre­ten kann, nur die 0 darf nicht an der Milliardenstelle stehen, da die gebildete Zahl sonst nur neun­stel­lig wäre (oder nicht der gültigen Form entspricht, nach der natürliche Zahlen gebildet werden soll­ten). Deshalb beginnen wir bei der genaueren Analyse mit der Ziffer 0: Sie kann nach obigen Bemer­kun­gen of­fenbar an 9 verschiedenen Stellen – von der Hundertmillionen- bis zur Einerstelle - stehen. Die nächste Ziffer, beispielsweise die 1, kann dann an den verbleibenden 9 Stellen der Zahl stehen. Für die 2 bleiben dann noch 8 Stellen übrig. Das setzt sich fort, bis für die letzte verbleibende Ziffer, die 9, nur noch eine Stelle verbleibt. Insgesamt er­­ge­ben sich damit Möglichkeiten, eine zehnstellige Zahl mit al­len zehn verschiedenen Ziffern zu bilden.

Man kann auch anders argumentieren: Man kann die 10 verschiedenen Ziffern auf 10! = 3.628.800 verschiedene Arten anordnen. In jeder 10. Zahl steht davon eine 0 an der ersten Stelle, das sind 362.880 Möglichkeiten. Diese Möglichkeiten muss man jetzt von allen möglichen Anordnungen ab­zie­hen und erhält mit 3.628.800 ─ 362.880 = 3.265.920 alle Möglichkeiten, eine der geforderten zehn­stelligen Zahlen zu bilden.

**Warm-up 90: Querprodukte 1**

Betrachtet werden Zahlen, in deren Zifferndarstellung die Ziffer 1 nicht vorkommt. Prüfe, ob es solche Zahlen gibt, bei denen das Produkt der Ziffern den Wert

1. 210
2. 936

Falls es solche Zahlen gibt, bestimme die kleinste und die größte dieser Zahlen.

Bestimme, wie viele solcher Zahlen es gibt.

Lösung:

1. Es gilt . Es kann eine vierstellige Zahl sein mit den Ziffern 2, 3, 5 und 7. Außerdem kann es eine dreistellige Zahl sein mit den Ziffern 6, 5 und 7. Alle anderen Produkte aus den Primfaktoren sind zweistellig.

Die kleinste Zahl ist somit die Zahl 567, die größte die Zahl 7532.

Um die vierstelligen Zahlen zu bilden, kann man für die erste Stelle aus 4 Ziffern wählen, für die zweite aus 3, dann aus 2, und für die letzte Stelle muss die verbleibende Ziffer verwendet werden, insgesamt sind das  Möglichkeiten.

Entsprechend gibt es für die dreistelligen Zahlen  Möglichkeiten.

Damit gibt es 30 Zahlen, deren Produkt der Ziffern 210 ist, wenn die Zahlen die Ziffer 1 nicht enthalten.

1. Da  ist, kann es keine solche Zahl geben, denn 13 ist keine Ziffer.

**Warm-up 91: Querprodukte 2**

Betrachtet werden Zahlen, in deren Zifferndarstellung die Ziffer 1 nicht vorkommt. Bestimme wie viele Zahlen es gibt, bei denen das Produkt der Ziffern den Wert 420 hat.

Lösung:

Da ist, gibt es fünfstellige Zahlen mit der gewünschten Eigenschaft aus den Ziffern 2, 2, 3, 5, 7. Es ist zu berücksichtigen, dass man die Zahlen, die die erste Ziffer 2 an einer Stelle haben und die zweite Ziffer 2 an einer anderen nicht von den Zahlen unterscheiden kann, bei denen es umgekehrt ist. Somit gibt es fünfstelligen Zahlen.

Es gibt vierstellige Zahlen mit den Ziffern 4, 3, 5, 7 bzw. mit den Ziffern 2, 6, 5, 7. Da hier keine Ziffern doppelt vorkommen, sind es insgesamt vierstellige Zahlen.

Insgesamt gibt es 108 Zahlen, bei denen das Produkt der Ziffern 420 beträgt.

