# „Warm-ups“

# Die Grundkonzeption einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft bleibt selbstverständlich in das Ermessen des jeweiligen Fachlehrers gestellt. Basierend auf den Grundüberlegungen von Helmut König, die in der Grunddokumentation unserer Arbeitsgruppe noch einmal präzisiert wur­den, bietet es sich aber an, jede Arbeitsstunde mit einem „Warm-up“ zu beginnen, so dass die Schülerinnen und Schüler aus dem regulären Schulalltag in die Atmosphäre einer ma­thematischen Arbeitsgemeinschaft ankommen können und damit die Bereitschaft ge­weckt wird, sich auf die nachfolgende intensivere Beschäftigung mit einem Themengebiet wie Kryptogrammen oder geometrischen Fragestellungen einzulassen. Vergleichbar sind die­se „Warm-ups“ – auch wenn Vergleiche dieser Art immer hinken – mit dem Warmmachen vor dem Sportunterricht oder den „Energizern“, die im Lions-Quest-Programm vor den ei­gent­lichen Inhalt der jeweiligen Stunde gestellt werden.

Selbstverständlich ist die Verwendung eines „Warm-ups“ nicht obligatorisch und es bietet sich auch nicht an, mehrere „Warm-ups“ nacheinander innerhalb einer AG-Stunde zu verwenden. Im Mittel­punkt sollte immer die Beschäftigung mit einem der umfassenderen und erweiterbaren Themen­kom­ple­xe stehen, die aus dem Bereich der Mathematik-Olympiade stammen. Das bedeutet natürlich nicht, dass auch diese „Warm-ups“ zu größeren Themenkomplexen ausgebaut werden können, die eben­falls eine intensive mathematische Strukturierung und Beschäftigung erlauben. Das ist aber nicht die Intention der hier vorgestellten Materialien.

Die Liste, die unten vorgestellt wird, speist sich aus vielen verschiedenen Quellen und erhebt selbst­ver­ständlich keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Gerade aus dem Bereich des Känguru-Wett­be­werbs lassen sich sehr viele Aufgaben als „Warm-up“ generieren, die viele interessante Anwen­dungs­mög­lichkeiten bieten. Auch die hier vorgestellten Beispiele aus dem Bereich der „black stories“ bein­hal­ten noch sehr viele weitere interessante Beispiele. Weiterhin sind in den einschlägigen Knobel­bü­chern – etwa von Sam Lloyd oder Martin Gardner – oder mathematischen Zeitschriften ebenfalls vie­le interessante Aufgaben enthalten.

Viele dieser hier vorgestellten „Warm-ups“ fördern Kompetenzen, die nicht ursächlich mathematisch er­scheinen mögen. Gefördert werden aber immer Fähigkeiten, die auch bei der Bearbeitung mathe­ma­tischer Sachverhalte sehr hilfreich sind. Allein die intensive Kommunikation über bestimmte In­hal­te, die genaue Beschreibung und nachfolgende Präzisierung vorgestellter Gedanken oder die Fähig­keit zu argumentieren dienen in vielen mathematischen Situationen dazu, seine Gedanken noch ein­mal neu zu strukturieren und Sachverhalte zu hinterfragen, die vielleicht implizit (oder sogar fälsch­li­cher­weise) als gegeben angenommen wurden, in Wirklichkeit aber entweder unerheblich oder sogar irre­führend sind.

Gerade diese Aufgaben bieten sich alle als vollkommen voraussetzungsfrei zu bearbeitende Aufgaben an. Deshalb sollten bei der Eingabe der Aufgaben keine weiteren Tipps gegeben werden, sondern al­lei­ne aus der Aufgabenstellung heraus die Ideen der Schülerinnen und Schüler entwickelt werden. Da­zu kann man am besten die Aufgabe zu Beginn der AG-Stunde per Folie oder per Whiteboard ohne wei­tere Ansage projiziert werden.

