Von Übergängen und Prozessen

Stochastische Prozesse

September 2016

Autoren:

Uli Brauner, Simon Eickels, Nils Hammelrath, Matthias Heming, Melanie Jankord, Bastian Klappert, Matthias Lippert

Comenius Gymnasium, Datteln / Röntgen Gymnasium, Remscheid / Gesamtschule Willy-Brandt, Castrop-Rauxel / Gesamtschule Meiderich, Duisburg

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial

Kurzbeschreibung

Das Unterrichtsvorhaben beschreibt eine Möglichkeit, an verschiedenen realitätsbezogenen Kontexten das Themengebiet "Stochastische Prozesse" zu erarbeiten.

Vorausgesetzt wird in dem Unterrichtsvorhaben das Lösen von Gleichungssystem und die Matrix- bzw. Vektorschreibweise (Lineare Algebra in der EF).

Die Unterrichtseinheit ist aus mindestens neun Unterrichtsstunden zu 45 Min. ausgelegt. Es sollten je nach dem Bedarf des Kurses zwei weitere Übungsstunden folgen.

Inhaltlich geht es um...

- ...die verschiedenen Darstellungsweisen von Übergangsprozessen (Text - Übergangsdiagramm - Tabelle - Übergangsmatrix).
- ...Matrix-Vektor-Produkt im Sachkontext.
- ...Matrizen-Multiplikation..
- ...Potenzieren von Matrizen.
- ...Grenzverteilung.
- ...Fixvektor.
- ...Inverse.

Im Bereich der prozessbezogenen Kompetenzen wird in dieser Unterrichtseinheit insbesondere das *Modellieren* angesprochen.

In den vorgestellten Unterrichtseinheiten wird der GTR bei der Matrizen-Multiplikation, dem Potenzieren von Matrizen (auch Inverse) und den Lösen von Gleichungssystemen genutzt. Dabei sollten in den ersten Unterrichtsstunden auf den GTR verzichtet werden, da die SuS in der Lage sein müssen u.a. die Matrizenmultiplikation auch händisch durchzuführen.

Von Übergängen und Prozessen

Übersicht über die Unterrichtssequenzen

Mathemematischer Inhalt	Material	Mögl. Arbeits-formen	Zeit
Verschiedene Darstellungsweisen von Übergangsprozessen: Text - Übergangsdiagramm - Tabelle	AB 1: "Diffusion"	Dreischritt: EA - PA - Plenum	30 Min.
Übergangsmatrix, Matrizen-Vektor-Produkt, Matrizenmultiplikation, Potenzieren von Matrizen	AB 2: "Schulmensa"	Dreischritt: EA - PA - Plenum	60 Min.
Verschiedene Darstellungsweisen: Text - Übergangsdiagramm - Tabelle - Übergangsmatrix	AB 3: "Darstellungswechsel"	Dreischritt: EA - PA - Plenum	45 Min
Übung Einführung: Inverse, Grenzmatrix, stochastische Matrix, Fixvektor	AB 4: Gruppenpuzzle	Gruppenpuzzle	90 Min.
Einführung der zyklischen Verteilung	AB 5: Zyklische Verteilung	UG	90 Min.
Entwicklung eigener Aufgaben Lösung der konstruierten Aufgaben	AB 7: "Aufgabenkonstruktion"	GA PA	90 Min.

Kurzbeschreibung	Didaktische Hinweise	Lehrplanbezug	Unterrichtsmaterial

Didaktische Hinweise

Begründung des Themas

Das Themengebiet "Stochastische Prozesse" bietet die Möglichkeit, die prozessbezogenen Kompetenzen vor allem das Modellieren und Mathematisieren stark in den Vordergrund zu stellen.

Methodik

Die Arbeitsblätter bieten die Möglichkeit zum Einsatz in Einzel- oder Partnerarbeit. Empfehlenswert ist die Vorgehensweise im Dreischritt: Einzelarbeit - Partnerarbeit - Plenum. Wichtig dabei ist die gemeinsame Sicherung der zentralen Begriffe und Rechenoperationen im Plenum. Das AB 4 ist als Gruppenpuzzle angelegt.
Eine Ergänzung der AB durch Übungsaufgaben beispielsweise aus dem Schulbuch ist sinnvoll.