**Warm-up 92: Querprodukte 3**

Betrachtet werden Zahlen, in deren Zifferndarstellung die Ziffer 1 nicht vorkommt. Bestimme wie viele Zahlen es gibt, bei denen das Produkt der Ziffern den Wert 2520 hat.

Lösungshinweis:

Es ist .

Siebenstellige Zahlen bestehen aus den Ziffern 2, 2, 2, 3, 3, 5, 7. Davon gibt es Stück.

Sechsstellige Zahlen können aus den Ziffern 2, 4, 3, 3, 5, 7 oder 2, 2, 6, 3, 5, 7 oder 2, 2, 2, 9, 5,7 bestehen. Davon gibt es Stück.

Fünfstellige Zahlen können aus den Ziffern 8, 3, 3, 5, 7 oder 4, 6, 3, 5, 7 oder 2, 4, 9, 5, 7 bestehen. Davon gibt es Stück

Vierstellige Zahlen können aus den Ziffern 8, 9, 5, 7 bestehen. Davon gibt es Stück.

Insgesamt gibt es somit 1584 Zahlen.

**Warm-up 93: Rabatt**

Harte Verhandlung zwischen einem Händler und einem Kunden. Der Kunde möchte einen Nachlass von 10% auf den geforderten Endpreis haben. Das ist dem Händler zu viel. Schließlich gibt der Kunde nach. Er schlägt vor, die 10% nicht vom Endpreis sondern von dem Preis ohne Mehrwertsteuer abzuziehen. Das akzeptiert der Händler. Der Kunde ist übrigens Mathematiker. Finde für diese Tatsache eine Begründung.

Lösung:

Wenn der Preis ohne Steuer ist, dann ist der Preis mit Steuer . Werden 10% abgezogen ist der reduzierte Preis .

Werden zunächst 10% abgezogen, beträgt der reduzierte Preis .

In beiden Fällen ist der gleiche Preis zu bezahlen. Für den Mathematiker war das natürlich sofort klar.

**Warm-up 94: Summen mit Symbolen**

Jedes Symbol steht für eine andere Zahl. In jeder Zeile ist die Summe der Zahlen in der Zeile angegeben, in drei Spalten ist die Summe der Zahlen in der Spalte angegeben.

Bestimme die Zahlen, die für die Symbole eingesetzt werden müssen.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ♠ | ♠ | ♣ | ♣ | 28 |
| ♠ | ♠ | ♠ | ♠ | 24 |
| ♥ | ♥ | ♦ | ♣ | 42 |
| ♣ | ♦ | ♥ | ♠ | 36 |
| ? | 34 | 36 | 28 |  |

Lösung:

Aus der zweiten Zeile sieht man sofort, dass 4♠ = 24, also ♠ = 6.

Aus der ersten Zeile ergibt sich nun, dass 2♣ + 12 = 28, also ♣ = 8.

Aus der zweiten oder auch aus der dritten Spalte ergibt sich, dass ♥ + ♦ = 22.

Verwendet man dieses Ergebnis in der dritten Zeile, ergibt sich ♥ + 22 + 8 = 42, also ♥ = 12.

Wegen ♥ + ♦ = 22 ist dann ♦ = 10.

Für das Fragezeichen ist die Zahl 32 einzusetzen.

**Warm-up 95: Drei Aussagen**

1. Auf diesem Zettel ist eine Aussage falsch.
2. Auf diesem Zettel sind zwei Aussagen falsch
3. Auf diesem Zettel sind drei Aussagen falsch

Auf einem Zettel stehen drei Aussagen.

Welche der Aussagen sind wahr, welche falsch?

Lösung:

Angenommen, Aussage 1 wäre wahr. Dann ist Aussage 2 oder Aussage 3 falsch.

Wäre Aussage 2 falsch, so wären keine Aussage, eine Aussage oder alle drei Aussagen falsch.

Dass keine Aussage falsch ist, ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass Aussage 1 wahr ist.

Dass nur eine Aussage falsch ist, würde bedeuten, dass Aussage 3 wahr ist. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass Aussage 1 wahr ist.

Dass alle Aussagen falsch sind, ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass Aussage 2 falsch ist.

Deshalb muss Aussage 1 falsch sein.