Man kann diese Aufgaben auch als bewussten Gegenpol zu den die Diskussion und Kommunikation för­dernden Aufgaben aus der Mathematik-Olympiade einsetzen, indem sie innerhalb der ersten Mi­nu­ten einer Arbeitsgemeinschaft auf Schnelligkeit bearbeitet werden. Dabei sollte die Schülerin oder der Schüler, der meint, eine Lösung zu haben, diese der Lerngruppe vorstellen. Wenn diese falsch ist oder es Ergänzungen gibt, können diese selbstverständlich im Anschluss vorgestellt werden. Es sollte aber nicht so sein, dass die Bearbeitung und Diskussion dieser „Warm-ups“ deutlich mehr als 10 Mi­nu­ten einnehmen.

Selbstverständlich ist die hier angegebene Reihenfolge der „Warm-ups“ weder verbindlich noch in ir­gend­einer Weise nach Schwierigkeit geordnet. Sie können je nach Bedarf oder Vorlieben kombiniert oder auch weggelassen werden. Viel Vergnügen mit den hier vorgestellten Beispielen, die alle schon in­nerhalb von mathematischen Arbeitsgemeinschaften erprobt worden sind.

**Warm-up 1: Kirschtorte**

Zerlege mit drei geraden Messerschnitten diese Kirschtorte so, dass sich auf jedem Teil *genau* eine Kirsche befindet.

Lösung:

**Warm-up 2: Tanzsaal**

In einem quadratischen Tanzsaal sollen 10 Stühle so an den Wänden aufgestellt, dass an jeder Wand dieselbe Anzahl von Stühlen steht.

Lösung: Die Lösungsidee besteht darin, dass genau zwei Ecken besetzt werden müssen.



**Warm-up 3: Lügengeschichten**

Paul sagt: Max lügt.

Max sagt: Otto lügt.

Otto sagt: Max und Paul lügen.

Wer lügt, wer sagt die Wahrheit?

Lösung:

Wenn Otto die Wahrheit sagen würde, dann würden Max und Paul lügen, insbesondere Paul. Also würde Max die Wahrheit sagen. Das ist ein Widerspruch. Also lügt Otto.

Damit sagt Max die Wahrheit. Pauls Aussage ist falsch, also lügt Paul.

Zusammengefasst: Paul und Otto lügen, Max sagt die Wahrheit.

**Warm-up 4: Leitungsbau**

Zu jedem der drei Häuser H1, H2 und H3 sollen je eine Strom-, Wasser- und Gasleitung – ausgehend von den Werken S, W und G - verlegt werden. Dabei dürfen sich die Leitungen nicht kreuzen, es darf auch (unrealistischerweise, aber mathematisch idealisiert) keine dritte Dimension benutzt werden.

Lösung:

Die Aufgabe ist unlösbar, da auf jeden Fall ein geschlossenes Gebiet entsteht (siehe Skizze), durch das keine weitere Leitung gelegt werden kann.



**Warm-up 5: Gleisarbeiten**

Die Gleise für die fünf Züge A, B, C, D und E sollen kreuzungs- und brückenfrei zu den fünf Bahnhöfen a, b, c, d und e gelegt werden, wobei die Gleise von den jeweiligen Bahnhöfen schon bis an den Rand des Gebietes vorhanden sind.

Lösung:



**Warm-up 6: Schwimmbecken**

An den Ecken eines quadratischen Schwimmbeckens stehen vier Bäume. Das Becken soll flächenmäßig verdoppelt werden. Dabei müssen die Bäume stehen bleiben, die Grundform muss ebenfalls wieder ein Quadrat sein.

Lösung:



**Warm-up 7: Nüsse**

36 Nüsse werden in einem 6x6-Quadrat ausgelegt. Nimm sechs Nüsse weg, so dass in *jeder* waagerechten und in *jeder* senkrechten Reihe eine gerade Anzahl von Nüssen liegen bleiben.

Lösung:



[Anmerkung: Diese Aufgabe wirkt deutlich einfacher, als sie in Wirklichkeit ist. Gerade darum eignet sie sich aber für die Präsentation von schnell generierten vermeintlichen „Lösungen“, die dann ebenso schnell von den anderen Schülerinnen und Schülern widerlegt werden können.]

**Warm-up 8: Geschwister**

Ein Junge hat ebenso viele Schwestern wie Brüder und seine Schwestern haben halb so viele Schwestern wie Brüder.

Lösung: Es sind 4 Jungen und 3 Mädchen.