Lehrplanbezug

Thema: *Den Zufall im Griff – Modellierung von Zufallsprozessen (E-S1)*

Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen,
- verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände).

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*

Mathematisieren

Die Schülerinnen und Schüler

- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells
- ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu übersetzen

Validieren

Die Schülerinnen und Schüler

- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation

Unterrichtsmaterial

Hinweise zu den Arbeitsblättern:

Arbeitsblatt 1

Anhand des ersten Arbeitsblattes sollen die SuS anhand des Kontextes "Diffusion" drei verschiedene Darstellungsweisen (Text - Übergangsdiagramm - Tabelle) eines Übergangsprozesses erarbeiten. Es bietet sich der Dreischritt (EA - PA - Plenum) an.

Arbeitsblatt 2

Die Entwicklung von Übergangsprozessen wird auf dem zweiten Arbeitsblatt betrachtet. Dies erfolgt im Kontext "Schulmensa" mit dem Wechsel zwischen vegetarischem und nicht-vegetarischem Angebot.
In Aufgabenteil a) berechnen die SuS ohne Vorgabe einer Methode die Verteilungen für die drei Folgetage. Dabei sollten die SuS feststellen, dass dies mit hohem Rechenaufwand verbunden ist. Daher ist für SuS an dieser Stelle der Vorteil von Übergangsmatrizen ersichtlich. Die Rechnung mit Übergangmatrizen wird an dieser Stelle nicht hergeleitet, sondern eingeführt. Eine Herleitung ist im Unterrichtsgespräch durch Vergleich der Aufgabenteile a) und b) möglich.
Die Matrizenmultiplikation bzw. das Potenzieren von Matrizen erfolgt an dieser Stelle zunächst ohne Einsatz des GTR. Hier wird demnach erst für Berechnungen ab dem vierten Folgetag deutlich, warum die Matrizenmultiplikation den Rechenaufwand verringert. An dieser Stelle sollte die "schnellere" Berechnung von M^4, M^5 usw. im Unterrichtsgespräch aufgegriffen werden.
In den nachfolgenden Übungsaufgaben sollte die Einheitsmatrix thematisiert werden. Diese ist bei zyklischen Prozessen (AB 5, 6) von Relevanz.

Arbeitsblatt 3

Der Wechsel zwischen den verschiedenen Darstellungsweisen von Übergangsprozessen wird auf dem Arbeitsblatt 3 aufgegriffen. Die untenstehende Graphik kann dabei zuvor im Unterrichtsgespräch thematisiert werden.

Arbeitsblatt 4

Das AB 4 umfasst ein Gruppenpuzzle. Hier werden die bereits erworbenen Fachkompetenzen in verschiedenen Sachkontexten (Urlaubsort, Einkommensverteilung und Handyanbieter) vertieft.

In der Expertenphase werden die Verteilungen für verschiedene Zeitpunkte berechnet, dabei wird u.a. die Inverse thematisiert. Auch verschiedene Potenzen der Übergangsmatrix werden betrachtet und mit der Übergangsmatrix verglichen. Dies dient der Hinführung zur Grenzmatrix.

In der Austauschphase wird das Gemeinsame der Aufgaben gesucht. Der Begriff der 'stochastischen Matrix' und die Grenzverteilung/-matrix stehen hierbei im Fokus.

Von Übergängen und Prozessen

Wichtig ist die Aufarbeitung des Gruppenpuzzles im Plenum. Sowohl die Anwendung der Inversen zum Zurückrechnen im Sachkontext als auch der Aufbau von stochastischen Matrizen sind zu thematisieren. Besonders die Diskussion der Grenzverteilung und der Grenzmatrix sind in den Vordergrund zu stellen. Die Potenzen der Matrizen M^n streben in allen Beispielaufgaben für $n \to \infty$ gegen eine Grenzmatrix. Es kann mit Hilfe herausgefunden werden, dass diese Spalten dem Fixvektor entsprechen, einem Verteilungsvektor, der sich bei der Multiplikation mit der Übergangsmatrix nicht ändert ($M \cdot \vec{v} = \vec{v}$). Es bietet sich an, die Berechnung des Fixvektors mit dem Gleichungssystem $M \cdot \vec{v} = \vec{v}$ an einem Beispiel durchzuführen und die Thematik Grenzmatrix und Fixvektor in weitern Übungsaufgaben zu vertiefen.