Angenommen Aussage 2 wäre wahr. Dann sind die Aussagen 1 und 3 falsch. Daraus ergibt sich kein Widerspruch.

Angenommen Aussage 3 wäre wahr. Dann wären alle Aussagen falsch, insbesondere auch Aussage 3. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

**Warm-up 96: Kugeln in Kartons**

In zwei Kartons liegen je 4 rote, 4 gelbe und 4 grüne Kugeln. Jemand greift ohne hinzusehen in den ersten Karton und nimmt 5 Kugeln heraus und legt sie in den anderen Karton.

Wie viele Kugeln muss er mindestens aus dem zweiten Karton nun wiederum ohne hinzusehen herausnehmen und in den ersten legen, damit im ersten Karton von jeder Sorte mindestens 3 Kugeln sind?

Lösung:

Die fünf Kugeln, die zunächst herausgenommen werden, können sich auf verschiedene Arten auf die drei Farben verteilen:

4 – 1 – 0 oder 3 – 2 – 0 oder 3 – 1 – 1 oder 2 – 2 – 1.

Es wird jeweils nachgerechnet, wie viele Kugeln nach dem ersteh Entnehmen in den beiden Kartons sind.

Karton 1: ; Karton 2:  . Damit in Karton 1 von jeder Farbe mindestens 3 Kugeln sind, müssen im ungünstigsten Fall alle 5 Kugeln der Farbe 2, alle 4 Kugeln der Farbe 3 und 3 Kugeln der Farbe 1 entnommen werden. Das sind insgesamt 12 Stück.

Karton 1: ; Karton 2: . Im ungünstigsten Fall müssen alle Kugeln der Farben 2 und 3 und zwei Kugeln der Farbe 1 wieder entnommen werden, insgesamt 12 Stück.

Karton 1: ; Karton 2:  . Im ungünstigsten Fall müssen alle Kugeln der Farben 2 und 3 und zwei Kugeln der Farbe 1 wieder entnommen werden, insgesamt 12 Stück.

Karton 1: ; Karton 2:  . Im ungünstigsten Fall müssen alle Kugeln der Farben 2 und 3 entnommen werden und dazu eine Kugel der Farbe 1, also wieder 12 Stück.

In jedem Fall müssen somit 12 Kugeln aus dem zweiten Karton entnommen werden.

**Warm-up 97: Neunstelligen Primzahlen**

Aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 werden alle möglichen Zahlen gebildet. Wie viele von diesen Zahlen sind Primzahlen?

Lösung:

Unabhängig davon in welcher Reihenfolge die Ziffern angeordnet werden haben die Zahlen immer die Quersumme 45. Daher ist jede der Zahlen durch 9 teilbar, also ist keine von ihnen eine Primzahl.

**Warm-up 98: Tulpen und Narzissen**

In einem Garten blühen Tulpen und Narzissen, insgesamt 40 Stück. Der Gärtner pflückt einen Strauß von mindestens zwei Blumen. Gleichgültig, wie viele Blumen er pflückt, es ist immer eine Tulpe dabei. Wie viele Tulpen und wie viele Narzissen blühen in dem Garten?

Lösung:

Wenn zwei oder mehr Narzissen blühen würden, könnte der Gärtner einen Strauß mit zwei Blumen pflücken, der nur aus Narzissen besteht. Daher kann höchstens eine Narzisse blühen.

Tatsächlich gibt es die beiden Möglichkeiten:

Alle 40 blühenden Blumen sind Tulpen oder 39 Tulpen und eine Narzisse blühen im Garten.

**Warm-up 99: Blumen im Garten**

In einem Garten wachsen Tulpen, Narzissen und Hyazinthen. Einige davon blühen gerade. Wenn man von den blühenden Blumen drei Stück pflückt, ist immer mindestens eine Tulpe und eine Narzisse dabei. Wie viele Blumen blühen in dem Garten?

Lösungshinweis:

Wenn drei oder mehr Tulpen blühen würden, könnte es sein, dass man davon drei Stück blühen. Dann hätte man keine Narzisse gepflückt.

Das gleiche gilt für die Narzissen.