**Warm-up 9: Wasserkrüge**

Ein 5-Liter-Krug und ein 3-Liter-Krug sind vorhanden, ebenso wie genügend viel Wasser aus einem Brunnen. Wie kann man mit diesen Krügen *genau* 4 Liter Wasser abmessen?

Lösung:

Wenn den Schülerinnen und Schülern die Lösung schwer fällt, ist eventuell der Hinweis hilfreich, dass man auch Wasser wegschütten darf.

Eine Lösung des Problems sieht folgendermaßen aus: Man füllt den 5-l-Krug und füllt aus diesem Krug den 3-l-Krug. Das Wasser aus diesem Krug schüttet man weg. Die im 5-l-Krug verbliebenen 2 Liter schüttet man jetzt wieder in den 3-l-Krug. Nun füllt man den 5-l-Krug wieder und füllt mit diesem Wasser den 3-l-Krug auf. Im 5-l-Krug verbleiben dann genau 4 Liter.

**Warm-up 10: Die Uhr, Folge I**

Zerlege die Uhr mit zwei geraden Schnitten so in drei Teilen, dass sich beim Addieren der Zahlen in jedem Teil die gleichen Summen ergeben.

Lösung:



Die Summe ist jeweils 26, was selbstverständlich auch als zusätzliche Hilfe angegeben werden kann.

**Warm-up 11: Die Uhr, Folge II**

Zerlege die Uhr mit sechs Geraden, so dass die Summe überall gleich groß ist.

Lösung:



In jedem Teil befinden sich zwei Zahlen, die Summe ist jeweils 13.

**Warm-up 12: Gauß lässt grüßen**

Addiere die natürlichen Zahlen von 1 bis 100.

Lösung:

Die Summe ergibt sich, wie allgemein bekannt ist, als . Interessant wird es, wenn man die Endzahl oder auch die Anfangszahl variiert, wodurch sich der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe leicht steigern lässt, der Erkenntnisgewinn aber ebenso in gleichem Umfang gesteigert wird.

**Warm-up 13: Eine „black story“**

„Eine Frau starb, weil sie zu lange telefonierte.“

Spielregel: Die Lehrkraft liest den Satz vor und beantwortet im Weiteren alle Fragen der Schülerinnen und Schüler nur noch mit „ja“ oder „nein“.

Lösung:

Die Frau hatte an ihrem Wagen neue Reifen montieren lassen. Die Mitteilung der Werkstatt, dass man bei der Montage vergessen hatte, die Reifenmuttern festzuziehen, konnte die Frau aber nicht erreichen, da sie mit ihrer Freundin „dauertelefonierte“. In der ersten Kurve geriet ihr Fahrzeug außer Kontrolle und prallte gegen einen Baum.

**Warm-up 14: Noch eine „black story“**

Ein Pfarrer hielt eine Abschiedsrede. Kurz vor Ende erschien der Bürgermeister und wollte ihm danken. Er hatte noch nicht zu Ende gesprochen, als er erschossen wurde.

Lösung:

Während seiner Rede erwähnte der Pfarrer jenen seltsamen Mord, der sich am ersten Tag seiner Arbeit in der Gemeinde zugetragen hatte. Dabei erzählte er, dass die erste Beichte, die er abnahm, die des Mörders war. Der Bürgermeister, der später dazu stieß, berichtete seinerseits, dass er der Erste war, der den Beichtstuhl des Pfarrers aufgesucht hatte. Damit hatte er sich verraten und wurde noch während seiner Rede von einem Angehörigen des Mordopfers erschossen.

**Warm-up 15: Das Königsberger Brückenproblem**

In Königsberg gibt es die in der Zeichnung angegebenen sieben Brücken. Gibt es einen Weg, bei dem man jede Brücke genau einmal benutzt? Du darfst also keine Brücke doppelt benutzen, aber auch keine auslassen.

Lösung:

Das Problem ist nicht lösbar, wie man an der Darstellung als Graph erkennen kann. Es gibt vier Knoten, bei denen eine ungerade Anzahl an Wegen ankommt bzw. abgeht.

Erweiterung 1:

Ändert sich das Problem, wenn man die Brücke 5 zwei Mal begehen darf?

Lösung:

Nun ist ein Weg möglich, wenn man an einem der beiden ungeraden Knoten beginnt.