Arbeitsblatt 5

Das Arbeitsblatt 5 enthält einen Aufgabenvorschlag für die Einführung der stabilen Verteilung im Unterrichtsgespräch.

Die Aufgabe ist mathematisch einfach zu durchdringen und rechnerisch nicht anspruchsvoll. Im Vordergrund steht die Idee, dass es sich um einen zyklischen Prozess handelt, der sich dadurch von den bisher betrachteten Prozessen abgrenzt.

Es sollte aufgegriffen werden, dass die Potenz der Übergangsmatrix zu bestimmten Zeitpunkten der Einheitsmatrix entspricht, da sich die Ursprungsverteilung wieder einstellt. Dies ermöglicht die Vorhersage der Verteilung zu späteren/vorangegangenen Zeitpunkten und weiteren Potenzen der Übergangsmatrix.

Arbeitsblatt 6

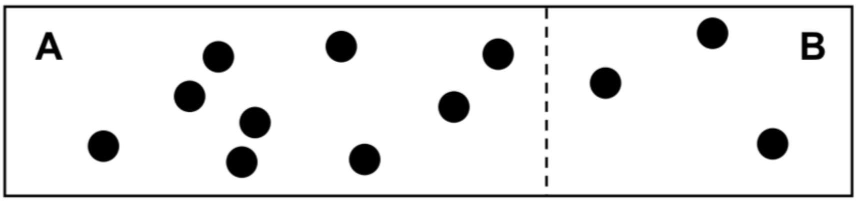
Zum Abschluss der Unterrichtseinheit sollen die SuS selber in Gruppenarbeit komplexe Aufgaben mit entsprechender Musterlösung konstruieren. Dabei wird in zwei Fällen die Verteilung in Form der Übergangsmatrix bzw. des Übergangsdiagramms, in einem Fall der Sachkontext vorgegeben.

Im Anschluss sollen die SuS die erstellten Aufgaben anderer Gruppen in Partnerarbeit bearbeiten.

Von Übergängen und Prozessen

Arbeitsblatt 1 "Diffusion"

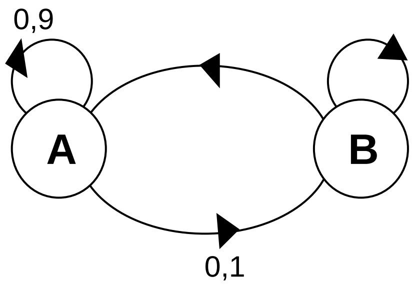
Ein Behälter wird in der Mitte durch eine halbdurchlässige Membran geteilt. Im Behälter befinden sich 12000 Teilchen.
Zu Anfang sind 9000 davon in Teil A des Behälters, der Rest in Teil B.



Nach jeweils 10 Minuten haben 10 % der in A befindlichen Teilchen in Behälterteil B und umgekehrt 20 % der zu Anfang in B vorhandenen Teilchen in Behälterteil A gewechselt.

a) Der Prozess kann mithilfe des nebenstehenden Diagramms beschrieben werden.
Solche Diagramme nennt man **Übergangsdiagramme**.

Erläutern Sie dieses Diagramm und ergänzen Sie die beiden fehlenden Zahlenwerte.



b) Die Tabelle beschreibt einen anderen Diffusionsprozess.

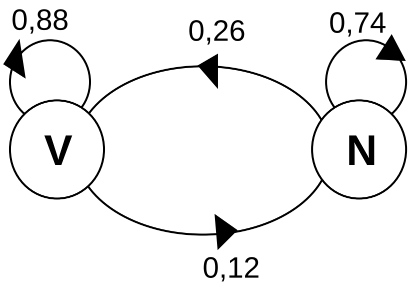
		von	
		A	**B**
nach	**A**	**0,75**	
	B		**0,6**

Ergänzen Sie fehlende Zahlenwerte und erläutern Sie die Bedeutung der einzelnen Werte im Sachkontext.