Daher können höchstens zwei Tulpen und zwei Narzissen blühen.

Wenn von einer Sorte zwei Blumen blühen, darf keine Hyazinthe blühen, da man sonst eine Hyazinthe und zwei gleiche Blumen pflücken könnte.

Damit hat man die Möglichkeiten:

2 Tulpen – 2 Narzissen – keine Hyazinthe

2 Tulpen – 1 Narzisse – keine Hyazinthe

1 Tulpe – 2 Narzissen – keine Hyazinthe

Zusätzlich gibt es noch die Möglichkeit, dass nur eine Tulpe und eine Narzisse blüht. Dann muss auch noch eine Hyazinthe blühen, damit man 3 blühende Blumen pflücken kann, also hat man die Möglichkeit

1 Tulpe – 1 Narzisse – 1 Hyazinthe.

Zusammenfassend kann man feststellen, dass im Garten drei oder vier Blumen blühen können.

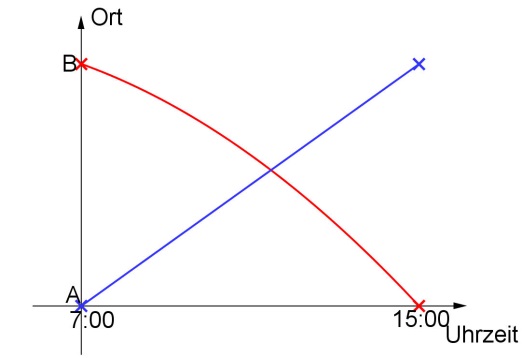
**Warm-up 100: Die Wanderung**

Ein Wanderer wandert von A nach B. Er geht genau um 8.00 Uhr in A los und erreicht B um 15.00 Uhr. Am nächsten Tag wandert er auf der gleichen Strecke zurück. Er bricht wieder um 8.00 auf und ist um 15.00 zurück in A.

Gibt es eine Uhrzeit, zu der der Wanderer an beiden Tagen sich am gleichen Ort auf der Strecke befindet?

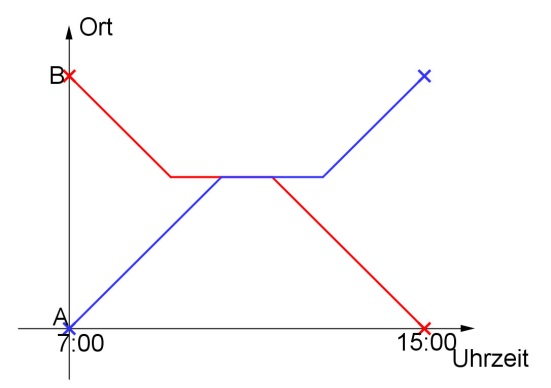
Wenn ja: Kann es auch mehrere solcher Uhrzeiten geben?

Was ändert sich, wenn der Weg von A nach B ansteigt, so dass der Wanderer auf dem Rückweg schneller ist als auf dem Hinweg?



Lösung:

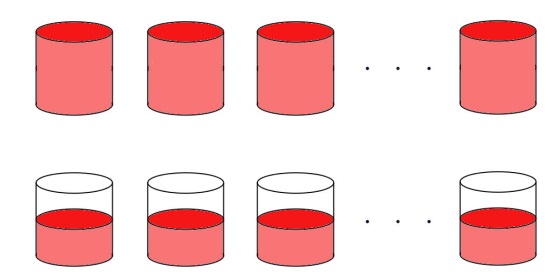
Der Vorgang kann in einem Zeit-Weg-Diagramm betrachtet werden. Die beiden blauen Punkte bezeichnen Start- und Zielpunkt für den Hinweg, die roten für den Rückweg. Es ist egal, wie man die Punkte verbindet, die Linien müssen sich irgendwo schneiden. Damit ergibt sich ein Zeitpunkt, zu dem der Wanderer auf Hin- und Rückweg am gleichen Ort ist.

Wenn der Wanderer nicht zurückgeht, kann es mehrere Punkte nur dann geben, wenn er eine Pause macht. Dann gibt es aber auch gleich unendlich viele Zeitpunkte.