Erweiterung 2:

Wenn man eine neue Brücke (die Nummer 8) bauen würde, wäre dann ein Weg möglich, bei dem alle acht Brücken genau einmal benutzt werden?

Lösung:

Da es jetzt wiederum genau zwei ungerade Knoten gibt, ist das Problem lösbar. Der Start- und der Zielpunkt befinden sich an diesen beiden Knoten.

**Warm-up 16: Wochentage**

Welcher Tag war vor 41 Tagen, wenn in 68 Tagen Mittwoch ist?

Lösung:

Insgesamt sind es 109 Tage im fraglichen Zeitraum. Wenn man diese Zahl nun modulo 7 betrachtet, erhält man 4. Diese 4 Tage auf den Mittwoch addiert ergibt den gesuchten Wochentag – den Samstag.



**Warm-up 17: Das Zerteilen von Hufeisen**

Wie kann man ein Hufeisen mit nur zwei Schnitten in sechs Teile teilen?

Lösung:





**Warm-up 18: Der Diebstahl der Edelsteine**

25 Edelsteine liegen so in Form eines Kreuzes, dass von Position a bis Position b jeweils 15 Steine liegen. Das Gleiche gilt für die Anzahl der Steine von Position a zu Position c sowie für die Anzahl von Position a zu Position d – sie beträgt jeweils ebenfalls 15. Der Besitzer der Edelsteine glaubt, so die Steine gegenüber Langfindern gesichert zu haben. Gelingt es dir, alle Bedingungen über die Lage der Edelsteine zu erhalten und trotzdem zwei der Edelsteine zu wegzunehmen?



Lösung:

Wenn man an den Positionen b, c und d jeweils einen Stein wegnimmt und dafür einen bei Position a ergänzt, sind alle Bedingungen, die in der Aufgabe genannt sind, erfüllt. Trotzdem liegen dann im Kreuz nur noch 23 Edelsteine.

**Warm-up 19: Der Treffpunkt**

Um 12.00 Uhr mittags fährt ein Bus von A-Stadt nach B-Dorf mit 80 km/h ab. Die Entfernung von A-Stadt nach B-Dorf beträgt 100 km. Eine halbe Stunde nach dem Bus fährt ein Radfahrer auf derselben Straße, aber von B-Dorf nach A-Stadt, mit 25 km/h ab. Wer von beiden wird, wenn sie sich treffen, weiter von A-Stadt entfernt sein?

Lösung:

Beide sind am gemeinsamen Treffpunkt selbstverständlich gleich weit von A-Stadt entfernt.



**Warm-up 20: Das Dreieck steht kopf**

Kannst du das hier abgebildete Dreieck durch das Verschieben von drei Münzen auf den Kopf stellen?



Lösung:

Verschiebe Münze 7 neben Münze 2, Münze 10 neben Münze 3 und lege schließlich Münze 1 unterhalb von Münze 8 und Münze 9.



**Warm-up 21: Ein Rechenrätsel**

Welche Zahl muss in dem mit \* markierten Kästchen stehen?

Lösung:

Die Zahl heißt 2947, denn 1+2+2=5; 5+3+2=10; 5+10+10=25 usw.

**Warm-up 22: Das erste Schachproblem**

Stelle auf einem Schachbrett 8 Türme so auf, dass sie sich nicht gegenseitig schlagen können.

Lösung: Es gibt natürlich mehrere Lösungen. Entscheidend ist, dass in jeder Zeile und jeder Spalte des Schachbretts jeweils nur ein Turm stehen darf.

Ein Lösungsbeispiel ist das folgende.



**Warm-up 23: Das zweite Schachproblem**

Kannst du auf einem Schachbrett auch 8 Damen so aufstellen, dass sie sich nicht gegenseitig schlagen können?

Lösung:

Auch für dieses Problem gibt es mehrere Lösungen. Es ist allerdings deutlich schwieriger zu lösen als das Turmproblem, da man die Diagonalen mit beachten muss. Ein Lösungsbeispiel ist dargestellte Situation:

**Warm-up 24: Das dritte, vierte und fünfte Schachproblem**

Wie viele Springer kannst du auf ein Schachbrett stellen, ohne dass sie sich gegenseitig schlagen? Kannst du diese Frage auch für Läufer oder Könige beantworten?