Von Übergängen und Prozessen

Arbeitsblatt 2 "Schulmensa"

In der Schulmensa gibt es zwei Essensangebote. Es gibt ein vegetarisches Gericht (V) und ein nichtvegetarisches Gericht (N). Es kommt vor, dass die Schülerinnen und Schüler von Tag zu Tag zwischen den Angeboten wechseln. Das nebenstehende Übergangsdiagramm stellt diesen Wechsel dar.



a) Am Montag wählen 100 Schüler das vegetarische und 200 Schüler das nichtvegetarische Gericht.
Berechnen Sie jeweils die Anzahl der Essen für Dienstag, Mittwoch und Donnerstag.

Info 1:
Die Berechnungen in Aufgabenteil a) sind aufwendig. Um den Rechenaufwand zu verkürzen, können Übergangsprozesse mit einer Matrix dargestellt werden. In diesem Fall wird von einer <u>Übergangsmatrix</u> gesprochen.

Beispiel:
Die folgende Tabelle wird durch die nebenstehende Übergangsmatrix A beschrieben.

		von A	von B
nach	A	0,75	0,37
	B	0,25	0,63

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}37 \\ 0{,}25 & 0{,}63 \end{pmatrix}$$

Info 2:
Die Anzahl der jeweiligen Essen für den Nachfolgetag kann mithilfe der Übergangsmatrix berechnet werden. Dabei werden die Anfangszahlen (x,y) in einem Spaltenvektor aufgeschrieben.
Die Berechnung erfolgt dabei nach folgendem Schema:

$$M \cdot \vec{v} = \vec{w} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

b) *Stellen Sie den Schulmensa-Wechselprozess in einer Übergangsmatrix M dar.*
Berechnen Sie auf die obige Weise die Anzahl der Essen für Dienstag.

c) *Berechnen Sie die Anzahl der Essen für Mittwoch, Donnerstag und Freitag.*

Info 3:

Um die Essensanzahl für Mittwoch zu bestimmen, musste in Aufgabenteil d) das Zwischenergebnis für Dienstag berechnet werden.

Also: $M \cdot [M \cdot \vec{v}]$

Bis Donnerstag sogar für Dienstag und Mittwoch.
Also: $M \cdot \big[M \cdot [M \cdot \vec{v}]\big]$

Diese komplizierten Rechnungen lassen sich vereinfachen, indem man die Matrizen zusammenfasst:
Also für Mittwoch: $\underbrace{M \cdot [M}\cdot \vec{v}]$

$= M^2 \cdot \vec{v}$

Also für Donnerstag: $\underbrace{M \cdot \big[M \cdot [M}\cdot \vec{v}]\big]$

$= M^3 \cdot \vec{v}$

Wie potenziert man Matrizen?
Zwei Matrizen werden multipliziert, indem man je die Zeilen mit der Spalte multipliziert.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & ae + bg \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Beispiel:

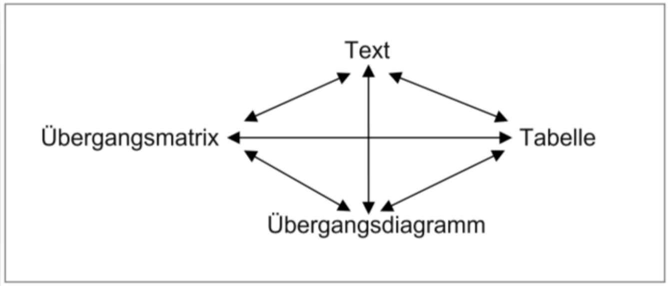
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 7 & 2 \cdot (-6) + (-1) \cdot 8 \\ (-4) \cdot 5 + 3 \cdot 7 & (-4) \cdot (-6) + 3 \cdot 8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -20 \\ 1 & 48 \end{pmatrix}$$

d) *Berechnen Sie M^2, M^3 und M^4.*
Hinweis: M^4 kann auf 2 verschiedene Weisen berechnet werden.

e) *Berechnen Sie mithilfe von M^2, M^3 und M^4 die Essensverteilung am Mittwoch, Donnerstag und Freitag.*

f) *Berechnen Sie M^8.*

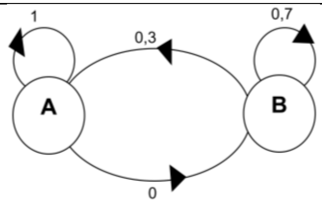
Von Übergängen und Prozessen



Arbeitsblatt 3 "Darstellungwechsel"

Zwischen den verschiedenen Darstellungen eines Übergangsprozesses (Text-Übergangsdiagramm-Tabelle-Übergangsmatrix) kann beliebig gewechselt werden.