Somit gibt es einen Zeitpunkt oder unendlich viele Zeitpunkte, zu denen der Wanderer auf Hin- und Rückweg am gleichen Ort ist.

Wenn der Rückweg schneller zurückgelegt wird, verschiebt sich der rote Punkt auf der Zeitachse nach links. Das ändert an den Schnittpunkten jedoch nichts.

**Warm-up 101: Volle und leere Becher**



Auf einem Tisch stehen volle und genauso viele Becher, die nur zur Hälfte gefüllt sind. Die Becher sollen in drei Gruppen angeordnet werden, so dass in jeder Gruppe die gleiche Menge an Flüssigkeit sich befindet.

Losung:

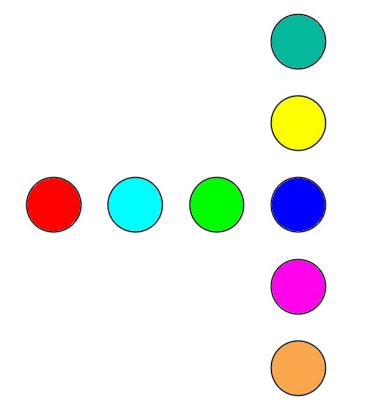
Um einen Lösungsansatz zu finden, kann man zunächst mit konkreten Anzahlen von Bechern arbeiten. Dabei wird man schon feststellen, dass man zwischen einer geraden und einer ungeraden Anzahl von Bechern der jeweiligen Sorte unterscheiden muss.

Bei einer allgemeinen Untersuchung geht man von n ganz gefüllten und n halbgefüllten Bechern aus. Die gesamte Flüssigkeitsmenge beträgt dann Becherfüllungen. Jede Gruppe enthält daher Becherfüllungen.

Wenn n eine gerade Zahl ist, kann man zwei Gruppen mit jeweils der Hälfte der ganz gefüllten Becher und eine Gruppe mit allen halbgefüllten Bechern bilden.

Wenn n eine ungerade Zahl ist, bildet man zwei Gruppen mit jeweils ganz gefüllten Bechern und einem halbgefüllten Becher. Die dritte Gruppe besteht dann aus einem ganz gefüllten und halbgefüllten Bechern.

**Warm-up 102: Bunte Scheiben**



Von diesen Scheiben soll nur eine umgelegt werden, so dass zwei Reihen mit je fünf Scheiben entstehen.

Lösung:

Da es sich um neun Scheiben handelt und zwei Strecken höchstens einen Schnittpunkt haben, müssen auf dem Schnittpunkt zwei Scheiben liegen. Das kann man erreichen, wenn man die untere orangefarbige Scheibe auf die blaue Scheibe legt.

**Warm-up 103: Produkt und Summe gegeben**

Die Summe von fünf verschiedenen natürlichen Zahlen ist 15, ihr Produkt 120. Um welche Zahlen handelt es sich?

Lösung:

Bei den Zahlen muss es sich um Teiler von 120 handeln. Es gilt . Weitere Teiler müssen nicht betrachtet werden, da sonst die Summe nicht mehr den Wert 15 haben kann. Man erkennt, dass  die einzige Summe aus fünf Teilern von 120 ist, die den Wert 15 hat. Außerdem ist .

**Warm-up 104: Handschuhe in der Schublade**

In einer Schublade befinden sich 22 Handschuhe in drei Farben: fünf Paar rote, vier Paar gelbe und zwei Paar grüne. Wie viele Handschuhe muss man im Dunkeln mindestens herausnehmen, um mit Sicherheit ein zusammenpassendes Paar zu haben?

Lösung:

Im ungünstigsten Fall nimmt man zunächst alle linken Handschuhe heraus. Das sind 11 Stück. Der nächste Handschuh passt dann auf jeden Fall zu einem der linken Handschuhe.

**Warm-up 105: 15 Personen**

Von 15 Personen ist bekannt:

* 14 kommen aus NRW
* 12 machen regelmäßig Sport
* 11 haben dunkle Haare
* 10 spielen ein Musikinstrument

Wie viele Personen haben mindestens alle vier Eigenschaften?