Lösung:

Da ein Springer immer von einem weißen Feld auf ein schwarzes Feld (oder umgekehrt) springt, kann man entweder alle schwarzen oder alle weißen Felder eines Schachbretts mit Springern belegen, ohne dass sie sich gegenseitig schlagen. Bei den Königen ist die Maximalzahl 16, bei den Läufern 14.



**Warm-up 25: Das sechste und letzte Schachproblem**

Stelle 5 Damen so auf das Schachbrett, dass alle Felder beherrscht werden.

Lösung:



**Warm-up 26: Seerosen**

In einem Teich verdoppelt sich jede Woche die von Seerosen bedeckte Fläche. Nach 6 Wochen ist der Teich vollständig bedeckt. Wann ist er zur Hälfte bedeckt?

Lösung: Dass sich die Fläche jede Woche verdoppelt, heißt im Rückblick, dass sich die Fläche im Vergleich zur vorangegangenen Woche jeweils halbiert. Deshalb ist nach 5 Wochen der Teich zur Hälfte bedeckt.

**Warm-up 27: Angeln**

Ein Vater mit dem Namen Jan mit Sohn sowie ein Vater mit Namen Jens und Sohn gehen zusammen angeln. Die Anzahl der Fische, die Jan geangelt hat, endet mit der Ziffer 2, die seines Sohnes mit der Ziffer 3, die von Jens ebenfalls mit 3 und die seines Sohnes mit 4. Die Summe der Anzahlen aller Fische, die sie insgesamt geangelt haben, ist eine Quadratzahl. Wie heißt der Sohn von Vater Jan?

Lösung:

Die Summe der Endziffern ergibt 12 und endet mit der Ziffer 2. Es gibt aber keine Quadratzahl mit der Endziffer 2, daher kann es sich nicht um vier verschiedene Personen, sondern nur um drei Personen (2+3+4=9) handeln. Damit ist ein Sohn gleichzeitig auch ein Vater. Jan kann nicht der Sohn von Vater Jens sein, da seine geangelte Fischanzahl mit der Ziffer 2 endet und nicht, wie im Aufgabentext gefordert, mit 4. Daraus folgt, dass Jens der Sohn von Jan ist.

**Warm-up 28: Seitenzahlen**

Die Seitenzahlen eines Buches haben zusammen 6869 Ziffern. Wie viele Seiten hat das Buch?

Lösung:

Es gibt 9 einstellige Zahlen (ohne die 0, die als Seitenzahl nicht vorkommt). Weiterhin gibt es 90 zweistellige Zahlen mit Ziffern. Die 900 dreistelligen Zahlen haben Ziffern. Damit ist man aber noch unter der Ziffernanzahl 6869. Es muss also noch eine bestimmte Anzahl von vierstelligen Seiten geben, deren Anzahl mit x bezeichnet wird. Damit gilt: , woraus folgt. Die Seitenanzahl ergibt sich dann aus den Anzahlen der Zahlen, also 9+90+900+995=1994.

**Warm-up 29: Stahlkugeln**

Können 1 Million Stahlkugeln, von denen jede einen Durchmesser von 1 mm hat, in einer Schachtel verpackt, von einem Menschen alleine hochgehoben und transportiert werden?

Lösung: 1.000.000 = 100³, was bedeutet, dass alle Kugeln in einem Würfel mit 100 mm=1 dm Kanten­län­ge Platz finden. Der Würfel hat, wenn er aus Stahl wäre, eine Masse von etwa 7,8 kg. Die Kugeln haben aber auf jeden Fall eine geringere Masse (etwa 4 kg). Sie lassen sich also relativ problemlos hochheben und transportieren.

**Warm-up 30: Mathematische Mathematik**

Wie oft kann man das Wort „Mathematik“ in der Abbildung lesen?

M

A A

T T T

H H H H

E E E E E

M M M M M M

A A A A A A A

T T T T T T T T

I I I I I I I I I

K K K K K K K K K K

Lösung:

Die Anzahl der Möglichkeiten ergibt sich aus der folgenden systematischen Abzähl­mög­lich­keit, das dem Pascalschen Dreieck entspricht. Man kann dabei für jeden beliebigen Buchstaben die Anzahl der Möglichkeiten, ihn auf verschiedenen Wegen zu erreichen, ablesen.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1