Ergänze die jeweils fehlenden Darstellungen in der folgenden Tabelle.

	Text	**Übergangsdiagramm**	**Tabelle**	**Übergangsmatrix**
a)	In einer Stadt gibt es zwei konkurrierende Reiseunternehmen A und B. 38% der Kunden von A wechseln zum Unternehmen B. 23% der Kunden von B wechseln zum Unternehmen A. Die übrigen Kunden bleiben ihrem Reisunternehmen treu.			
b)				
c)			$\begin{array}{cc\|cc} & & \textbf{von} & \\ & & \textbf{A} & \textbf{B} \\ \hline \textbf{nach} & \textbf{A} & \textbf{0,1} & \\ & \textbf{B} & & \textbf{0,29} \end{array}$	
d)				$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Arbeitsblatt 4: Gruppenpuzzle

Aufgabe für die Expertengruppe 1

Bearbeiten Sie die Aufgabe gemäß der unten stehenden Aufgabenstellung.

Aufgaben für die Gruppenphase

a) Stellen Sie sich gegenseitig Ihre Aufgaben und Lösungen vor.

b) Finden Sie das Gemeinsame der gestellten Aufgaben.

c) Alle Übergangsmatrizen dieser Aufgaben sind stochastische Matrizen. Geben Sie an, was „stochastische Matrizen" kennzeichnet. Schreiben Sie eine 2x2 und 3x3 stochastische Matrix in allgemeiner Form auf.

d) Bewerten Sie die „Güte" der mathematischen Modellierungen in jedem der drei Beispiele.

1. Urlaubsverhalten

Laut einer Untersuchung des Deutschen Instituts für Touristik blieben im vergangenem Jahr 25 % der Bevölkerung im Urlaub zu Hause (H), 42 % verreisten innerhalb von Deutschland (D) und 33 % verbrachten Ihren Urlaub im Ausland (A).

Die untenstehende Matrix A beschreibt das Wechselverhalten der deutschen Urlauber von Jahr zu Jahr.

$$\begin{array}{cc} & \textit{von} \\ & \begin{array}{ccc} H & D & A \end{array} \\ \textit{nach} \begin{array}{c} H \\ D \\ A \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Erläutern Sie die Bedeutung der Einträge 0,6 und 0,4 im Sachkontext.
2. Berechnen Sie jeweils die Anzahl der Urlauber, die zu Hause bleiben, den Urlaub in Deutschland und im Ausland verbringen für das aktuelle Jahr (ohne GTR).
3. Bestimmen Sie die Anzahlen für weitere zwei Jahre (mit GTR).
4. Berechnen Sie die Übergangsmatrix A^2 (ohne GTR). Vergleichen Sie diese mit der vorgegebenen Matrix A.
5. Bestimmen Sie A^5, A^{10}, A^{15} und A^{20} (mit GTR). Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.
6. Bestimmen Sie folgendes Produkt $A^{-1}\begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 25 \end{pmatrix}$ (mit GTR) und erläutern Sie die Bedeutung im Sachkontext.

Von Übergängen und Prozessen

Aufgabe für die Expertengruppe 2

Bearbeiten Sie die Aufgabe gemäß der unten stehenden Aufgabenstellung.

Aufgaben für die Gruppenphase

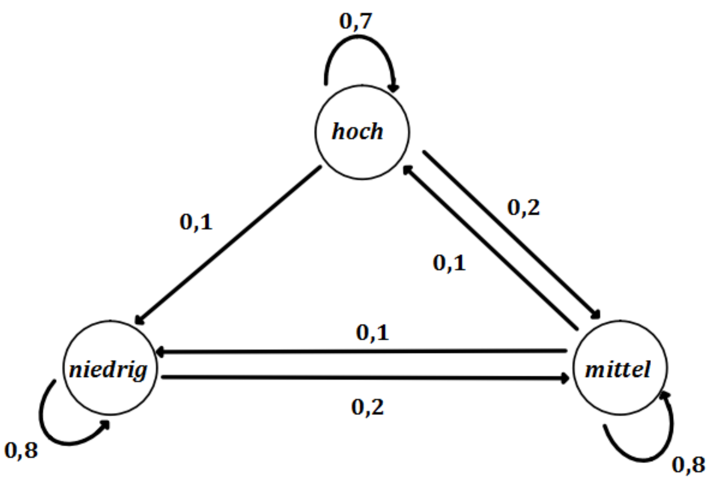
a) Stellen Sie sich gegenseitig Ihre Aufgaben und Ihre Lösungen vor.