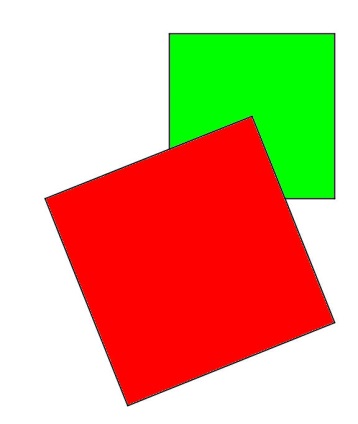
Lösung:

Die Eigenschaften werden den Personen mit Hilfe einer Tabelle so zugeordnet, dass es möglichst wenige Überschneidungen gibt. Dazu werden in jeder neuen Zeile der Tabelle zunächst die Felder außerhalb der farbigen Markierungen gekennzeichnet.

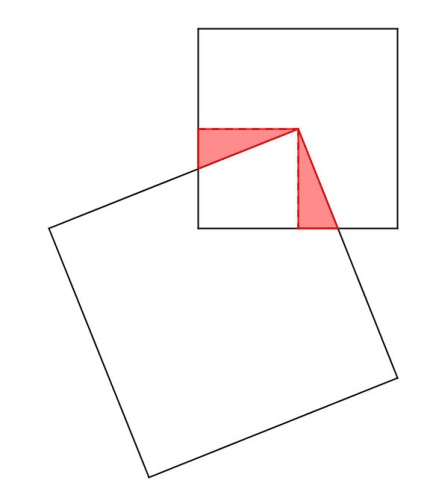
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Person | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Musikinstrument | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |  |  |  |  |  |
| Dunkle Haare |  |  |  |  | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Sport | X | X | X | X | X | X | X |  |  |  | X | X | X | X | X |
| NRW | X | X | X | X | X | X |  | X | X | X | X | X | X | X | X |

Es gibt mindestens zwei Personen mit allen Eigenschaften.

**Warm-up 106: Zwei Teppiche übereinander**

Ein großer, roter und ein kleiner, grüner Teppich liegen so übereinander, dass ein Eckpunkt des roten Teppichs genau im Mittelpunkt des grünen liegt. Wie viel Prozent des grünen Teppichs werden vom roten überdeckt?

Lösung:

Es ist sofort zu erkennen, dass der rote Teppich genau 25% des grünen überdeckt, wenn seine Kanten parallel zu den Kanten des grünen Teppichs liegen. Das gleiche gilt auch, wenn die Kanten des roten Teppichs durch zwei Eckpunkte des grünen Teppichs verlaufen. Da der rote Teppich größer ist als der grüne, ist eine solche Lage möglich. Aus diesen Teilergebnissen kann man vermuten, dass immer 25% des grünen Teppichs überdeckt werden.

Zum Beweis ist zu berücksichtigen, dass in der Figur die beiden roten rechtwinkligen Dreiecke zueinander kongruent sind. Sie haben im Mittelpunkt des Quadrates gleich große Winkel und je eine Seitenlänge ist gleich der halben Quadratseite des kleineren Quadrates.

Was bei der Drehung des Teppichs links oben nicht mehr überdeckt wird, wird an der rechten Seite neu überdeckt.

**Warm-up 107: Zu spät in der Schule**

Die Schülerinnen und Schüler Anna, Basti und Claudia unterhalten sich über ihren Mitschüler Xaver.

Anna: „Der ist bestimmt mehr als fünfzig Mal zu spät gekommen.“

Basti: „Das glaube ich nicht, es war weniger als fünfzig Mal.“

Claudia: „Ich bin sicher, dass es mehr als einmal war.“

Wie oft ist Xaver zu spät gekommen, wenn nur genau eine der Aussagen richtig war?