b) Finden Sie das verbindend Gemeinsame der gestellten Aufgaben.
c) Alle Übergangsmatrizen dieser Aufgaben sind stochastische Matrizen. Geben Sie an, was „stochastische Matrizen“ kennzeichnet. Schreiben Sie eine 2x2 und 3x3 stochastische Matrix in allgemeiner Form auf.
d) Bewerten Sie die „Güte“ der mathematischen Modellierungen in jedem der drei Beispiele.

2. Einkommensverteilung

In einem kleinen Land gibt es ca. 1.000.000 Erwerbstätige, die vom Finanzamt jährlich einer der drei Einkommensgruppen 'niedrig', 'mittel' und 'hoch' zugeordnet werden.

Es hat sich im Laufe der Jahre gezeigt, dass es zwischen diesen Gruppen von Jahr zu Jahr Verschiebungen gibt. Das untenstehende Übergangsdiagramm beschreibt diese Verschiebungen von Jahr zu Jahr.



Am Anfang befinden sich 200.000 Erwerbstätige in der Gruppe *niedrig,* 700.000 Erwerbstätige in der Gruppe *mittel* und 100.000 Erwerbstätige in Gruppe *hoch*.

1. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix A.
2. Berechnen Sie die Anzahl der Erwerbstätigen, die sich im nächsten Jahr in diesen Gruppen befinden (ohne GTR).
3. Bestimmen Sie die Stärken der Gruppen für weitere zwei Jahre (mit GTR).
4. Berechnen Sie die Übergangsmatrix A^2 (ohne GTR). Vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis aus 1.
5. Bestimmen Sie A^5, A^{10}, A^{15} und A^{20} (mit GTR). Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.
6. Bestimmen Sie folgendes Produkt $A^{-1}\begin{pmatrix}200000\\700000\\10000\end{pmatrix}$ (mit GTR) und erläutern Sie die Bedeutung im Sachkontext.

Von Übergängen und Prozessen

Aufgabe für die Expertengruppe 3

Bearbeiten Sie die Aufgabe gemäß der unten stehenden Aufgabenstellung.

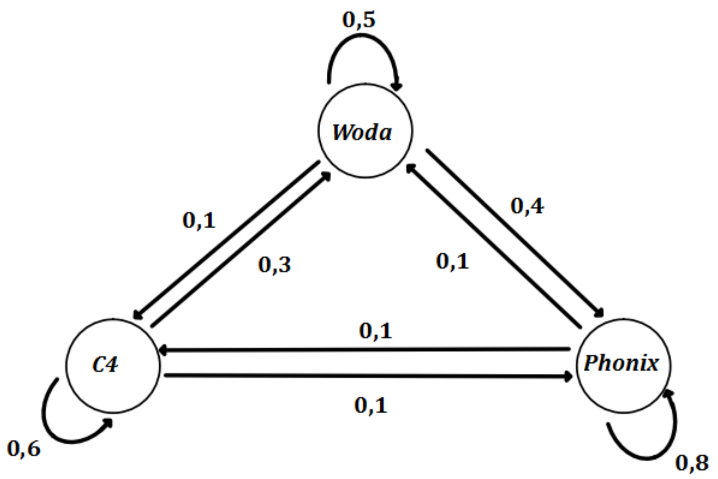
Aufgaben für die Gruppenphase

a) Stellen Sie sich gegenseitig Ihre Aufgaben und Ihre Lösungen vor.

b) Finden Sie das verbindend Gemeinsame der gestellten Aufgaben.
c) Alle Übergangsmatrizen dieser Aufgaben sind stochastische Matrizen.
Geben Sie an, was „stochastische Matrizen“ kennzeichnet. Schreiben Sie eine 2x2 und 3x3 stochastische Matrix in allgemeiner Form auf.
d) Bewerten Sie die „Güte“ der mathematischen Modellierungen in jedem der drei Beispiele.