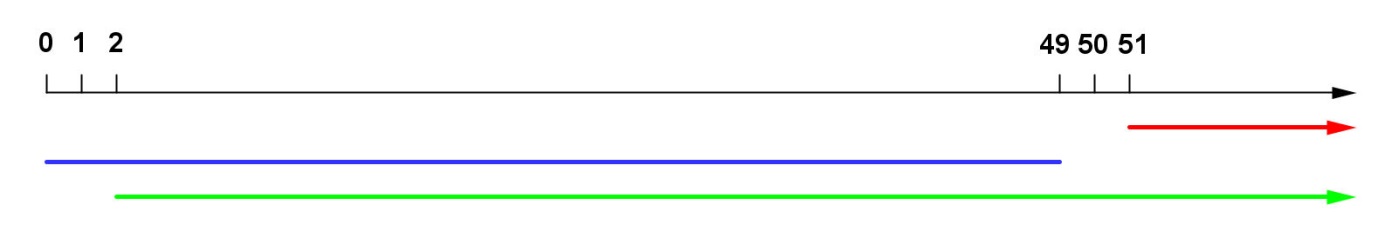
Lösung:

Wenn Xaver mehr als 50 Mal zu spät gekommen wäre, wären die Aussagen von Anna und Claudia richtig.

Wenn Xaver mehr als einmal, aber weniger als 50 Mal zu spät gekommen wäre, wären die Aussagen von Basti und Claudia richtig.

Es bleiben nur die Möglichkeiten übrig: keinmal zu spät, einmal zu spät oder 50 Mal zu spät. In jedem dieser drei Fälle ist nur genau eine Aussage richtig.

Die Aufgabe kann auch durch eine graphische Darstellung gelöst werden.



Der Zahlenbereich, der zutreffen würde, wenn die Aussage von Anna wahr wäre, ist rot markiert, der von Basti blau und der von Claudia grün. Gesucht sind dann die Zahlen, die nur von einem Farbstrich überdeckt werden.

**Warm-up 108: Seitenzahlen**

Für den Druck der Seitenzahlen eines Buches werden 2034 Ziffern benötigt. Wie viele Seiten hat das Buch? Auf jeder Seite steht eine Seitennummer, die Nummerierung beginnt bei 1.

Lösung:

Es gibt 9 Seiten mit einer einstelligen Seitennummer. Das sind 9 Ziffern

Es gibt 90 Seiten mit einer zweistelligen Seitennummer. Das sind 180 Ziffern

Jeweils 100 Seiten mit dreistelliger Seitennummer erfordern 300 Ziffern.

Bis zur Seite 699 wären  Ziffern erforderlich. Es sind dann noch  Ziffern übrig. Damit können 15 Seiten nummeriert werden von 700 bis 714.

Das Buch hat also 714 Seiten.

**Warm-up 109: Der zersägte Holzstab**

Ein Holzstab von 31 cm Länge soll mit möglichst wenigen Schnitten so in Teile zerschnitten werden, dass man mit den Teilen alle Längen von 1 cm bis 31 cm legen kann.

Lösung:

Es genügen vier Schnitte, so dass ein Stab von 1 cm, einer von 2 cm, einer von 4 cm und einer von 8 cm entsteht. Der Rest ist dann 16 cm lang, Mit diesen Stäben lassen sich alle Längen legen. Um das einzusehen, werden für die zu legenden Längen die Werte in der Dualschreibweise dargestellt. Für jede Ziffer 1 in der Dualschreibweise wird das entsprechende Holzstäbchen verwendet.

Beispiel:. . Lege die Stäbchen der Länge 16 cm, 8 cm, 2 cm und 1 cm zusammen.

**Warm-up 110: Das Streichquartett**

Ein Streichquartett, bestehend aus einer 1. Violine, einer 2.Violine, einer Viola und einem Violoncello, muss auf schnellstem Weg nach Musikdorf, um dort ein Konzert zu geben. Die einzige Transportmöglichkeit ist jedoch das Motorrad des Cellisten. Mit diesem Gefährt können aber selbstverständlich immer nur höchstens zwei Personen befördert werden.

Der Cellist sagt: „Ich benötige für die Fahrt von hier nach Musikdorf nur zwei Minuten, die Sache ist also in 10 Minuten erledigt.“ „Kommt nicht in Frage“, mischt sich die erste Violinistin ein, die den Cellist für einen rücksichtslosen Raser hält. „Jeder von uns kann mit diesem Motorrad fahren, aber ich benötige für eine Fahrt nach Musikdorf 20 Minuten, und ich werde mich auf keinem Fall jemandem anvertrauen, der schneller fährt als ich.“ Auch die 2. Violinistin, die mit ihrem Fahrtempo zehn Minuten für die Strecke braucht, weigert sich, von einem Mitglied des Quartetts, das schneller als sie fährt, befördert zu werden. Das Gleiche gilt für den Bratschisten, der für eine Strecke vier Minuten benötigt.

Demnach muss also immer das Mitglied des Streichquartetts, das für die Strecke mehr Zeit brauchen würde, das Motorrad fahren. „Das kann ja dauern“, lässt sich der Cellist vernehmen. Darauf entgegnet die erste Geigerin: „Wenn wir es klug anstellen, können wir in 34 Minuten in Musikdorf sein.“ Wie geht das?

Lösung:

1. Tour: Bratscher mit Cellist nach Musikdorf (4 Minuten)

2. Tour: Bratscher zurück (4 Minuten)

3. Tour: erste und zweite Geigerin nach Musikdorf (20 Minuten)

4. Tour: Cellist zurück (2 Minuten)

5. Tour: Bratscher mit Cellist nach Musikdorf (4 Minuten)

Das ergibt zusammen 34 Minuten.

**Warm-up 111: XYZ**

Wer findet eine Lösung des folgenden Kryptogramms? Unterschiedliche Buchstaben stehen für unterschiedliche Ziffern.

X Y Z

+ X Z Y

Z Y X

Lösung:

In der Hunderterstelle gibt es bei der Addition keinen Überlauf. Daher gilt .

Die Ziffern der Summanden bei der Einer- und Zehnerstelle sind gleich, die Ergebnisziffern jedoch nicht. Daher sind und .

Aus der Hunderterstelle ergibt sich .

Man kann nun die vier möglichen Werte von durchprobieren.

Die Zahl der Fälle lässt sich sogar noch weiter reduzieren, wenn man zwei Gleichungen kombiniert:

. Damit sind nur noch oder möglich.

Im Fall wären und . Dann würde aber die Einerziffer der Summe eine 1 sein und keine 3.

Im Fall sind und . Setzt man diese Werte ein, ergibt sich eine richtige Addition.

**Warm-up 112: Die Mücke**

Wie viele Kilometer fliegt eine Mücke, die in einem 33,3 Meter langen Waggon ununterbrochen mit einer Geschwindigkeit von 60 Kilometern in der Stunde hin und her fliegt, und zwar in einem Zug, der die Station A um sechs Uhr morgens verlässt, und die Station B, 150 Kilometer entfernt, um neun Uhr morgens erreicht?

Lösung:

Entscheidend ist allein, dass der Zug drei Stunden unterwegs ist. In diesen drei Stunden fliegt die Fliege mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h eine Strecke von 180 Kilometer, egal ob sie immer hin und her oder im Kreis oder sonst irgendwie fliegt.

**Warm-up 113: Der Fußballspielplan**

Fünf Remscheider Fußballvereine tragen an den kommenden fünf Samstagen ihre Meisterschaft aus. Jeder Verein spielt genau einmal gegen jeden anderen. An jedem Samstag werden zwei Spiele ausgetragen. An jedem Samstag ist also ein Verein spielfrei.

Am ersten Samstag spielen die Remscheider Kickers gegen den Remscheider SV; am Samstag darauf ist der 1.FC Remscheid spielfrei; am dritten Samstag spielen die Borussia Remscheid gegen den 1.FC Remscheid, und am vierten Samstag spielen Borussia Remscheid gegen Union Remscheid.

Die Frage lautet: Wer hat denn am fünften Sonntag spielfrei?

Lösung:

Union ist am ersten Samstag nicht spielfrei, weil sonst die Borussia gegen den 1.FC spielen würde, was erst später stattfindet. Union spielt auch am zweiten Samstag, weil an dem der 1.FC spielfrei hat. Am dritten Samstag muss Union spielen, weil anderenfalls die Kickers noch einmal gegen den SV spielen würden. Und am vierten Sonntag spielt Union gegen die Borussia. Also muss Union Remscheid am fünften Sonntag spielfrei haben.