3. Handyanbieter

Die Handyanbieter *Woda*, *C4* und *Phonix* haben den Handymarkt erobert und schließen Jahresverträge mit ihren Kunden ab. Das Diagramm zeigt, wie viele Kunden anteilmäßig von Jahr zu Jahr den Anbieter wechseln.



Im Jahr 2016 hat jeder Anbieter 25 Millionen Kunden unter Vertrag.

1. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix A.
2. Berechnen Sie die Kundenverteilung nach einem Jahr (ohne GTR).
3. Berechnen Sie die Kundenverteilung nach zwei und drei Jahren (mit GTR).
4. Berechnen Sie die Übergangsmatrix A^2 (ohne GTR) . Vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis aus a).
5. Bestimme Sie auch A^5, A^{10}, A^{15} und A^{20} (mit GTR). Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.
6. Bestimmen Sie folgendes Produkt $A^{-1}\begin{pmatrix}25\,000\,000\\25\,000\,000\\25\,000\,000\end{pmatrix}$ (mit GTR) und erläutern Sie die Bedeutung im Sachkontext.

Von Übergängen und Prozessen

Arbeitsblatt 5: Zyklische Verteilung

Organisation des Sportfestes

Beim Sportfest gibt es drei Stationen: Werfen, Sprung und Laufen. Die drei Klassen 5a, 5b und 5c werden zu Anfang auf die drei Stationen verteilt und wechseln dann in einer vorgegebenen Reihenfolge. Die 5a beginnt beim Laufen, die 5b beginnt beim Sprung und die 5c beim Werfen. Die Klassen wechseln vom Laufen zum Sprung und danach zum Werfen.
Die 5a hat 23 Schüler, die 5b hat 28 Schüler und die 5c hat 18 Schüler.

a) Bestimmen Sie die Schülerzahlen an den einzelnen Stationen nach dem ersten und zweiten Wechsel.
b) Stellen Sie für die Situation einen Übergangsgraphen und die zugehörige Matrix A auf, die die Schülerübergänge beschreibt.
c) Deuten Sie $A \cdot \vec{v}$ und $A^2 \cdot \vec{v}$ im Sachkontext. Geben Sie das Ergebnis von $A^3 \cdot \vec{v}$ an, ohne zu rechnen.
d) Beschreiben Sie das Ergebnis von $A^n \cdot \vec{v}$ in Abhängigkeit von *n*.
e) Bestimmen Sie A^2, A^3. Was fällt auf?
f) Bestimmen Sie ohne erneut zu rechnen A^{19} und A^{35}.

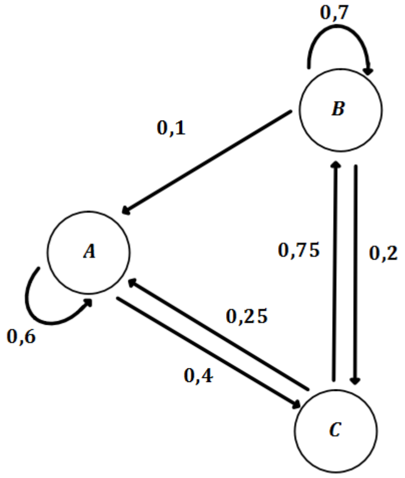
Arbeitsblatt 6: "Aufgabenkonstruktion"

GA

1. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

   Überlegen Sie sich einen passenden Sachkontext und erstellen Sie eine komplexe, gegliederte Aufgabe als Übung für Ihre Mitschüler. Erstellen Sie zudem eine Musterlösung.

2. Gegeben sei folgender Übergangsgraph:



   Überlegen Sie sich einen passenden Sachkontext und erstellen Sie eine komplexe, gegliederte Aufgabe als Übung für Ihre Mitschüler. Erstellen Sie zudem eine Musterlösung.

3. An einem Flughafen konkurrieren mehrere Mietwagenunternehmen.
   Erstellen Sie in diesem Sachkontext eine komplexe, gegliederte Aufgabe, in der Übergänge untersucht werden. Diese Aufgabe soll als Übungsaufgabe für Ihre Mitschüler dienen. Erstellen Sie zudem eine Musterlösung.